



Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

КЊИГА АБСТРАКТА

Друга конференција о настави математике и информатике
29-30. мај 2026. • Крагујевац • Србија



ТЕМАТСОМ

Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет



КЊИГА АПСТРАКАТА

Друге конференције о настави математике и информатике
29–30. мај 2026.
Крагујевац, Србија

Крагујевац, 2026.

CIP - Каталогизација у публикацији Народна библиотека Србије, Београд

371.3::51(048)(0.034.2)

371.3::004(048)(0.034.2)

КОНФЕРЕНЦИЈА о настави математике и информатике (2 ; 2026 ; Крагујевац)

Књига апстраката Друге конференције о настави математике и информатике 29–30. мај 2026. Крагујевац, Србија [Електронски извор] / [уредници Марина Свичевић, Александар Миленковић, Немања Вучићевић]. - Крагујевац :

Природно

-математички факултет, 2026 (Крагујевац : Donat graf). - 1 електронски оптички диск (CD-ROM) ; 12 cm

Системски захтеви: Нису наведени. - Насл. са насловне стране документа. - На врху

насл. стр.: Универзитет у Крагујевцу. - Тираж 110. - Апстракти упоредо на срп. и енгл.

језику. - Библиографија уз сваки апстракт.

ISBN 978-86-6009-130-9

а) Математика -- Настава -- Апстракти б) Информатика -- Настава -- Апстракти

COBISS.SR-ID 193603081

КЊИГА АПСТРАКАТА

Друге конференције о настави математике и информатике

29–30. мај 2026.

Крагујевац, Србија

<https://imi.pmf.kg.ac.rs/TEMATCOM2026/>

ISBN 978-86-6009-130-9

Издавач:

Природно-математички факултет у Крагујевцу
www.pmf.kg.ac.rs

За издавача:

Проф. др Марија Станић, декан

Уредници:

Проф. др Марина Свичевић

Доц. др Александар Миленковић

Немања Вучићевић

Припрема за штампу:

Проф. др Марина Свичевић

Доц. др Александар Миленковић

Немања Вучићевић

Лектор енглески:

Проф. др Аница Глобовић

Корице:

Жељко Малишић

Штампа:

DONAT GRAF DOO, БЕОГРАД

Тираж:

110 примерака

Садржај

О КОНФЕРЕНЦИЈИ.....	9
ОРГАНИЗАЦИЈА.....	10
НАУЧНИ ОДБОР.....	10
ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР.....	11
ПЛЕНАРНА ПРЕДАВАЊА.....	13
КАДА ПРАВИЛА ЗАВАРАЈУ: КАКО РАНЕ ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈЕ ОБЛИКУЈУ ТРАЈНЕ МАТЕМАТИЧКЕ ЗАБЛУДЕ.....	13
ПОЛОЖАЈ НАСТАВЕ ПРОГРАМИРАЊА У ПРИСУСТВУ САВРЕМЕНИХ АЛАТА ВЕШТАЧКЕ ИНТЕЛИГЕНЦИЈЕ.....	15
НЕИЗВЕСНОСТ КАО ПОКРЕТАЧ КРЕАТИВНОСТИ: СЛУЧАЈ МАТЕМАТИКЕ.....	18
СЕКЦИЈА 1: ИСТРАЖИВАЊА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ.....	21
ДА ЛИ ЈЕ НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРБИЈИ ЗРЕЛА ЗА ЗНАЧАЈНЕ СТРАТЕГИЈСКЕ ПРОМЕНЕ?	21
ОПТИМИЗАЦИЈА ОБРАЗОВНИХ СТРУКТУРА ПРИМЕНОМ ТОПОЛОШКОГ УРЕЂЕЊА У УСМЕРЕНИМ АЦИКЛИЧНИМ ГРАФОВИМА.....	24
ДИДАКТИЧКИ ИЗАЗОВИ КОНЦЕПТА НУЛЕ: ОД МЕХАНИЧКЕ РУТИНЕ ДО ЛОГИЧКОГ ЗАСНИВАЊА	26
ПАСКАЛОВ ТРОУГАО КРОЗ ПРЕБРОЈАВАЊЕ.....	28
15 ГОДИНА МАЈА, МЕСЕЦА МАТЕМАТИКЕ	29
ВЕШТАЧКА ИНТЕЛИГЕНЦИЈА ИЗМЕЂУ ПОЕНКАРЕА И РАСЕЛА: ДИДАКТИЧКИ ИЗАЗОВИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ.....	30
ГДЕ ЈЕ ГРАНИЦА?.....	32
ИЗАЗОВИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ У СРЕДЊОШКОЛСКОМ ОБРАЗОВАЊУ.....	34
НОРМАТИВНО И РЕАЛНО НАСТАВНИЧКО ОПТЕРЕЂЕЊЕ	36

НОВИ ДИДАКТИЧКИ ПРИСТУП ДЕТЕРМИНАНТАМА	37
ВЕШТАЧКА ИНТЕЛИГЕНЦИЈА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ НА ТЕХНИЧКИМ ФАКУЛТЕТИМА: МОГУЋНОСТИ И ИЗАЗОВИ.....	39
ДОКАЗИВАЊЕ ТЕОРЕМА У ПРИРОДНОЈ ДЕДУКЦИЈИ.....	40
ИСТА ИДЕЈА, ДВЕ ПЕРСПЕКТИВЕ: ШТА ЗАПРАВО ЗНАМО О НЗД И НЗС?	42
МОЖЕ ЛИ ВЕШТАЧКА ИНТЕЛИГЕНЦИЈА ДА ПРЕЂЕ МАГАРЕЊИ МОСТ?	44
АДАПТИВНО УЧЕЊЕ У STEM ОБРАЗОВАЊУ ЗАСНОВАНО НА ВЕШТАЧКОЈ ИНТЕЛИГЕНЦИЈИ: ПЕРЦЕПЦИЈЕ СТУДЕНАТА О ИНТЕЛИГЕНТНОМ ТУТОРСКОМ СИСТЕМУ ALEKS.....	46
СУДОКУ КАО МОСТ ИЗМЕЂУ ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА И НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ: ОД ОЈЛЕРОВИХ КВАДРАТА ДО СУЗБИЈАЊА МАТЕМАТИЧКЕ АНКСИОЗНОСТИ.....	48
ОЦЕЊИВАЊЕ ЗАСНОВАНО НА ПОДАЦИМА У ВИСОКОМ ОБРАЗОВАЊУ РАЧУНАРСКИХ НАУКА: ПРАЂЕЊЕ И ЕВАЛУАЦИЈА СТУДЕНТСКИХ СОФТВЕРСКИХ ПРОЈЕКТА УЗ ПРИМЕНУ ОБРАДЕ ПРИРОДНОГ ЈЕЗИКА	50
ОД ДИЈАЛОГА ИЗМЕЂУ СТУДЕНТА И LLM-А ДО АНАЛИТИКЕ УЧЕЊА: УНАПРЕЂЕЊЕ SPARK_AI КРОЗ ОКВИР ЗА АНАЛИТИКУ ИНТЕРАКЦИЈЕ.....	52
УЧЕЊЕ МАТЕМАТИКЕ ЗАСНОВАНО НА ИГРИ: ДИЗАЈН, ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА И ПЕРЦЕПЦИЈЕ УЧЕНИКА	54
ЕФИКАСНО МАТЕМАТИЧКО ДОКАЗИВАЊЕ КРОЗ КОНЦЕПТЕ И МОДЕЛЕ ИЗ ФИЗИКЕ	55
ИНТЕГРАЦИЈА EVSI ПЛАТФОРМЕ У ПРОЦЕСЕ ВЕРИФИКАЦИЈЕ НЕФОРМАЛНОГ УЧЕЊА У ВИСОКОМ ОБРАЗОВАЊУ	57
ИЗАЗОВИ АКАДЕМСКОГ ИНТЕГРИТЕТА У ДИГИТАЛНОМ ДОБУ: ПРАКТИЧАН ПРИСТУП ЗА ИСПИТЕ ИЗ РАЧУНАРСТВА.....	60
КРИТИЧКИ ПРИЛОГ ЕЛЕМЕНТАРНОЈ НАСТАВИ ГЕОМЕТРИЈЕ.....	62
ВРШЊАЧКО ОЦЕЊИВАЊЕ У ВИСОКОМ ОБРАЗОВАЊУ: ПЕРЦЕПЦИЈЕ СТУДЕНАТА И УТИЦАЈ НА УЧЕЊЕ.....	64
ИСПИТИВАЊЕ ОСПОСОБЉЕНОСТИ БУДУЋИХ УЧИТЕЉА ЗА ФОРМУЛИСАЊЕ ТЕКСТУАЛНОГ МАТЕМАТИЧКОГ ЗАДАТКА НА ОСНОВУ ДАТЕ ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ	66
ИЗРАЧУНАВАЊЕ НЕСВОЈСТВЕНИХ ИНТЕГРАЛА: АНАЛИЗА КОГНИТИВНИХ КОНФЛИКАТА УЧЕНИКА.....	68
МОДЕЛИ БРОЈЕВНЕ ПРАВЕ КАО АЛАТИ У НАСТАВИ	70

ОРИГАМИ У НАСТАВИ ГЕОМЕТРИЈЕ У ОСНОВНОЈ И СРЕДЊОЈ ШКОЛИ	72
ПРЕДВИЂАЊЕ НАМЕРЕ УЧЕНИКА ГИМНАЗИЈА ДА КОРИСТЕ СНАТГРТ У УЧЕЊУ МАТЕМАТИКЕ	74
ОД КОНКРЕТНОГ КА АПСТРАКТНОМ: ИНТЕГРАЦИЈА ВАН ХИЛЕОВИХ НИВОА МИШЉЕЊА И СРА ПРИСТУПА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ.....	76
МОГУЋНОСТИ ПРИМЕНЕ ЧАСОПИСА „МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ“ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ: ДИДАКТИЧКО-МЕТОДИЧКА АНАЛИЗА	78
МУЗИЧКЕ ТОНСКЕ ЛЕСТВИЦЕ ОД ПИТАГОРЕ ДО ДАНАС.....	80
РАЗУМЕВАЊЕ ИНТЕРПОЛАЦИЈЕ КОД УЧЕНИКА ТРЕЋЕГ РАЗРЕДА СРЕДЊЕ ШКОЛЕ ОБДАРЕНИХ ЗА РАЧУНАРСТВО И ИНФОРМАТИКУ.....	82
ИСТРАЖИВАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА ЗА ВИ И УПОТРЕБЕ АЛАТА ВИ КОД СТУДЕНАТА УЧИТЕЉСКИХ СТУДИЈА.....	83
ШАХОВСКИ ПРОБЛЕМИ И ВЕШТАЧКА ИНТЕЛИГЕНЦИЈА.....	85
КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ: АПОС АНАЛИЗА КУРИКУЛУМА И ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА ИЗ СРБИЈЕ.....	87
СРЕДЊОШКОЛСКА ГЕОМЕТРИЈА, ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ И АУТОМАТСКО ДОКАЗИВАЊЕ ТЕОРЕМА	89
РЕКУРЗИЈА КАО МОСТ ИЗМЕЂУ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ...90	
МАТЕМАТИКА ИЗМЕЂУ ОМИЉЕНОГ И ТЕШКОГ ПРЕДМЕТА: КАКО УЧЕНИЦИ ОБЈАШЊАВАЈУ ОВАЈ ПАРАДОКС	92
РАЗВОЈ КУРИКУЛУМА ЗА ОБРАЗОВАЊЕ НАСТАВНИКА МАТЕМАТИКЕ: ИСТОРИЈСКО-КОМПАРАТИВНА АНАЛИЗА.....	94
СЕКЦИЈА 2: ШКОЛСКА ПРАКСА	97
НЕВИДЉИВА МОЋ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА: ОД ЛОГИЧКИХ ПАРАДОКСА ДО ДИГИТАЛНЕ РЕАЛНОСТИ.....	97
ЈЕДАН ОД МОГУЋИХ МЕТОДИЧКИХ ПРИСТУПА ГЕОМЕТРИЈСКОМ ДОКАЗУ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ	99
ИНТЕРДИСЦИПЛИНАРНОСТ НА ЧАСУ МАТЕМАТИКЕ: ОБРАДА ПОДАТАКА О РЕЦИКЛАЖИ.....	101
КОНЦЕПТИ ГРАФОВСКИХ АЛГОРИТАМА ЗА РАЗВОЈ АЛГОРИТАМСКОГ РАЗМИШЉАЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА.....	103
ЗБИР ЦИФАРА НА ТАКМИЧЕЊИМА И ПРИЈЕМНИМ ИСПИТИМА ОСНОВАЦА	105

МЕЂУПРЕДМЕТНА ПОВЕЗАНОСТ НАСТАВЕ ДИСКРЕТНЕ МАТЕМАТИКЕ И ПРОГРАМИРАЊА КРОЗ ТЕОРИЈУ ГРАФОВА У СРЕДЊОШКОЛСКОМ ОБРАЗОВАЊУ	107
ДИНАМИЧКА ВИЗУЕЛИЗАЦИЈА МАТЕМАТИЧКИХ ПОЈМОВА ПРИМЕНОМ АЛАТА MANIM	109
ИНОВАТИВНИ ПРИСТУПИ АУТОМАТИЗАЦИЈИ ТАБЛИЦЕ МНОЖЕЊА	111
УЧЕНИЧКА ПИТАЊА КАО ИНДИКАТОР ПОТЕШКОЋА У РЕШАВАЊУ ТАКМИЧАРСКИХ ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ	113
ОД СРЕДЊЕ ВРЕДНОСТИ ДО МАТЕМАТИЧКОГ ОЧЕКИВАЊА: КА КОНЦЕПТУАЛНОМ РАЗУМЕВАЊУ УЗ ПОМОЋ МОДЕЛА ПОЛУГЕ	115
НЕПРЕЦИЗНОСТИ У ФОРМУЛАЦИЈАМА ЗАДАТАКА НА МАТЕМАТИЧКИМ ТАКМИЧЕЊИМА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА.....	117
ХИЈЕРАРХИЈСКИ ПРИСТУП СИМЕТРИЈИ У НАСТАВИ ОДРЕЂЕНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ.....	118
ПРОЈЕКАТ НАУЧНИ БРОД.....	120
ГЕОМЕТРИЈСКА МЕСТА ТАЧАКА У РАВНИ R^2 , КАО КОНВЕКСНИ ИЛИ КОМПАКТНИ СКУПОВИ	121
КУТАК ЗА МАТЕМАТИЧКИ ТРЕНУТАК.....	122
ВИ У МАТЕМАТИЧКОЈ ГАЛЕРИЈИ	124
ДИДАКТИЧКИ ЗНАЧАЈ ЛИНЕАРНОГ ХАРМОНИЈСКОГ ОСЦИЛАТОРА ЗА УЧЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА.....	126
ДИГИТАЛНА ПИСМЕНОСТ ВАСПИТАЧА КАО ДЕТЕРМИНАНТА КВАЛИТЕТА САВРЕМЕНЕ ВАСПИТНО-ОБРАЗОВНЕ ПРАКСЕ....	127
ТЕМАТСКЕ РАДИОНИЦЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ	130
ПОВРШИНЕ У ГЕОМЕТРИЈСКИМ ЗАДАЦИМА НА НАЦИОНАЛНИМ ТАКМИЧЕЊИМА.....	131
МАТЕМАТИЧКИ ГЕНЕЗИС: ОД АНАЛОГНОГ КОРЕНА ДО ДИГИТАЛНОГ ПЛОДА	133
КУРИКУЛУМ МАТЕМАТИКЕ: ОД ИСТОРИЈСКИХ ОСНОВА ДО САВРЕМЕНИХ ИЗАЗОВА И НАСТАВНЕ ПРАКСЕ.....	135
ИНТЕГРАЦИЈА АЛАТА NOTEBOOKLM У НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ КРОЗ МОДЕЛ ИЗОКРЕНУТЕ УЧИОНИЦЕ	137
ПРОМОЦИЈА МАТЕМАТИКЕ ИНТЕГРАЦИЈОМ ТАКМИЧЕЊА „КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА”, ЧАСОПИСА ЗА УЧЕНИКЕ, ВЕБ-ПЛАТФОРМЕ И YOUTUBE КАНАЛА	139

ОДРЕЂИВАЊЕ БРОЈА π КРОЗ МУЛТИДИСЦИПЛИНАРНИ STEM ПРИСТУП.....	141
ОД СЛАМЧИЦА ДО БЕСКОНАЧНОСТИ: ИНОВАТИВНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ.....	143
<i>BEYOND RIGHT AND WRONG</i> : ВЕБ ПЛАТФОРМА ЗА УЧЕЊЕ МАТЕМАТИКЕ КРОЗ АНАЛИЗУ ТАЧНИХ И НЕТАЧНИХ РЕШЕЊА ЗАДАТАКА	145
ПРИМЕНА АЛАТА ВЕШТАЧКЕ ИНТЕЛИГЕНЦИЈЕ У РАЗВОЈУ АЛГОРИТАМСКОГ МИШЉЕЊА КОД ДЕЦЕ ПРЕДШКОЛСКОГ УЗРАСТА – ПРИКАЗ И АНАЛИЗА ПРИМЕРА ИЗ ПРАКСЕ	147
SYNTAXO: ИНТЕРАКТИВНО И ИГРАМА ПОДСТАКНУТО УЧЕЊЕ СИНТАКСЕ ПРОГРАМСКИХ ЈЕЗИКА	149
ВИЗУАЛИЗАЦИЈА АПСТРАКТНОГ КРОЗ ЕТНО МОТИВЕ	151
Индекс аутора.....	154

О КОНФЕРЕНЦИЈИ

Друга конференција о настави математике и информатике (The Second Conference on Mathematics and Computer Science Teaching, ТЕМАТСОМ 2026) је национална конференција са међународним учешћем. Након изузетно успешне прве ТЕМАТСОМ 2024 конференције, која је окупила 97 предавача и донела 61 излагање, и на тај начин надмашила сва очекивања организатора, са радошћу настављамо реализацију првобитне идеје о редовном одржавању овог скупа.

Наставници и сарадници Природно-математичког факултета, а пре свега Институт за математику и информатику, као институција која више од пола века школује наставнике математике и информатике, настоје да на овај начин окупе појединце посвећене унапређивању наставне праксе. Сматрамо да је од изузетне важности повезивање истраживача у области математичког и информатичког образовања и рефлексивних практичара, ради размене научних резултата заснованих на теоријским и емпиријским истраживањима, као и примера добре праксе, како би се настава математике и информатике континуирано унапређивала на нивоу Републике Србије, региона и шире.

Званични језици конференције су српски и енглески.

Одабрани радови у целости, након процеса рецензирања, биће објављени у часопису *Journal of Educational Studies in Mathematics and Computer Science (JESMAC)* чији је издавач Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу.

Програм Конференције обухвата три пленарна предавања, као и усмена саопштења и постере организоване у оквиру две секције:

- Истраживања у настави математике и информатике,
- Школска пракса.

ОРГАНИЗАЦИЈА

Организатор конференције је Природно-математички факултет у Крагујевцу, а суорганизатор је Друштво математичара Србије – Подружница Крагујевац.



Организацију Конференције финансијски је подржало Министарство науке, технолошког развоја и иновација.



Република Србија

МИНИСТАРСТВО НАУКЕ,
ТЕХНОЛОШКОГ РАЗВОЈА И ИНОВАЦИЈА

НАУЧНИ ОДБОР

Проф. др Бранислав Поповић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Проф. др Марија Станић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Проф. др Зорана Лужанин, Природно-математички факултет,
Универзитет у Новом Саду, НОВИ САД, СРБИЈА

Проф. др Јасмина Милинковић, Факултет за образовање учитеља и
васпитача, Универзитет у Београду, БЕОГРАД, СРБИЈА

Проф. др Небојша Икодиновић, Математички факултет, Универзитет у
Београду, БЕОГРАД, СРБИЈА

Проф. др Мирослав Марић, Математички факултет, Универзитет у
Београду, БЕОГРАД, СРБИЈА

Проф. др Ненад Вуловић, Факултет педагошких наука, Универзитет у
Крагујевцу, ЈАГОДИНА, СРБИЈА

Проф. др Бојана Боровићанин, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Проф. др Слађана Димитријевић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Проф. др Вишња Симић, Природно-математички факултет, Универзитет
у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Проф. др Сузана Алексић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Проф. др Ненад Стојановић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Др Ђорђе Баралић, Математички институт САНУ, БЕОГРАД, СРБИЈА

Доц. др Ана Капларевић Малишић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Доц. др Татјана Стојановић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Проф. др Марина Свичевић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Доц. др Александар Миленковић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Prof. David Nocar, Faculty of Education, Palacký University Olomouc,
OLOMOUC, CZECH REPUBLIC

Prof. Aslıhan Sezgin, Faculty of Arts and Sciences, Amasya University,
AMASYA, TURKEY

Prof. Tomáš Zdráhal, Faculty of Education, Palacký University Olomouc,
OLOMOUC, CZECH REPUBLIC

Ass. Prof. Kemal Akoğlu, Faculty of Education, Boğaziçi University,
ISTANBUL, TURKEY

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР

Доц. др Милица Грбовић Тирић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Проф. др Марина Свичевић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Доц. др Александар Миленковић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Др Јелена Ђорђевић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Теодора Љујић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Љубица Ђуровић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Марко Дабић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Јелена Стеванић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Немања Вучићевић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Маја Лаковић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Милица Вучићевић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Лазар Крстић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Филип Андрић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Проф. др Аница Глођовић, Природно-математички факултет,
Универзитет у Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

Миомир Ковачевић, Природно-математички факултет, Универзитет у
Крагујевцу, КРАГУЈЕВАЦ, СРБИЈА

ПЛЕНАРНА ПРЕДАВАЊА

КАДА ПРАВИЛА ЗАВАРАЈУ: КАКО РАНЕ ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈЕ ОБЛИКУЈУ ТРАЈНЕ МАТЕМАТИЧКЕ ЗАБЛУДЕ

Зорана Лужанин

Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Нови Сад,
Србија, zorana@dmi.uns.ac.rs

Овај рад разматра улогу генерализације као једног од кључних механизма математичког мишљења, али и као трајног извора заблуда током математичког образовања. Од најранијих сусрета са математичким садржајима, ученици активно изграђују знање препознајући правилности и формирајући генерализације. Међутим, када се такве генерализације примењују изван свог домена важења, оне могу довести до систематских и отпорнијих заблуда.

Полазећи од теоријских оквира који се односе на концептуално и процедурално знање, као и на процесе концептуалне промене, заблуде се не посматрају као изоловане грешке, већ као кохерентне когнитивне конструкције засноване на претходно успешном учењу. У том смислу, претерана и неодговарајућа генерализација разумеју се као природна последица тежње ученика ка доследности, једноставности и предвидљивости у математици. Посебна пажња посвећена је томе да математичка правила која су исправна у једном контексту не морају важити у ширем скупу ситуација, нарочито при преласку из једног контекста у други, на пример из рада са природним бројевима на разломке или из коначних на бесконачне процесе.

У раду се разматрају различите врсте заблуда које проистичу из преурањених и неадекватно примењених генерализација, са нагласком на обрасце мишљења који такве заблуде чине уверљивим и постојаним током времена. Уместо фокусирања на појединачне нетачне одговоре, пажња се усмерава на структуру мишљења која их подржава.

Импликације за наставу разматрају се кроз подршку концептуалној промени: експлицитно указивање на услове и границе важења генерализација, укључивање ученика у анализу контрапримера и граничних случајева, као и подстицање рефлексije о домету и структури математичких идеја. Такав приступ помера фокус са исправљања грешака на трансформацију начина мишљења који до њих доводи.

На крају, износи се став да најотпорније заблуде у математици нису последица недостатка разумевања, већ разумевања које је превише генерализовано – те да ефикасна настава мора да се бави не само оним што ученици знају, већ и тиме докле се њихово знање може генерализовати.

Кључне речи: *математички концепти, генерализација, заблуде*

WHEN PATTERNS MISLEAD: HOW EARLY GENERALIZATIONS SHAPE PERSISTENT MATHEMATICAL MISCONCEPTIONS †

Zorana Lužanin †

University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Novi Sad, Serbia,
zorana@dmi.uns.ac.rs

This paper examines the role of generalization as both a fundamental mechanism of mathematical thinking and a persistent source of misconceptions throughout mathematics education. From early encounters with mathematical ideas, learners actively construct knowledge by identifying regularities and forming generalizations. However, when such generalizations are extended beyond their domain of validity, they may give rise to systematic and resilient misconceptions.

Building perspectives from research on conceptual and procedural knowledge, as well as frameworks of conceptual change, misconceptions are understood not as isolated errors, but as coherent cognitive constructions grounded in prior successful learning. In this sense, overgeneralization and misapplied generalization are seen as natural outcomes of learners' attempts to achieve consistency, simplicity, and predictability in mathematics. Particular attention is given to the fact that mathematical rules valid in one context may not hold in a broader range of situations, especially when learners move

between contexts, such as from natural numbers to fractions or from finite to infinite processes.

The presentation examines different types of misconceptions that emerge from premature and misapplied generalizations, with a focus on the underlying reasoning patterns that make such misconceptions convincing and persistent over time. Rather than focusing on specific incorrect answers, the emphasis is placed on the structure of reasoning that supports them.

Implications for teaching are discussed in terms of supporting conceptual change: making the conditions and limits of generalizations explicit, engaging learners in examining counterexamples and boundary cases, and fostering reflection on the scope and structure of mathematical ideas. Such an approach shifts the focus from correcting errors to transforming the reasoning that produces them.

Ultimately, the talk argues that the most persistent misconceptions in mathematics are not the result of a lack of understanding, but of understanding that has been generalized too far – and that effective teaching must therefore address not only what students know, but also how far their knowledge can be generalized.

Key words: *mathematical concepts, generalization, misconceptions*+

ПОЛОЖАЈ НАСТАВЕ ПРОГРАМИРАЊА У ПРИСУСТВУ САВРЕМЕНИХ АЛАТА ВЕШТАЧКЕ ИНТЕЛИГЕНЦИЈЕ

Филип Марић

Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, Србија,
filip@matf.bg.ac.rs

Развој вештачке интелигенције и појава система попут Claude code и Codex почетком 2026. године довели су до тектонских промена у области развоја софтвера. Будућност ручног писања програмског кода у склопу професионалног развоја софтвера је прилично неизвесна и чини се да ће већину програмског кода уместо програмера у будућности писати алати вештачке интелигенције. У таквој ситуацији се поставља велико питање како организовати наставу информатике, која је у Србији од недавно обавезни предмет и у основним школама и у гимназијама, са великим фондом часова посвећеним управо вештини програмирања.

Једна могућност је просто игнорисање реалности и постојања алата вештачке интелигенције. Образовни системи умеју да буду трoми. На пример, настава математике често игнорише постојање напреднијег образовног софтвера, па чак и обичних калкулатора, настава географије

успешно игнорише постојање дигиталних мапа, а цео образовни систем често и даље инсистира на меморисању чињеница и репродуктивном знању, игноришући тако постојање интернета и веба као извора информација. Реформе устаљених образовних пракси треба спроводити опрезно, међутим, потпуно игнорисање реалности често доводи до слабе мотивације ученика. Мотивација шире популације ка учењу вештине кодирања, која објективно није једноставна, не може бити висока у ситуацији када су ученици сасвим свесни да постоје системи које исте задатке решавају са неупоредиво мање труда, а вештина кодирања престаје да буде вештина која на тржишту рада доводи до велике компаративне предности. Дакле, једна теза, коју није тешко бранити је то да настава мора да постане свесна реалности и да ученицима понуди могућност коришћења алата који омогућава постизање што бољих резултата са што мање труда.

Са друге стране, задатак образовног процеса мора бити и развој когнитивних способности ученика, критичког и алгоритамског начина размишљања и прецизног изражавања. Теза коју такође није тешко бранити је да вештина класичног програмирања управо доприноси овим циљевима и, као таква, може и треба у некој мери да остане саставни део образовања. Програмирање може бити одличан алат за продубљивање знања из других дисциплина, а нарочито из математике и физике. Управо изражавајући се конструктивно, кроз програмски код, ученици, нарочито они надарени за природне, математичке и техничке дисциплине, развијају опште компетенције које ће им помоћи у занимањима за која у овом тренутку не можемо ни да наслутимо како ће изгледати у будућности.

У времену смо, дакле, у ком је пуно неизвесности и у ком морамо да пажљиво балансирамо између супротстављених теза и приступа. Ово предавање ће покушати да кроз дискусију и низ примера покуша да понуди неке начине да свакодневна наставна пракса употреби савремену технологију, али на начин који не нарушава основне циљеве и постулате традиционалног образовања и развија опште компетенције ученика, а не само конкретне вештине.

Кључне речи: настава програмирања, вештачка интелигенција, агенти за програмирање, алгоритамско размишљање, развој когнитивних способности

THE POSITION OF PROGRAMMING EDUCATION IN THE PRESENCE OF MODERN ARTIFICIAL INTELLIGENCE TOOLS

Filip Marić

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia,
filip@matf.bg.ac.rs

The development of artificial intelligence and the emergence of systems such as Claude Code and Codex in early 2026 have led to tectonic changes in the field of software development. The future of manually written program code as part of professional software development is highly uncertain, and it seems that in the future most program codes will be written by artificial intelligence tools rather than by programmers. In such a situation, a major question arises as to how to organize the teaching of computer science, which in Serbia has recently become a compulsory subject both in primary schools and in grammar schools, with a substantial number of teaching hours devoted precisely to the skill of programming.

One possible approach is simply to ignore reality and the existence of artificial intelligence tools. Educational systems can be prone to slow change. For example, mathematics education often ignores the existence of more advanced educational software, and even ordinary calculators; geography education successfully ignores the existence of digital maps; and the entire educational system still often insists on memorizing facts and reproductive knowledge, thus ignoring the existence of the Internet and the Web as sources of information. Reforms of established educational practices should indeed be implemented cautiously; however, completely ignoring reality often leads to weak student motivation. The motivation of the wider population to learn the skill of coding, which is objectively not simple, cannot remain high in a situation where students are fully aware that there are systems capable of solving the same tasks with incomparably less effort, while the skill of coding ceases to be one that provides a major comparative advantage in the labor market. Therefore, one thesis that is not difficult to defend is that teaching must become aware of reality and offer students the opportunity to use tools that make it possible to achieve the best possible results with the least possible effort.

On the other hand, the task of the educational process must also be the development of students' cognitive abilities, critical and algorithmic thinking, and precise expression. Another thesis that is also not difficult to defend is that the skill of classical programming contributes precisely to these goals and, as such, can and should remain, to some extent, an integral part of education. Programming can be an excellent tool for deepening knowledge in other

disciplines, especially mathematics and physics. It is precisely through constructive expression, through program code, that students, particularly those gifted in natural sciences, mathematics, and technical disciplines, develop general competencies that will help them in professions whose future form we cannot even begin to foresee at this moment.

We are therefore living in a time of great uncertainty, in which we must carefully balance between opposing theses and approaches. Through discussion and a series of examples, this lecture will attempt to offer some ways in which contemporary technology can be used in everyday teaching practice, but in a manner that does not undermine the basic goals and postulates of traditional education, and that develops students' general competencies rather than only specific skills.

Key words: *programming education, artificial intelligence, agentic programming, algorithmic thinking, developing cognitive abilities* ÷

НЕИЗВЕСНОСТ КАО ПОКРЕТАЧ КРЕАТИВНОСТИ: СЛУЧАЈ МАТЕМАТИКЕ

Bharath Sriraman

Универзитет Монтана, Монтана, Сједињене Америчке Државе,
SriramanB@mso.umt.edu

У овом излагању разматра се конструкт „неизвесности“ у професионалној математици у односу на математичку креативност. Посебна пажња посвећена је схватањима врхунских математичара истраживача, такозваних „Big C“ математичара, о томе шта неизвесност значи и на који начин утиче на њихов истраживачки рад. У излагању ће бити представљени резултати четворогодишњег истраживања које је обухватило 18 математичара истраживача, који су били у самом врху својих истраживачких области. Истраживање је показало постојање дијалектике, односно напетости између: (1) логике и хеуристике (аналитичког и синтетичког), (2) преласка из улоге ученика у истраживача и из истраживача у ученика, и (3) модификовања аксиома и ограничења. Налази су такође указали да учбеници, неочекивани тренуци, спремност на ризик и заједница подршке имају кључну улогу и одликују прожимање неизвесности и математичке креативности. Схема за разумевање дијалектике неизвесности баца ново светло на до сада недовољно истражен аспект математичке креативности, а то је управо неизвесност, која је од суштинског значаја за развој математичара као истраживача, као и за напредак саме дисциплине.

Кључне речи: аксиоми, Big C креативност, дијалектика знања, математичка креативност, неизвесност

UNCERTAINTY AS A CATALYST FOR CREATIVITY: THE CASE OF MATHEMATICS

Bharath Sriraman+

University of Montana, Montana, United States,
SriramanB@mso.umt.edu

In this talk, the construct of ‘uncertainty’ in professional mathematics is investigated in relation to mathematical creativity. Specific focus is on ‘Big C’ research mathematicians’ conceptions of what uncertainty means and ways in which it influences their research. The talk will report on a 4-year study involving 18 research mathematicians who were at the forefront of their research domains. The study revealed a dialectic or tension between (1) logic versus heuristics (analytic versus synthetic), (2) learner-researcher and researcher-learner transition, (3) axiom tweaking versus constraints. The findings also indicated that textbooks, unexpected moments, risk taking, and a community of support play a crucial role and characterize the interplay of uncertainty with mathematical creativity. A schema for understanding the dialectics of uncertainty sheds new light on an hitherto unexplored aspect of mathematical creativity, namely, uncertainty, vital for the development of mathematicians as researchers in addition to the growth of their discipline.

Key words: axioms, big c – creativity, dialectics of knowledge, mathematical creativity, uncertainty

СЕКЦИЈА 1: ИСТРАЖИВАЊА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

ДА ЛИ ЈЕ НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРБИЈИ ЗРЕЛА ЗА ЗНАЧАЈНЕ СТРАТЕГИЈСКЕ ПРОМЕНЕ?

Војислав Андрић

Математички клуб „Диофант“, Ваљево, Србија, voja.andric@gmail.com

Последња значајна реформа наставе математике у Србији датира из седамдесетих година прошлог века, када су, паралелно са не баш срећним увођењем средњег усмереног образовања, у наставу математике на скоро свим нивоима уведени садржаји везани за математичку логику и скупове и када је та чињеница у приличној мери дефинисала и нови приступ настави математике.

Данас, педесет и више година касније у Србији се у настави математике није десило ништа значајно ново, сем што смо увели наставне стандарде, исходе, образовне нивое ... и гомилу других формалних иновација при чему се суштински ништа није променило, јер увођење претходно споменутих новина нико није контролисао нити су вршена

адекватна емпиријска истраживања која би показала ефекте уведених „промена“.

У међувремену су вршене повремене промене наставних програма (данас су то програми наставе и учења) који су у суштини били само пребацивање појединих садржаја из једног разреда у други и у суштинском смислу ништа нису мењали.

Али у међувремену се десила и општа технолошка револуција која је проистекла из огромних могућности савремене рачунарске технологије, а вештачка интелигенција узима замаха и у сфери математике, што није без утицаја и на наставу математике. Међународна истраживања из претходних година нам шаљу јасне сигнале да полако, али сигурно заостајемо за најбољима и све је то, чини ми се, довољан разлог да размислимо и објективно оценимо тренутно стање, али и узроке и последице.

Пре неколико месеци Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања је понудио документ под називом „Предлог Националног програма за развој и вредновање математичке писмености“. Не бих да говорим о том документу, али бих да констатујем да је проблем математичке писмености само једно од мноштва питања неопходних промена у настави математике у Србији.

Аутор не претендује на улогу арбитра, нити на располагање свеобухватним емпиријским подацима о општем стању наставе математике у Србији. Сходно томе, рад тежи избегавању категоричких закључака, фокусирајући се на анализу специфичних аспеката уместо на доношење коначних вредносних судова. Циљ саопштења је постављање питања за нас математичаре, али и за оне који брину о будућности образовања и васпитања у Србији. Можда ће нас та питања покренути да конструктивно, објективно и функционално размишљамо о будућности наставе математике у Србији и да за такво размишљање прибавимо одговарајућа, а сигуран сам, и неопходна истраживања.

Кључне речи: настава математике у Србији, образовне реформе, математичка писменост, истраживања у настави математике

IS MATHEMATICS EDUCATION IN SERBIA READY FOR SIGNIFICANT STRATEGIC CHANGES? †

Vojislav Andrić†

Mathematics Club “Diophantus”, Valjevo, Serbia, voja.andric@gmail.com

The last significant reform of mathematics education in Serbia dates back to the 1970s, when, alongside the rather unfortunate introduction of vocational secondary education, the content related to mathematical logic and set theory was introduced into mathematics teaching at almost all levels, and this fact largely defined a new approach to mathematics education.

Today, more than fifty years later, nothing substantially new has happened in mathematics teaching in Serbia, except that we have introduced educational standards, learning outcomes, educational levels, and a multitude of other formal innovations, while in essence nothing has changed, because no one has monitored the implementation of these changes, nor have adequate empirical studies been conducted to demonstrate the effects of the introduced “reforms”.

In the meantime, there have been occasional changes in the curricula (today referred to as teaching and learning programs), which essentially have amounted only to moving certain topics from one grade to another and have not changed anything in a substantive sense.

However, in the meantime, a general technological revolution has also taken place, arising from the enormous possibilities of modern computer technology, while artificial intelligence has been gaining momentum in the field of mathematics as well, which inevitably affects mathematics teaching. International studies from recent years have been sending us clear signals that we are slowly but surely falling behind the best, and all of this, it seems to me, is reason enough to reflect and objectively assess the current situation, as well as its causes and consequences.

A few months ago, the Institute for Education Quality and Evaluation offered a document entitled *Proposal for a National Program for the Development and Evaluation of Mathematical Literacy*. I do not wish to discuss that document, but I would like to note that the issue of mathematical literacy is only one among many questions concerning the necessary changes in mathematics teaching in Serbia.

The author does not claim the role of an arbiter, nor claim the possession of comprehensive empirical data on the general state of mathematics education in Serbia. Accordingly, the paper seeks to avoid categorical conclusions, focusing instead on the analysis of specific aspects rather than on making final value judgments. The aim of the presentation is to raise questions for us

mathematicians, but also for those concerned with the future of education in Serbia. Perhaps these questions will encourage us to think constructively, objectively, and functionally about the future of mathematics education in Serbia, and to obtain the appropriate, and I am sure necessary, research to support such reflection.

Key words: *mathematics education in Serbia, educational reforms, mathematical literacy, mathematics education research*

ОПТИМИЗАЦИЈА ОБРАЗОВНИХ СТРУКТУРА ПРИМЕНОМ ТОПОЛОШКОГ УРЕЂЕЊА У УСМЕРЕНИМ АЦИКЛИЧНИМ ГРАФОВИМА

Suzana Antunović

Faculty of Science, University of Split, Croatia, suzana@pmfst.hr

Усмерени ациклични графови (DAG) представљају важан алат за моделовање сложених система, укључујући образовне курикулуме и структуре предуслова. У овом раду разматра се оптимизација тополошког уређења минимизацијом растојања између чворова, што се може применити ради смањења сложености путева учења и проблема распоређивања. Ради валидације теоријских налаза, развијен је алгоритам који је тестиран на реалним мрежама курикулума. Резултати су показали високу математичку доследност, а додатно су потврђени од стране стручњака из области образовања. Поред математичког оквира, у раду се разматра и начин на који се ови увиди могу применити за поређење алгоритама распоређивања и унапређење дизајна мрежа курикулума. Повезујући теорију графова и образовање у области рачунарских наука, ово истраживање пружа основу за развој ефикаснијих педагошких активности и апроксимационих алгоритама за тешке рачунарске проблеме у образовном планирању.

Кључне речи: *усмерени ациклични графови, тополошко уређење, сложеност мреже, проблеми распоређивања, мреже курикулума*

OPTIMIZING EDUCATIONAL STRUCTURES THROUGH TOPOLOGICAL ORDERING IN DIRECTED ACYCLIC GRAPHS

Suzana Antunović

Faculty of Science, University of Split, Croatia, suzana@pmfst.hr

Directed acyclic graphs (DAGs) are essential tools for modeling complex systems, including educational curricula and prerequisite structures. This paper explores the optimization of topological ordering by minimizing distances between vertices, a process that can be used to reduce the complexity of learning paths and scheduling problems. To validate theoretical findings, an algorithm was developed and tested on real-world curriculum networks. The results showed strong mathematical consistency and were further validated by educational experts. Beyond the mathematical framework, we discuss how these insights can be applied to benchmark scheduling algorithms and improve the design of curriculum networks. By bridging graph theory and computer science education, this research provides a foundation for developing more efficient pedagogical sequences and approximation algorithms for hard computational problems in educational planning.

Key words: directed acyclic graphs, topological ordering, network complexity, scheduling problems, curriculum networks

References

- [1] S. Antunović, D. Vukičević, *Evaluating Topological Ordering in Directed Acyclic Graphs*, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 9(1), 2021, 213–223.
- [2] B. Karrer, M. Newman, *Random Graph Model for Directed Acyclic Networks*, *Physical Review E*, 80, 2009.
- [3] H. Ke, B. Liu, *Project Scheduling Problem with Stochastic Activity Duration Times*, *Applied Mathematics and Computation*, 168, 2005, 342–353.
- [4] M. J. Golin, Y. C. Leung, Y. Wang, X. Deng, *On the Complexity of Speed-Scaling with Precedence Constraints*, *Information Processing Letters*, 108(3), 2008, 142–146.
- [5] J. G. Morris, J. P. Musumeci, *Scheduling Continuous Activities with Precedence Constraints*, *Naval Research Logistics*, 48(3), 2001, 247–266.

ДИДАКТИЧКИ ИЗАЗОВИ КОНЦЕПТА НУЛЕ: ОД МЕХАНИЧКЕ РУТИНЕ ДО ЛОГИЧКОГ ЗАСНИВАЊА

Бојана Арамбашић¹, Сузана Алексић²

¹ ОШ „Петар Враголић“, Љубовија, Србија, ² Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац, Србија,
bojana.gajic14@gmail.com, suzana.aleksic@pmf.kg.ac.rs

Концепт нуле представља једну од најзахтевнијих наставних тема у основношколској математици, јер од ученика захтева истовремено поимање нуле као чувара места у позиционом систему и као специфичног елемента алгебарских структура. Ипак, педагошка пракса показује да се овом садржају често приступа површно и шаблонски, при чему се фокус ставља на памћење изолованих правила уместо на њихово суштинско логичко утемељење.

У овом раду се, на основу емпиријског истраживања спроведеног међу ученицима и наставницима, анализирају кључне концептуалне препреке које настају услед доминације механичке примене математичког апарата. Резултати указују на то да ученици успешно владају нулом у оквиру адитивних операција, али показују значајну несигурност код множења и дељења, што потврђује да се знање ослања на научене шаблоне. Кроз анализу ученичких грешака и ставова наставника, од којих већина издваја дељење нулом као највећи дидактички изазов, рад указује на неопходност промене приступа. Циљ рада је да укаже на значај математичког расуђивања кроз увођење логичких доказа и интерактивних визуелизација, чиме би се спречило стварање дубоких и трајних заблуда у разумевању појма нуле.

Кључне речи: *концепт нуле, дидактички изазови, математичко расуђивање, ученичке заблуде, операције са нулом, дигиталне симулације*

DIDACTIC CHALLENGES OF THE CONCEPT OF ZERO: FROM MECHANICAL ROUTINE TO LOGICAL FOUNDATION

Bojana Arambašić¹, Suzana Aleksić²

¹Primary School "Petar Vragolic", Ljubovija, Serbia,

²University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
bojana.gajic14@gmail.com, suzana.aleksic@pmf.kg.ac.rs

The concept of zero represents one of the most demanding teaching topics in elementary mathematics, as it requires students to simultaneously perceive zero as a placeholder in the positional system and as a specific element of algebraic structures. However, pedagogical practice reveals that this topic is often approached in a superficial and formulaic manner, with a primary focus on memorizing isolated rules rather than establishing their essential logical foundation.

Based on empirical research conducted among students and teachers, this paper analyzes key conceptual obstacles arising from the dominant mechanical application of the mathematical apparatus. The results indicate that while students successfully master zero in additive operations, they exhibit significant uncertainty regarding multiplication and division, confirming that their knowledge relies on learned patterns. Through an analysis of student errors and teacher perspectives, the majority of whom identify division by zero as the primary didactic challenge, the study highlights the necessity for a shift in approach. The objective of this paper is to emphasize the importance of mathematical reasoning through the introduction of logical proofs and interactive visualizations, aiming to prevent the development of deep-seated and lasting misconceptions in understanding the concept of zero.

Key words: concept of zero, didactic challenges, mathematical reasoning, student misconceptions, operations with zero, digital simulations

References

- [1] Б. Арамбашић, *Путовање кроз нулу: Разумевање нуле обликује математичко размишљање*, Мастер рад, Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, 2026.
- [2] H. Arsham, *Zero in Four Dimensions: Historical, Psychological, Cultural, and Logical Perspectives Contents*, Johns Hopkins University, 2014.
- [3] Љ. Петковић, М. Петковић, *Математички временлов – прилози за историју математике*, Змај, Нови Сад 2006.
- [4] Сви одобрени уџбенички комплети за математику за основну школу.

ПАСКАЛОВ ТРОУГАО КРОЗ ПРЕБРОЈАВАЊЕ

Ljiljana Arambašić¹, Bharath Sriraman², Anđa Valent³

¹University of Zagreb, Faculty of Science, Department of Mathematics, Zagreb, Croatia, ²University of Montana, Department of Mathematical Sciences, Missoula, USA, ³Zagreb University of Applied Sciences, Department of Electrical Engineering, Zagreb, Croatia, arambas@math.hr, SriramanB@mso.umt.edu, avalent@tvz.hr

У овом раду приказује се низ наставних активности у којој су будући наставници математике, кроз систематско ангажовање са моделом пребројавања путева у Паскаловом троуглу, откривали биномне идентитете, укључујући и Вандермондову формулу збира квадрата. Студенти су током две недеље напредовали од доказивања познатих идентитета до самосталног формулисања нових. Када је један студент Вандермондов идентитет назвао „лепим“ и одмах поставио питање о његовим уопштавањима, постало је јасно да је овај приступ био успешан. Налази показују да математичка креативност не произлази из изузетног талента, већ из пажљиво осмишљених искустава која скупове исхода постављају као примарне објекте истраживања, преокрећу традиционалне приступе у којима се најпре полази од формуле и чине да „мистериозни“ алгебарски резултати делују као неизбежне последице визуелне структуре.

Кључне речи: *Паскалов троугао, пребројавање путева, биномни идентитети, постављање оквира, комбинаторно резоновање*

PASCAL'S TRIANGLE THROUGH COUNTING

Ljiljana Arambašić¹, Bharath Sriraman², Anđa Valent³

¹University of Zagreb, Faculty of Science, Department of Mathematics, Zagreb, Croatia, ²University of Montana, Department of Mathematical Sciences, Missoula, USA, ³Zagreb University of Applied Sciences, Department of Electrical Engineering, Zagreb, Croatia, arambas@math.hr, SriramanB@mso.umt.edu, avalent@tvz.hr

We report on an instructional sequence where prospective mathematics teachers discovered binomial identities, including Vandermonde's sum-of-squares formula, through systematic engagement with a path-counting model of Pascal's triangle. Students progressed from proving known identities to independently formulating new ones within two weeks. When one student called Vandermonde's identity “beautiful” and immediately asked about generalizations, we knew the approach had succeeded. Our findings demonstrate that mathematical creativity emerges not from exceptional talent but through carefully sequenced experiences that position outcome sets as

primary objects of investigation, invert traditional formula-first approaches, and make “mysterious” algebraic results appear as inevitable consequences of visual structure.

Key words: *Pascal's triangle, path-counting, binomial identities, uniframing, combinatorial reasoning*

References

- [1] E. Lockwood, N. H. Wasserman, and E. S. Tillema, *A case for combinatorics: A research commentary*. Journal of Mathematical Behavior, 59:100783, 2020.
- [2] E. Lockwood. A model of students' combinatorial thinking. Journal of Mathematical Behavior, 32(2):251–265, 2013.
- [3] B. Sriraman, *Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations*. Journal of Mathematical Behavior, 23:205–222, 2004.
- [4] E. A. Silver. On mathematical problem posing, For the Learning of Mathematics, 14(1):19–28, 1994.
- [5] B. Sriraman, *Are giftedness and creativity synonyms in mathematics?* Journal of Secondary Gifted Education, 17:20–36, 2005.

15 ГОДИНА МАЈА, МЕСЕЦА МАТЕМАТИКЕ

Ђорђе Баралић

Математички институт САНУ, Београд, Србија, djbaralic@mi.sanu.ac.rs

У 2026. години, поред обележавања 80 година постојања, Математички институт САНУ обележава и 15 година националне манифестације посвећене промоцији математике „Мај, месец математике“, скраћено M^3 . Покренута на иницијативу проф. Зорана Марковића, нашег дугогодишњег директора, ова манифестација се сваке године организује у сарадњи са Центром за промоцију науке. Бројне јавне изложбе, предавања, радионице, обуке, филмске и књижевне промоције посетиле су стотине хиљада људи широм Србије. M^3 је значајно допринео подизању свести јавности о математици, информатици и њиховим применама у Србији, и представља пример добре праксе за то како истраживачи и научници могу да се повежу са јавношћу и подрже редовне наставне активности.

У овом излагању осврнућемо се на историјат M^3 , као и на изазове и перспективе за наредну деценију.

Кључне речи: M^3 , промоција математике, 15 година, добра пракса, свест јавности

15 YEARS OF MAY, MONTH OF MATHEMATICS

Dorđe Baralić

Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia, djbaralic@mi.sanu.ac.rs

In 2026, besides its 80th anniversary, the Mathematical Institute SANU celebrates 15 years of the national manifestation promoting mathematics, May, Month of Mathematics, or M^3 , for short. Started on the initiative of Prof. Zoran Marković, our long-term director, it has been organised annually in collaboration with the Centre for Science Promotion. Numerous public exhibitions, lectures, workshops, training sessions, movies and book presentations were attended by hundreds of thousands of people across Serbia. M^3 significantly contributed to raising public awareness of mathematics and computer science and their applications in Serbia, and it is an example of good practice for how researchers and scientists can engage with the public and support regular teaching activities.

In this talk, we reflect on the history of M^3 , the challenges and perspectives for the next decade.

Key words: M^3 , maths promotion, 15 years, good practice, public awareness

ВЕШТАЧКА ИНТЕЛИГЕНЦИЈА ИЗМЕЂУ ПОЕНКАРЕА И РАСЕЛА: ДИДАКТИЧКИ ИЗАЗОВИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Радослав Божић

Универзитет Едуконс, Учитељски факултет, Сремска Каменица,
Академија струковних студија Сирмијум, Сремска Митровица, Србија, rado-slav.bozic@gmail.com

Све веће присуство вештачке интелигенције (ВИ) у различитим сегментима математичког образовања донело је бројне изазове, са којима се суочавају сви актери образовног процеса. Њеним развојем долази до изражаја спор Поенкареа и Расела о природи математичког сазнања, који никада није престао да буде актуелан. Наиме, за ВИ алатке се може рећи да представљају технолошку реализацију Раселовог логицистичког становишта. Међутим, коришћење ВИ алатки, нарочито од стране ученика, своди се најчешће на израчунавање и долажење до решења, без дубљег когнитивног ангажмана. На овај начин, процес учења би могао постати механичка репродукција корака, што би се негативно одразило на способност ученика да се снађу у непознатој проблемској ситуацији. Са друге стране, бројна истраживања су показала да је, за успешно

савладавање математичког градива, пожељно да ученици самостално конструишу знање, на основу добијених информација, а вођени од стране наставника. За успешно решавање проблема, често је потребно применити математичку интуицију, у комбинацији са формалним процедурама, што је у сагласности са Поенкареовим погледом на природу математичког сазнања. Уз адекватан дидактички приступ, ВИ алатке би могле допринети развоју интуиције и критичког мишљења, уместо да буду препрека за концептуално овладавање математичким садржајима.

Кључне речи: *вештачка интелигенција, дидактички изазови, концептуално разумевање, математичка интуиција, настава математике*

ARTIFICIAL INTELLIGENCE BETWEEN POINCARÉ AND RUSSELL: DIDACTIC CHALLENGES IN MATHEMATICS TEACHING

Radoslav Božić

Educons University, Faculty of Teacher Training, Sremska Kamenica, Serbia,
Academy of Applied Studies Sirmium, Sremska Mitrovica, Serbia,
radoslav.bozic@gmail.com

The increasing presence of Artificial Intelligence (AI) in various segments of mathematics education has introduced numerous challenges faced by all stakeholders in the educational process. Its development highlights the debate between Poincaré and Russell regarding the nature of mathematical knowledge – a dispute that has never ceased to be relevant. Namely, AI tools can be described as a technological realization of Russell's logicist perspective. However, the use of AI tools, particularly by students, is most often reduced to computation and reaching solutions without deeper cognitive engagement. In this way, the learning process could become a mechanical reproduction of steps, which would negatively impact students' ability to navigate unfamiliar problem situations. On the other hand, numerous studies have shown that for the successful mastery of mathematical material, it is desirable for students to independently construct knowledge based on information received, guided by the teacher. Successful problem-solving often requires the application of mathematical intuition in combination with formal procedures, which is in accordance with Poincaré's view on the nature of mathematical knowledge. With an adequate didactic approach, AI tools could contribute to the development of intuition and critical thinking, rather than being an obstacle to the conceptual mastery of mathematical content.

Key words: *artificial intelligence, conceptual understanding, didactic challenges, mathematical intuition, mathematics education*

References

- [1] K. Kish Bar-On, M. Friedman, *A tool or a collaborator? Rethinking mathematical intuition in the age of AI*, PhilSci-Archive, 2026.
- [2] G. Heinzmann, P. Nabonnand, *Poincaré and intuitionism*, in *Philosophy of Mathematics*, M. Placek (yp.), Springer, Cham, 2021, p. 115–130.
- [3] K. R. Klement, *Russell's logicism*, in *The Palgrave Russell Handbook*, N. Griffin, B. Linsky (ed.), Palgrave Macmillan, Cham, 2022.
- [4] Y. F. Zakariya, *Artificial intelligence in mathematics education research: From topic formulation to literature search*, ResearchGate, 2025.

ГДЕ ЈЕ ГРАНИЦА?

Мина Васковић Јовановић¹, Љубица Мудрић-Станишковски¹,
Ана Станковић²

¹ Универзитет у Крагујевцу, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, Србија,

² Прва крагујевачка гимназија, Крагујевац, Србија, mina.vaskovic.jovanovic@uni.kg.ac.rs, ljubica.mudric.staniskovski@fink.rs,
ana.stankovic@prvagimnazija.edu.rs

Појам границе представља један од основних концепата математичке анализе, али и самог мисаоног оквира у коме се преплићу формални и интерпретативни аспекти. У овом раду разматра се питање „Где је граница?“ кроз математичке појмове лимеса, супремума и инфимума, као и екстремних вредности функција. Посебна пажња посвећена је разликовању достигнутих вредности (максимум и минимум) од граничних вредности, које не морају бити остварене, али одређују понашање функција и скупова. Кроз одабране примере показује се значај ограничења као услова за постојање максимума и минимума. Такође се разматра и асимптотско понашање функција, са циљем потпунијег разумевања граница. Поред формалног математичког приступа, рад укључује и интерпретативни ниво, где се наведени појмови посматрају као модели за разумевање граница у ширем контексту. Закључује се да границе не представљају само ограничења, већ и неопходан оквир за дефинисање, стабилност и оптимизацију математичких структура, као и за разумевање сложених процеса у ширем смислу.

Кључне речи: *граница, лимес, екстремна вредност*

WHERE IS THE BOUNDARY?

Mina Vasković Jovanović¹, Ljubica Mudrić-Staniškovski¹, Ana Stanković²

¹ University of Kragujevac, Faculty of Engineering, Kragujevac, Serbia

² First Grammar School of Kragujevac, Kragujevac, Serbia

mina.vaskovic.jovanovic@uni.kg.ac.rs, ljubica.mudric.staniskovski@fink.rs,

ana.stankovic@prvagimnazija.edu.rs

The concept of a boundary represents one of the fundamental ideas in mathematical analysis, as well as in the broader cognitive framework in which formal and interpretative aspects are intertwined. This paper examines the question “Where is the boundary?” through the mathematical notions of limit, supremum, and infimum, as well as extreme values of functions. Special attention is given to distinguishing between attained values (maximum and minimum) and boundary values, which do not necessarily have to be achieved, but determine the behavior of functions and sets. Through selected examples, the importance of boundedness as a condition for the existence of maxima and minima is demonstrated. The asymptotic behavior of functions is also considered, with the aim of achieving a more complete understanding of boundaries. In addition to the formal mathematical approach, the paper includes an interpretative level, where the mentioned concepts are viewed as models for understanding boundaries in a broader context. It is concluded that boundaries do not represent only limitations, but also a necessary framework for defining, stability, and optimization of mathematical structures, as well as for understanding complex processes in a wider sense.

Key words: *boundary, limit, extreme value*

References

- [1] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, С. Чукић, *Анализа са алгебром, уџбеник са збирком задатака за 3. разред Математичке гимназије*, Круг, Београд, 2018.
- [2] М. Јовановић, *Методичка збирка задатака за полагање испита из Математике са решењима и прегледом теорије за упис на техничке и природно-математичке факултете*, Београд, 2011.

ИЗАЗОВИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ У СРЕДЊОШКОЛСКОМ ОБРАЗОВАЊУ

Милица Вучићевић, Љубица Ђуровић, Ненад Стојановић

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, milica.vucicevic@pmf.kg.ac.rs, ljubica.milevic@pmf.kg.ac.rs,
nenad.stojanovic@pmf.kg.ac.rs

Математичка логика заузима посебно место у школском математичком образовању јер доприноси развоју прецизног мишљења, аргументације и разумевања математичког језика. Ипак, њено увођење у средњошколску наставу често је праћено тешкоћама које не произилазе из формалне сложености садржаја, већ из несклада између свакодневног језика и формалног језика логике. Управо то доводи до систематских грешака и снажно утиче на начин на који ученици разумеју основне логичке појмове. Циљ рада је да укаже на најчешће изазове у настави математичке логике и да се, користећи пажљиво одабране примере, анализирају типичне грешке и погрешна тумачења која се јављају код ученика. У раду се примењује аналитичко-методички приступ заснован на разматрању карактеристичних задатака и ситуација из наставне праксе. Посебна пажња посвећена је разумевању импликације, негације сложених исказа, логичког везника „или“, квантификатора, као и разликовању синтаксе и семантике. Анализа указује на то да ученици формалне логичке структуре често тумаче интуитивно, ослањајући се на обрасце свакодневног језика, што доводи до погрешног разумевања значења исказа, њихових негација и структуре доказа. Закључује се да настава математичке логике захтева пажљиво осмишљене примере, поређење свакодневног и формалног значења и постепено вођење ученика ка прецизнијем математичком мишљењу. Такав приступ може да допринесе унапређењу наставне праксе и успешнијем усвајању логичких садржаја у средњошколском образовању.

Кључне речи: *математичка логика, формални језик, логички појмови*

CHALLENGES IN TEACHING MATHEMATICAL LOGIC IN SECONDARY SCHOOLS

Milica Vučićević, Ljubica Đurović, Nenad Stojanović

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia
milica.vucicevic@pmf.kg.ac.rs, ljubica.milevic@pmf.kg.ac.rs,
nenad.stojanovic@pmf.kg.ac.rs

Mathematical logic occupies a special place in school mathematics education because it contributes to the development of precise thinking, argumentation, and the understanding of mathematical language. However, its introduction into secondary school teaching is often accompanied by difficulties that do not arise from the formal complexity of the content itself, but rather from the mismatch between everyday language and the formal language of logic. This gives rise to systematic errors and strongly affects the way students understand basic logical concepts.

The aim of this paper is to point out the most common challenges in teaching mathematical logic and, by using carefully selected examples, to analyze the typical errors and misconceptions that occur among students. The paper uses an analytical-methodological approach based on the consideration of characteristic tasks and situations from teaching practice. Special attention is devoted to the understanding of implication, the negation of complex statements, the logical connective “or”, quantifiers, as well as the distinction between syntax and semantics.

The analysis indicates that students often interpret formal logical structures intuitively, relying on patterns of everyday language, which leads to misunderstandings of the meaning of statements, their negations, and the structure of proofs. It is concluded that teaching mathematical logic requires carefully designed examples, a comparison of everyday and formal meanings, and the gradual guidance of students toward more precise mathematical thinking. Such an approach can contribute to the improvement of teaching practice and to the more successful acquisition of logical content in secondary school education.

Key words: *mathematical logic, formal language, logical concepts*

References

- [1] Н. Икодиновић, *Математика – уџбеник са збирком задатака за први разред гимназије*, Klett, Београд, 2019.
- [2] К. Дошен, *Основна логика*, Математички институт САНУ, Београд, 2008.

НОРМАТИВНО И РЕАЛНО НАСТАВНИЧКО ОПТЕРЕЋЕЊЕ

*Нада Дамљановић, Марија Ђукић, Драган Ђурчић,
Катарина Павловић, Даница Фатић, Вучеља Лекић*

Универзитет у Крагујевцу, Факултет техничких наука у Чачку, Србија
nada.damljanovic@ftn.kg.ac.rs, marija.djukic@ftn.kg.ac.rs, dragan.djurcic@ftn.kg.ac.rs,
katarina.pavlovic@ftn.kg.ac.rs, danica.fatic@ftn.kg.ac.rs, vucelja.lekic@ftn.kg.ac.rs

Акредитационо оптерећење наставника универзитета углавном се заснива на формалном броју часова и пројектованом броју студената, при чему се занемарује стварна сложеност наставног процеса у великим групама. Оваква пракса доводи до несразмере између нормативног и реалног оптерећења, што може утицати на квалитет наставе. У раду се анализирају изазови у реализацији наставе на Факултету техничких наука у Чачку, на академским и струковним студијама, где се општеобразовни предмети изводе у великим, хетерогеним групама, док се стручни предмети реализују у мањим, профилисаним групама студената.

Кључне речи: *настава, високо образовање, акредитационо оптерећење, величина групе*

NORMATIVE AND REALISTIC TEACHING WORKLOAD

*Nada Damljanović, Marija Đukić, Dragan Đuričić,
Katarina Pavlović, Danica Fatić, Vučelja Lekić*

University of Kragujevac, Faculty of Technical Sciences in Čačak, Čačak, Serbia
nada.damljanovic@ftn.kg.ac.rs, marija.djukic@ftn.kg.ac.rs, dragan.djurcic@ftn.kg.ac.rs,
katarina.pavlovic@ftn.kg.ac.rs, danica.fatic@ftn.kg.ac.rs, vucelja.lekic@ftn.kg.ac.rs

The accreditation workload of university teachers is mainly based on the formal number of classes and the projected number of students, while ignoring the real complexity of the teaching process in large groups. This practice leads to a disproportion between the normative and real workload, which can affect the quality of teaching. The paper analyzes the challenges in the implementation of teaching at the Faculty of Technical Sciences in Čačak, in academic and vocational studies, where general education subjects are taught in large, heterogeneous groups, while vocational subjects are taught in smaller, profiled groups of students.

Key words: *teaching, higher education, accreditation workload, group size*

References

- [1] М. Албијанић, *Математика за инжењере и економисте.*, Школски сервис Гајић, Београд, 2021.
- [2] Н. Дамљановић, К. Павловић, *Математика 3*, Факултет техничких наука у Чачку, 2021.
- [3] В. Лазаревић, М. Ђукић, *Инжењерска математика*, Технички факултет у Чачку, Чачак, 2010.
- [4] А. Торгашев, Д. Ђурчић, М. Стевановић. *Предавања и вежбе из математике 2*, Технички факултет у Чачку, 2006.

НОВИ ДИДАКТИЧКИ ПРИСТУП ДЕТЕРМИНАНТАМА

Ђорђе Дугошија, Александар Савић

Универзитет у Београду, Математички факултет,
djdugosija47@gmail.com, aleks3rd@gmail.com

Детерминанта квадратне матрице $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ над пољем F , обично се уводи помоћу експлицитне формуле

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (-1)^{\ln(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)}$$

где је S_n скуп пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, а $\ln(p)$ број инверзија у пермутацији p . Доказивање својстава детерминанти захтева одређена неелементарна комбинаторна својства пермутација. То се многим корисницима чини тешким. Експлицитна формула је такође непрактична за рачунање, јер укључује велики број операција. Због тога неки аутори (видети, на пример, [1]) уводе детерминанте помоћу одређених карактеристичних својстава. Међутим, доказ да постоји јединствена функција која их задовољава у настави се обично изоставља. Трећи приступ дефинисању детерминанти јесте рекурзивно, по реду матрица.

У овом раду показујемо да се увођењем детерминанти рекурзивно по њиховом реду, коришћењем Лапласовог развоја по првој колони, могу на елементаран начин добити сва својства, укључујући уопштени Лапласов развој и Коши-Бинеову формулу, на начин погодан за наставу. Једино потребно предзнање јесу математичка индукција и једноставна својства коначних сума. Овај приступ може бити веома користан у основним универзитетским курсевима.

Кључне речи: *детерминанте, Лапласов развој, Коши-Бинеова формула*

A NEW DIDACTICAL APPROACH ON DETERMINANTS

Djordje Dugošija, Aleksandar Savić

University of Belgrade, Faculty of Mathematics,
djdugosija47@gmail.com, aleks3rd@gmail.com

Determinant as function of quadratic matrices $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ over a field F are usually introduced using explicit formula

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (-1)^{\ln(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)}$$

where S_n is a set of permutations over $\{1, 2, \dots, n\}$ and $\ln(p)$ is number of inversions in p . Proving properties of determinants demands some non-elementary combinatorial properties of permutations. That seems to be hard for many users. Certain nonformula is also unpractical for calculation, since it involves a huge number of computations. Therefore, some authors (see for instance [1]) introduced determinants using some characteristic properties. But the proof that there is a unique function which satisfies them is usually omitted in teaching. The third approach to define determinants is recursively over the order of matrices.

In this paper we show that by introducing determinants recursively in their order using Laplace expansion along the first column, one can obtain all properties, including generalized Laplace expansion and Cauchy-Binet formula, on an elementary way, suitable in teaching. The only required knowledge is mathematical induction and simple properties of finite sums. This approach can be very useful in undergraduate courses.

Key words: *determinants, Laplace expansion, Cauchy-Binet formula*

References

- [1] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, second edition, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [2] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, 4th ed., Brooks/Cole, New York, 2005.
- [3] D. Dolićanin, Dj. Dugošija, *A Note on the Generalized Laplace's Expansion and Cauchy-Binet Formula*, J. Adv. Math. Study, 9(1), 2016, 117–120.
- [4] M. Janjić, *A Note on Laplace's Expansion Theorem*, Int. J. Math. Education, 35, 2005, 696–698.
- [5] V. Averse, A. de Simone, *An Elementary Proof of Laplace's Formula on Determinants*, Int. J. Math. Education, 43, 2012, 418–420.

ВЕШТАЧКА ИНТЕЛИГЕНЦИЈА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ НА ТЕХНИЧКИМ ФАКУЛТЕТИМА: МОГУЋНОСТИ И ИЗАЗОВИ

Марија Ђукић¹, Нада Дамљановић¹, Вучеља Лекић¹, Анђела Ђукић²

¹ Универзитет у Крагујевцу, Факултет техничких наука у Чачку, Чачак, Србија,

² Универзитет Приморска, ФАМНИТ, Копер, Словенија, marija.djukic@ftn.kg.ac.rs, nada.damljanovic@ftn.kg.ac.rs, vucelja.lekic@ftn.kg.ac.rs, andjelauni@hotmail.com

У раду се истражује употреба вештачке интелигенције у настави математике на техничким факултетима, као и могућности и ограничења њене примене. Анализирају се различити облици примене АИ алата, укључујући алате засноване на генеративној вештачкој интелигенцији, интелигентне туторске системе, адаптивне системе за учење и друге облике АИ-подржаног учења. Уочене су потенцијалне предности, као што су индивидуализација учења, бржа повратна информација и додатна подршка студентима, али и изазови који се односе на тачност одговора, прекомерно ослањање на АИ алате и академски интегритет. У раду се разматра и могућност процене различитих облика примене АИ алата на основу карактеристика као што су корисност, ризик и неодређеност, чиме се добија основа за њихово поређење у контексту наставе математике.

Кључне речи: *вештачка интелигенција, настава математике, АИ-подржано учење, интелигентни туторски системи.*

ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN MATHEMATICS TEACHING AT TECHNICAL FACULTIES: POSSIBILITIES AND CHALLENGES

Marija Đukić¹, Nada Damljanić¹, Vučelja Lekić¹, Anđela Đukić²

¹ University of Kragujevac, Faculty of Technical Sciences in Čačak, Čačak, Serbia,

² University of Primorska, FAMNIT, Koper, Slovenia, marija.djukic@ftn.kg.ac.rs, nada.damljanovic@ftn.kg.ac.rs, vucelja.lekic@ftn.kg.ac.rs, andjelauni@hotmail.com

This paper investigates the use of artificial intelligence in mathematics teaching at technical faculties, as well as the possibilities and limitations of its application. Different forms of AI tool implementation are analyzed, including tools based on generative artificial intelligence, intelligent tutoring systems, adaptive learning systems, and other forms of AI-supported learning. Potential advantages are identified, such as individualized learning, faster feedback, and

additional support for students, as well as challenges related to the accuracy of responses, excessive reliance on AI tools, and academic integrity. The paper also considers the possibility of evaluating different forms of AI tool implementation based on characteristics such as usefulness, risk, and uncertainty, providing a basis for their comparison in the context of mathematics teaching.

Key words: *artificial intelligence, mathematics teaching, AI-supported learning, intelligent tutoring systems*

References

- [1] F. O. Egara, M. Mosimege, *Exploring the Integration of Artificial Intelligence-Based ChatGPT into Mathematics Instruction: Perceptions, Challenges, and Implications for Educators*, Education Sciences, vol. 14, no. 7, 2024.
- [2] M. Z. Mohamed et al., *Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Systematic Literature Review*, International Electronic Journal of Mathematics Education, vol. 17, no. 3, 2022.
- [3] B. Pepin, N. Buchholtz and U. Salinas-Hernández, *A Scoping Survey of ChatGPT in Mathematics Education*, Digital Experiences in Mathematics Education, vol. 11, 2025.
- [4] T. Son, *Intelligent Tutoring Systems in Mathematics Education: A Systematic Literature Review Using the Substitution, Augmentation, Modification, Redefinition Model*, Computers, vol. 13, no. 10, 2024.

ДОКАЗИВАЊЕ ТЕОРЕМА У ПРИРОДНОЈ ДЕДУКЦИЈИ

Гордан Ђурић, Милош Павловић, Андрија Урошевић,
Сана Стојановић-Ђурђевић, Небојша Икодиновић

Универзитет у Београду, Математички Факултет, Београд, Србија,
gordandjuric66@gmail.com, milosshark2504@gmail.com,
andrija.urosevic@matf.bg.ac.rs,
sana.stojanovic.djurdjevic@matf.bg.ac.rs, nebojsa.ikodinovic@matf.bg.ac.rs

Познати доказивачи теорема попут *Isabelle* и *Coq*-а пружају моћне механизме за формалну верификацију. Међутим, њихова висока апстракција и ослањање на аутоматизоване тактике често отежавају педагошко усвајање основних принципа структуралне теорије доказа. Као одговор на овај проблем, у раду уводимо нови појам, *Natural Deduction Language (NDL)*. *NDL* дефинишемо као класу доменски специфичних језика који се ослањају на интерактивне или аутоматске доказиваче утемељене примарно на правилима природне дедукције. Као референтну имплементацију овог концепта представљамо *Theodore*, интерактивни доказивач теорема и пратећи *NDL* језик. Главна предност *Theodore* језика

лежи у његовој транспарентној, тродијелној архитектури која стриктно одваја циљ, хипотезе и кораке извођења. За разлику од комплексних система, *Theodore* захтјева од корисника експлицитну примијену правила увођења и елиминације, чиме се демистификује процес конструкције доказа. Поред строге евалуације синтаксне исправности и праћења везивања хипотеза, снага система се огледа и у његовом пратећем екосистему: интегрисаном радном окружењу (VS Code екстензија) које пружа повратне информације у реалном времену, као и механизму за аутоматско генерисање формалних *LaTeX* стабала доказа (*bussproofs*). Овакав приступ не само да олакшава усвајање и савладавање правила природне дедукције, већ представља и чврст темељ за проширења на остале значајне дедуктивне системе, као што су Генценов рачун секвената и метод таблоа. Таква проширења, посебно у правцу алгоритамске претраге доказа, имају велики значај и са теоријског и са практичног становишта.

Кључне речи: *природна дедукција, природни језик дедукције, структурална теорија доказа, везивање хипотеза, аутоматско доказивање теорема, интерактивно доказивање теорема*

PROVING THEOREMS IN NATURAL DEDUCTION

*Gordan Đurić, Miloš Pavlović, Andrija Urošević, Sana Stojanović-Đurđević,
Nebojša Ikodinović*

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia, +

gordandjuric66@gmail.com, milosshark2504@gmail.com,

andrija.urosevic@matf.bg.ac.rs,+

sana.stojanovic.djurdjovic@matf.bg.ac.rs, nebojsa.ikodinovic@matf.bg.ac.rs

Well-known theorem provers, such as Isabelle and Coq, provide powerful mechanisms for formal verification; however, their high level of abstraction and reliance on automated tactics often hinder the pedagogical acquisition of the fundamental principles of structural proof theory. To address this issue, this paper introduces a new concept: Natural Deduction Language (NDL). We define NDL as a class of domain-specific languages that rely on interactive or automated provers based primarily on the rules of natural deduction. As a reference implementation of this concept, we present Theodore, an interactive theorem prover and its accompanying NDL language. The primary advantage of the Theodore language lies in its transparent, three-part architecture that strictly separates the goal, hypotheses, and derivation steps. Unlike complex systems, Theodore requires users to explicitly apply introduction and elimination rules, thereby demystifying the process of proof

construction. Beyond rigorous syntax validation and hypothesis binding tracking, the system's strength is reflected in its supporting ecosystem: an integrated development environment (VS Code extension) providing real-time feedback, and a mechanism for the automatic generation of formal LaTeX proof trees (using the *bussproofs* package). Such an approach not only facilitates the mastery of natural deduction rules but also establishes a solid foundation for extensions to other significant deductive systems, such as Gentzen's sequent calculus and the tableau method. Such extensions, particularly in the direction of algorithmic proof search, hold great significance from both a theoretical and practical standpoint.

Key words: *natural deduction, natural deduction language, structural proof theory, hypothesis binding, automated theorem proving, interactive theorem proving*

References

- [1] S. Stojanović-Đurđević, A. Urošević, F. Marić, *Improving Mathematical Proving Skills through Interactive Theorem Proving*, Journal of Educational Studies in Mathematics and Computer Science, 4(2), 2024, 37–52.
- [2] A. Urošević, S. Stojanović-Đurđević, *Theodore – Proof Assistant for FOL*, GitHub repository.
- [3] L. C. Paulson, *Isabelle: A Generic Theorem Prover*, Lecture Notes in Computer Science, 828, Springer, 1994.
- [4] S. Buss, *Bussproofs – Proof Trees in the Style of the Sequent Calculus*, CTAN.
- [5] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen I & II*, Mathematische Zeitschrift, 39, 1934, 176–210; 1935, 405–431.

ИСТА ИДЕЈА, ДВЕ ПЕРСПЕКТИВЕ: ШТА ЗАПРАВО ЗНАМО О НЗД И НЗС?

Љубица Ђуровић, Милица Вучићевић, Ненад Стојановић

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, ljubica.milevic@pmf.kg.ac.rs, milica.vucicevic@pmf.kg.ac.rs,
nenad.stojanovic@pmf.kg.ac.rs

У раду се разматра појам највећег заједничког делиоца (НЗД) и најмањег заједничког садржаоца (НЗС) из две комплементарне перспективе: у скупу природних бројева и у прстену полинома. Иако се ради о формално истој идеји, показује се да њена интерпретација у ова два окружења није потпуно аналогна. Док је у скупу природних бројева НЗД јединствено одређен, у случају полинома то више није тако, јер су сви асоцирани полиноми (који се разликују за мултипликативну константу) равноправни кандидати. Упркос томе, у наставној литератури се често

имплицитно или експлицитно инсистира на јединствености НЗД и НЗС полинома, што доводи до методолошких недоследности. Посебан проблем настаје када се, приликом одређивања НЗД и НЗС полинома са бројчаним коефицијентима, паралелно примењују поступци из аритметике, па се рачунају НЗД и НЗС самих коефицијената. Такав приступ, иако интуитивно привлачан, није у складу са структуром полиномског прстена и може довести до погрешних закључака о јединствености и природи ових појмова. У раду се указује на потребу јасног раздвајања ових перспектива и прецизног формулисања дефиниција које уважавају алгебарска својства полинома. Додатно, разматра се могућност проширења појмова НЗД и НЗС на ниво полиномских израза, где би и нумерички коефицијенти играли суштинску улогу. Овакав приступ се показује нарочито релевантним у контексту сређивања и поједностављивања израза, где стандардна теоријска дефиниција НЗД полинома не обухвата у потпуности практичне потребе. На тај начин, рад има за циљ да укаже на разлику између формалне теорије и рачунске праксе, као и да подстакне прецизније и доследније разумевање ових основних појмова.

Кључне речи: *највећи заједнички делилац, најмањи заједнички садржалац, полиноми, јединственост*

ONE IDEA, TWO PERSPECTIVES: WHAT DO WE REALLY KNOW ABOUT THE GCD AND LCM?

Ljubica Đurović, Milica Vučićević, Nenad Stojanović

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia
ljubica.milevic@pmf.kg.ac.rs, milica.vucicevic@pmf.kg.ac.rs,
nenad.stojanovic@pmf.kg.ac.rs

This paper examines the concept of the greatest common divisor (GCD) and the least common multiple (LCM) from two complementary perspectives: within the set of natural numbers and within polynomial rings. Although the underlying idea is formally the same, its interpretation in these two settings is not fully analogous. While in the natural numbers the GCD is uniquely determined, in the case of polynomials this is no longer true, since all associate polynomials (differing by a multiplicative constant) are equally valid candidates. Nevertheless, many textbooks implicitly or explicitly insist on the uniqueness of the GCD and LCM of polynomials, which leads to methodological inconsistencies. A particular issue arises when determining the GCD and LCM of polynomials with numerical coefficients by simultaneously applying arithmetic procedures, such as computing the GCD and LCM of the

coefficients themselves. Although intuitively appealing, this approach is not consistent with the algebraic structure of polynomial rings and may result in incorrect conclusions regarding the nature and uniqueness of these concepts. The paper highlights the need to clearly distinguish between these perspectives and to formulate definitions that properly reflect the algebraic properties of polynomials. Furthermore, the paper considers a possible extension of the notions of GCD and LCM to the level of polynomial expressions, where numerical coefficients would play an essential role. This approach appears particularly relevant in the context of simplifying expressions, where the standard theoretical definition of the GCD of polynomials does not fully capture practical computational needs. In this way, the paper aims to emphasize the gap between formal theory and computational practice, and to encourage a more precise and consistent understanding of these fundamental concepts.

Key words: *GCD, LCM, polynomials, uniqueness*

References

- [1] E. J. Barbeau, *Polynomials*, Springer Science & Business Media, 2003.
- [2] Б. Шешеља, А. Тепавчевић, *Алгебра 1*, ПМФ, Нови Сад, 2004.

МОЖЕ ЛИ ВЕШТАЧКА ИНТЕЛИГЕНЦИЈА ДА ПРЕЂЕ МАГАРЕЋИ МОСТ?

Небојша Икодиновић, Сана Стојановић-Ђурђевић

Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, Србија,
nebojsa.ikodinovic@matf.bg.ac.rs, sana.stojanovic.djurdjevic@matf.bg.ac.rs

Магарећи мост је назив за чувену теорему геометрије о једнакости углова на основици једнакокраког троугла. Иако у Еуклидовим Елементима доказ ове теореме заиста прати слика која подсећа на мост, много је популарније метафоричко значење да управо ова теорема представља интелектуални изазов који тестира расуђивање и разумевање, тј. својеврсну прекретницу из нижег ка вишем расуђивању и разумевању. Кроз анализу доказа ове теореме у једном малом фрагменту геометрије биће представљен систем природне дедукције. Тај систем је иницијално створио Генцен као мост између формалног и неформалног доказивања, између аналитичке потраге за доказом и одговарајуће синтетичке реконструкције. Управо су то места на која се односе наша истраживања, и са методичког и са рачунарског аспекта, а у контексту и природне и вештачке интелигенције. Циљ предавања је да се истакну неки концептуални изазови и дају неке методолошке смернице истраживања.

Кључне речи: *еуклидска геометрија, природна дедукција*

CAN AI CROSS THE DONKEY'S BRIDGE?

Nebojša Ikodinović, Sana Stojanović-Đurđević

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia,
nebojsa.ikodinovic@matf.bg.ac.rs, sana.stojanovic.djurdjevic@matf.bg.ac.rs

The “Donkey’s Bridge” is the name of the famous theorem stating the equality of the base angles in an isosceles triangle. In addition to the fact that the proof of this theorem in Euclid’s Elements is accompanied by a diagram that indeed resembles a bridge, it is often used metaphorically to denote an intellectual challenge that tests reasoning and understanding. Through an analysis of the proof of this theorem within a small fragment of geometry, a system of natural deduction will be presented. The system was originally created by Gentzen as a bridge between formal and informal reasoning, between the analytic search for the proof and the corresponding synthetic reconstruction. These are precisely the points addressed by our research, both from a methodological and computational perspective, in the context of both natural and artificial intelligence.

Key words: *Euclidean geometry, natural deduction*

References

- [1] Д. Хилберт, *Основе геометрије*, превод Ж. Гарашанин, Математички институт, Београд 1957.
- [2] J. Hintikka, *On Creativity in Reasoning*, in A. E. Andersson, N.E. Sahlin, eds., *The Complexity of Creativity*, Synthese Library, vol 258. Springer, 1997.
- [3] Н. Икодиновић, *Увод у математичку логику*, Математички факултет, Београд, 2023.

АДАПТИВНО УЧЕЊЕ У STEM ОБРАЗОВАЊУ ЗАСНОВАНО НА ВЕШТАЧКОЈ ИНТЕЛИГЕНЦИЈИ: ПЕРЦЕПЦИЈЕ СТУДЕНАТА О ИНТЕЛИГЕНТНОМ ТУТОРСКОМ СИСТЕМУ ALEKS

Јелена Илић

Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Нови Сад,
Србија, ilicjelena3105@gmail.com

Област STEM образовања све се интензивније истражује, посебно у вези са развојем вештачке интелигенције. У циљу мотивисања студената и унапређивања њиховог искуства у учењу STEM садржаја, у наставној пракси све чешће се користе адаптивне технологије учења засноване на вештачкој интелигенцији.

Ова студија испитује перцепције студената о ефикасности интелигентног турског система ALEKS, са фокусом на његов утицај на учење, мотивацију и ангажованост. У истраживању је учествовало 80 студената који су попунили анкету креирану за потребе овог истраживања. Коришћен је валидиран упитник са ставкама на Ликертовој скали како би се утврдило мишљење студената о важним карактеристикама адаптивног система, као што су персонализовани путеви учења, тренутна повратна информација и прилагођавање садржаја. Deskriptivna статистичка анализа спроведена је ради утврђивања општих трендова у одговорима студената.

Резултати указују на то да студенти систем ALEKS доживљавају као користан алат за учење у STEM областима. Испитаници су навели да им је овај приступ помогао да боље разумеју градиво, подстакло их на веће ангажовање и повећао њихову мотивацију омогућавајући им да уче сопственим темпом и добијају континуирану повратну информацију. Резултати показују да флексибилна окружења за учење могу унапредити искуства студената у учењу, што потврђују подаци засновани на њиховим самопроценама. Ипак, истраживање је ограничено употребом искључиво субјективних критеријума, будући да нису коришћени објективни показатељи постигнућа (нпр. резултати стандардизованих тестова) за процену ефикасности оваквог приступа учењу. Упркос наведеном ограничењу, очекује се да ово истраживање допринесе све шириј расправи о примени техника вештачке интелигенције у процесу учења. Посебно се истиче значај перспективе студената у процени ефикасности адаптивних технологија.

Кључне речи: *вештачка интелигенција у образовању, адаптивни системи учења, ALEKS, перцепције студената, STEM образовање*

AI-DRIVEN ADAPTIVE LEARNING IN STEM EDUCATION: STUDENT PERCEPTIONS OF THE ALEKS INTELLIGENT TUTORING SYSTEM

Jelena Ilić

University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Novi Sad, Serbia,
ilicjelena3105@gmail.com

The field of STEM education is increasingly being researched, particularly in relation to the advancement of artificial intelligence. In order to motivate students and enhance their STEM learning experiences, adaptive learning technologies using artificial intelligence are increasingly being used in teaching practice.

This study examines students' perceptions of the effectiveness of the intelligent tutoring system ALEKS, focusing on its impact on learning, motivation, and engagement. The study involved 80 students who completed a survey designed for it. We used a validated questionnaire with Likert-scale items to find out what students thought about important features of the adaptive system, such as personalized learning paths, instant feedback, and content customisation. Descriptive statistical analysis was conducted to identify general trends in students' responses. The results indicate that students perceive the ALEKS system as a useful tool for learning in STEM fields. Participants reported that the method helped them better understand the material, encouraged them to engage, and increased their motivation by allowing them to set their pace and receive ongoing feedback. The results show that flexible learning settings can enhance students' learning experiences, as evidenced by self-reported data. Nonetheless, the research is limited by the usage of subjective criteria only since no objective performance indicators (e.g., standardized test results) were used to evaluate the effectiveness of the flexible learning approach. Despite the aforementioned limitation, the current study is expected to contribute to the ever-growing discussion on the implementation of AI techniques in the learning process. It specifically highlights the relevance of using the student-oriented perspective for assessing the effectiveness of the adaptive technologies in question.

Key words: artificial intelligence in education, adaptive learning systems, ALEKS, students' perceptions, STEM education

References

- [1] S. Sun, N. M. Else-Quest, L. C. Hodges, A. M. French, R. Dowling, *The effects of ALEKS on mathematics learning in K-12 and higher education: A meta-analysis*, *Investigations in Mathematics Learning* 13(3), 2021, 182–196.

- [2] J. Ilić, M. Ivanović, A. Klačnja-Milićević, *The impact of ChatGPT on student learning experience in higher STEM education: A systematic literature review*, in *2024 21st International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET)*, IEEE, 2024, 1–9.
- [3] E. Mousavinasab, N. Zarifsanaiy, S. R. NiakanKalhori, M. Rakhshan, L. Keikha, M. Ghazi Saeedi, *Intelligent tutoring systems: A systematic review of characteristics, applications, and evaluation methods*, *Interactive Learning Environments* 29(1), 2021, 142–163.
- [4] A. Ramadhan, H. L. H. S. Warnars, F. H. A. Razak, *Combining intelligent tutoring systems and gamification: A systematic literature review*, *Education and Information Technologies* 29(6), 2024, 6753–6789.
- [5] A. Létourneau, M. Deslandes Martineau, P. Charland, J. A. Karran, J. Boasen, P. M. Léger, *A systematic review of AI-driven intelligent tutoring systems (ITS) in K-12 education*, *npj Science of Learning* 10(1), 2025, 29.

СУДОКУ КАО МОСТ ИЗМЕЂУ ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА И НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ: ОД ОЈЛЕРОВИХ КВАДРАТА ДО СУЗБИЈАЊА МАТЕМАТИЧКЕ АНКСИОЗНОСТИ

Снежана Илић

Техничка школа, Младеновац, Србија, snezailic78@gmail.com

Савремена настава математике често се своди на механички рачун, што код ученика ствара отпор и тзв. „страх од грешке у рачуну“. Овај рад истражује потенцијал игре Судоку као средства за рехабилитацију математичког мишљења без притиска аритметичких операција. У првом делу, рад осветљава историјско-филозофску генезу проблема, повезујући Судоку са радовима Леонарда Ојлера о латинским квадратима као структурама реда и симетрије. Други део рада фокусира се на дидактичку примену у шестом разреду основне школе, анализирајући стратегије дедуктивног закључивања и елиминације које ученици користе током решавања. Посебан нагласак стављен је на развој метакогнитивних вештина; кроз свест о сопственом процесу размишљања, ученици добијају контролу над проблемом, што директно умањује анксиозност и мења перцепцију математике из скупа алгоритама у поље истраживања и логичког откривања. Закључује се да Судоку представља ефикасан модел за примену идеја из историје и филозофије математике у циљу мотивације и развоја позитивног става према математичкој науци.

Кључне речи: Судоку, латински квадрати, математичка анксиозност, дедуктивно мишљење, метакогниција

SUDOKU AS A BRIDGE BETWEEN LOGICAL THINKING AND MATHEMATICS TEACHING: FROM EULER'S SQUARES TO OVERCOMING MATHEMATICS ANXIETY

Snezana Ilić

Technical School, Mladenovac, Serbia, snezailic78@gmail.com

Modern mathematics education is often reduced to mechanical calculation, which creates resistance among students and a so-called “fear of calculation errors”. This paper explores the potential of Sudoku as a means to rehabilitate mathematical thinking without the pressure of arithmetic operations. In the first part, the paper illuminates the historical and philosophical genesis of the problem, linking Sudoku to Leonhard Euler’s work on Latin squares as structures of order and symmetry. The second part of the research focuses on didactic application in the sixth grade of primary school, analyzing strategies of deductive reasoning and elimination that students employ during problem-solving. A particular emphasis is placed on the development of metacognitive skills; through awareness of their own thinking process, students gain control over the problem, which directly reduces anxiety and shifts the perception of mathematics from a set of algorithms to a field of exploration and logical discovery. The paper concludes that Sudoku represents an effective model for applying ideas from the history and philosophy of mathematics to motivate students and develop a positive attitude towards mathematical science.+

Key words: Sudoku, Latin squares, mathematics anxiety, deductive reasoning, metacognition+

References

- [1] L. Euler, *Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques*, *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen* 9, 1782.
- [2] M. H. Ashcraft, *Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences*, *Current Directions in Psychological Science* 11(5), 2002, 181–185.
- [3] G. Polya, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, Princeton, 1945.
- [4] J. H. Flavell, *Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry*, *American Psychologist* 34(10), 1979, 906–911.
- [5] M. Videnović, J. Radišić, *Matematička anksioznost kod učenika*, *Nastava i vaspitanje* 60(4), 2011, 597–613.

ОЦЕЊИВАЊЕ ЗАСНОВАНО НА ПОДАЦИМА У ВИСОКОМ ОБРАЗОВАЊУ РАЧУНАРСКИХ НАУКА: ПРАЋЕЊЕ И ЕВАЛУАЦИЈА СТУДЕНТСКИХ СОФТВЕРСКИХ ПРОЈЕКТА УЗ ПРИМЕНУ ОБРАДЕ ПРИРОДНОГ ЈЕЗИКА

Милош Јоловић¹, Александар Јоксимовић¹, Петар Луковац¹,
Сава Чавошки²

¹ Универзитет у Београду, Факултет организационих наука, Београд, Србија,

² Универзитет Унион, Рачунарски факултет, Београд, Србија,
milos.jolovic@fon.bg.ac.rs, aleksandar.joksimovic@fon.bg.ac.rs,
petar.lukovac@fon.bg.ac.rs, Scavoski@raf.rs

Традиционалне методе евалуације студената не успевају да испрате динамичан развој дигиталних технологија у реалном времену. Појавом великих језичких модела, и све већим степеном аутоматизације креирања изводног кода, евалуација студената информатике постаје све већи изазов – посебно имајући у виду пребацивање когнитивног оптерећења и прекомерно ослањање студената на алате генеративне вештачке интелигенције [1] [2] [3]. Предмет истраживања се огледа у коришћењу метода машинског учења, специфично за обраду природног језика, како би се извршила анализа софтверских репозиторијума са GitHub Education платформе које студенти користе кроз редован рад на предметима Катедре за електронско пословање са Факултета организационих наука. Главни циљ овог рада је развој модела за аутоматизовану евалуацију степена разумевања софтверских пројеката код студената кроз анализу усклађености техничке документације пројекта и имплементираног изворног кода. Резултати истраживања указују на јасан степен подударности између описаних и изведених решења, при чему су значајна одступања идентификована на пројектима који сигнализирају некритичко коришћење алата генеративне вештачке интелигенције. Главни допринос рада је смањење оптерећења наставника и омогућавање континуираног праћења и евалуације рада студената. Практичне импликације огледају се у едукацији студената о алатима генеративне вештачке интелигенције, као и савесним, критичним и етичким начинима за коришћење поменутих алата.

Кључне речи: *аналитика учења, обрада природног језика, машинско учење*

DATA-DRIVEN ASSESSMENT IN COMPUTER SCIENCE HIGHER EDUCATION: MONITORING AND EVALUATION OF STUDENTS' SOFTWARE PROJECTS LEVERAGING NATURAL LANGUAGE PROCESSING

Miloš Jolović¹, Aleksandar Joksimović¹, Petar Lukovac¹, Sava Čavoški²

¹University of Belgrade, Faculty of Organizational Sciences, Belgrade, Serbia,

²Union University, School of Computing, Belgrade, Serbia,

milos.jolovic@fon.bg.ac.rs, aleksandar.joksimovic@fon.bg.ac.rs, petar.lukovac@fon.bg.ac.rs, Scavoski@raf.rs

Traditional student evaluation methods are failing to keep pace with the dynamic, real-time development of digital technologies. With the emergence of Large Language Models and the increasing automation of source code generation, assessing computer science students has become a significant challenge – particularly regarding the shift in cognitive load and students' possible overreliance on generative artificial intelligence tools [1] [2] [3]. The subject of this research involves utilizing machine learning methods, specifically Natural Language Processing (NLP), to analyze software repositories from the GitHub Education platform used by students during regular coursework at the Department of E-Business, Faculty of Organizational Sciences. The primary objective of this paper is the development of a model for the automated evaluation of students' comprehension of software projects by analyzing the consistency between technical project documentation and the implemented source code. Research results indicate a clear degree of alignment between the described and implemented solutions, while significant discrepancies were identified in projects signaling a misuse of generative AI tools. The main contribution of this work is the reduction of teacher workload and the enabling of continuous monitoring and evaluation of student performance. Practical implications are reflected in the education of students regarding generative AI tools, emphasizing conscious, critical, and ethical approaches to their utilization. ÷

Key words: *learning analytics, natural language processing, machine learning* ÷

References

- [1] M. N. Alam, M. A. Islam, M. O. A. Babiker, M. S. Siddiqui, M. Bin Amin, J. Oláh, *AI-assisted learning tools and student learning outcomes: A cognitive load theory perspective*, Computers in Human Behavior Reports 21, 2026, 100986.
- [2] L.-V. Herm, *Impact of Explainable AI on Cognitive Load: Insights from an Empirical Study*, arXiv, 2023.

- [3] C. Zhai, S. Wibowo, L. D. Li, *The effects of over-reliance on AI dialogue systems on students' cognitive abilities: a systematic review*, Smart Learning Environments 11(1), 2024.

ОД ДИЈАЛОГА ИЗМЕЂУ СТУДЕНТА И LLM-А ДО АНАЛИТИКЕ УЧЕЊА: УНАПРЕЂЕЊЕ SPARK_AI КРОЗ ОКВИР ЗА АНАЛИТИКУ ИНТЕРАКЦИЈЕ

Марија Каплар, Себастијан Каплар

Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, Србија,
marija.kaplar@uns.ac.rs, kaplar@uns.ac.rs

SPARK_AI (Socratic-Polya Adaptive Reasoning Kit) представља платформу за учење уз подршку вештачке интелигенције реализовану кроз четбот. За разлику од стандардних великих језичких модела, усмерених на директно давање одговора, SPARK_AI има за циљ да корисника води корак по корак кроз процес решавања проблема, подстичући резонување и рефлексiju. SPARK_AI је заснован на адаптабилној архитектури прилагодљивој различитим доменима која чува контекст и стање кроз узастопне интеракције. SPARK_AI_MATH је један од модула SPARK_AI а намењен за решавање математичких задатака који се темељи на Сократској методи и Пољиним фазама решавања проблема. У том смислу, SPARK_AI функционише не само као турско окружење, већ и као контролисана архитектура за проучавање процеса учења посредованих вештачком интелигенцијом. У овом раду предлаже се унапређење система кроз оквир за кодирање и анализу интеракције између студента и четбота. Предложени приступ трансформише забележене интеракције у структуриране педагошке податке кодирањем студентских потеза, типова грешака, облика системске подршке и исхода након интервенције. Уместо да се дијалог посматра као неструктуриран текст, овај оквир интеракцију концептуализује као низ аналитички смислених догађаја у учењу. Такво унапређење има и педагошки и истраживачки значај: наставницима може помоћи у препознавању понављајућих мисконцепција и критичних тренутака током решавања задатака, укључујући разликовање продуктивног застоја, који подстиче даље мишљење и напредак, од непродуктивног, који доводи до понављања грешака и изостанка напретка.

Кључне речи: SPARK AI, AI-подржано учење, студент-четбот интеракција, анализа процеса учења, анализа грешака

FROM STUDENT-LLM DIALOGUE TO LEARNING ANALYTICS: ENHANCING SPARK AI THROUGH AN INTERACTION ANALYTICS FRAMEWORK*

Marija Kaplar, Sebastijan Kaplar †

University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia,
marija.kaplar@uns.ac.rs, kaplar@uns.ac.rs

SPARK_AI (*Socratic-Polya Adaptive Reasoning Kit*) is an AI-supported learning platform implemented through a chatbot. Unlike standard large language models oriented toward the direct provision of answers, SPARK_AI is designed to guide users step by step through the problem-solving process, fostering reasoning and reflection. SPARK_AI is based on an adaptable architecture that can be applied across different domains and that preserves context and system state across successive interactions. SPARK_AI_MATH is one of the SPARK_AI modules (chatbots) intended for solving mathematical problems and is grounded in the Socratic method and Pólya's phases of problem solving. In this sense, SPARK_AI functions not only as a tutoring environment, but also as a controlled architecture for examining AI-mediated learning processes. This paper proposes an enhancement of the system through a framework for coding and analyzing student-chatbot interaction. The proposed approach transforms recorded interactions into structured pedagogical data by coding student moves, error types, forms of system support, and outcomes following intervention. Rather than treating dialogue as unstructured text, the framework conceptualizes interaction as a sequence of analytically meaningful learning events. Such an enhancement has both pedagogical and research significance: it can help teachers identify recurring misconceptions and critical moments during problem solving, including the distinction between productive struggle, which promotes further thinking and progress, and unproductive struggle, which leads to repeated errors and the absence of progress.

Key words: SPARK AI, AI-supported learning, student-chatbot interaction, learning analytics, error analysis

References

- [1] SPARK-AI, "SPARK-AI." Accessed: 2026. [Online]. Available: <https://www.spark-tutor.com>
- [2] M. Kaplar, S. Kaplar, M. Vučić, L. Ivanović, A. Stevanović, A. Milenković, N. Vučićević, *SPARK_AI: A Prompt-Orchestrated Architecture for Stateful, Process-Oriented Reasoning with Large Language Models*, Informatics. 2026; 13(4):63.

УЧЕЊЕ МАТЕМАТИКЕ ЗАСНОВАНО НА ИГРИ: ДИЗАЈН, ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА И ПЕРЦЕПЦИЈЕ УЧЕНИКА

Миклош Ковач¹, Горан Радојевић², Мирјана Брдар³

¹ Електротехничка школа „Михајло Пупин“, Нови Сад, Србија,

² Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, Србија, ³ Технолошки факултет Нови Сад, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, Србија, kovac.miklos@gmail.com, radojev@dmi.uns.ac.rs, mirjana.brdar@uns.ac.rs

У овом раду истражује се употреба образовне видео-игре са елементима играња улога као дидактичког средства за учење линеарних једначина и система линеарних једначина. Математички садржаји интегрисани су у интерактивно окружење засновано на наративу, у којем ученици решавају задатке као део игре, чиме се подстиче активно и контекстуализовано учење.

Приступ је заснован на принципима наставе усмерене на ученика и искуственог учења, при чему се подстичу аутономија, критичко мишљење и решавање проблема кроз непосредну повратну информацију и висок ниво ангажовања.

Поред тога, рад приказује и резултате анкете међу ученицима спроведене током примене игре. Налази пружају увид у мотивацију ученика, њихове ставове и опажену ефикасност овог приступа, подржавајући укључивање учења заснованог на игри у наставу математике.

Кључне речи: *учење засновано на игри, линеарне једначине, ангажованост ученика*

GAME-BASED MATHEMATICS LEARNING: DESIGN, IMPLEMENTATION, AND STUDENT PERCEPTIONS

Mikloš Kovač¹, Goran Radojević², Mirjana Brdar³

¹ Electrotechnical School “Mihajlo Pupin”, Novi Sad, Serbia, ² Faculty of Sciences,

University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia, ³ Faculty of Technology Novi Sad,

University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia, kovac.miklos@gmail.com,

radojev@dmi.uns.ac.rs, mirjana.brdar@uns.ac.rs

This paper investigates the use of an educational role-playing video game as a didactical tool for learning linear equations and systems of linear equations. Mathematical content is embedded within an interactive, narrative-

based environment, where students solve problems as part of the gameplay, promoting active and contextualized learning.

The approach is based on student-centered and experiential learning principles, encouraging autonomy, critical thinking, and problem-solving through immediate feedback and engagement.

In addition, the paper presents the results of student surveys conducted during the implementation of the game. The findings provide insight into students' motivation, attitudes, and perceived effectiveness of this approach, supporting the integration of game-based learning into mathematics education.

Key words: *game-based learning, linear equations, student engagement*

References

- [1] D. Bavelier, C. S. Green, A. Pouget, P. Schrater, *Brain plasticity through the life span: Learning to learn and action video games*, Annual Review of Neuroscience, 35, 2012, 391–416.
- [2] M. Kovač, M. Brdar, G. Radojev, *Integrating Role-Playing Games in High School Mathematics: An Exploratory Study on Student Engagement*, Submitted for publication, 2026.
- [3] C. Reynaldo, R. Christian, H. Hosea, A. A. S. Gunawan, *Using video games to improve capabilities in decision making and cognitive skill: A literature review*, Procedia Computer Science, 179 (1), 2021, 211–221.

ЕФИКАСНО МАТЕМАТИЧКО ДОКАЗИВАЊЕ КРОЗ КОНЦЕПТЕ И МОДЕЛЕ ИЗ ФИЗИКЕ

Милан Ковачевић¹, Damira Jantassova²

¹ Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац, Србија, ² Одсек за стране језике, Технички Универзитет Абилкас Сагинов у Караганди, Караганда, Казахстан, kovac@kg.ac.rs, damira.jantassova@gmail.com

У овом раду истражује се приступ ефикасном математичком доказивању који се заснива на употреби концепата и модела из физике. Процес доказивања посматра се као активност која се може природно уградити у контекст физичких појава познатих ученицима, чиме се апстрактне математичке структуре повезују са физичком интуицијом. Физички принципи из области статике, као што су јединственост тежишта система маса, принцип полуге и принцип замене система маса еквивалентном масом у њеном тежишту, користе се као полазне претпоставке за конструисање математичких доказа. Као илустративан пример, показује се како се наведеним физичким принципима може доказати геометријска теорема о пресеку тежишних дужи троугла у једној

тачки, при чему се тачка пресека налази на свакој тежишној дужи на две трећине њене дужине мерено од темена. На овај начин, појам тежишта троугла добија и јасно физичко тумачење, што омогућава ученицима да доказ доживе као логичну последицу општих физичких закона, а не искључиво као формалну манипулацију симболима. Као додатна илустрација предложеног приступа, у раду се разматра и доказ Питагорине теореме заснован на основним законима механике. Полазећи од услова равнотеже, геометријска релација између страница правоуглог троугла изводи се из физичких разматрања, без непосредног ослањања на класичне геометријске аргументе. Овакво формулисање доказа показује како физички закони могу послужити као концептуална основа за математичко закључивање и допринети дубљем разумевању познатих теорема.

Кључне речи: *троугао, тежишна дуж, тежиште, структурална математика, Питагорина теорема*

EFFECTIVE MATHEMATICAL PROOF THROUGH CONCEPTS AND MODELS FROM PHYSICS

Milan Kovačević¹, Damira Jantassova²

¹ University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia

² Foreign Languages Department, Abylkas Saginov Karaganda Technical University, Karaganda, Kazakhstan, kovac@kg.ac.rs, damira.jantassova@gmail.com

This paper explores an approach to effective mathematical proving based on the use of concepts and models from physics. The process of proving is viewed as an activity that can be naturally embedded in the context of physical phenomena familiar to students, thereby linking abstract mathematical structures with physical intuition. Physical principles from statics such as the uniqueness of the center of gravity of a system of masses, the lever principle, and the principle of substitution of a system of masses by an equivalent mass located at its center of gravity are employed as foundational assumptions for constructing mathematical proofs. As an illustrative example, the paper demonstrates how these physical principles can be used to prove the geometric theorem stating that the centroidal lines (medians) of a triangle intersect at a single point, and that this point lies on each median at two-thirds of its length measured from the vertex. In this way, the concept of the triangle's centroid acquires a clear physical interpretation, enabling students to perceive the proof as a logical consequence of general physics laws rather than merely as a formal manipulation of symbols. As an additional illustration of the proposed approach, the paper considers the proof of the Pythagorean theorem based on fundamental laws of mechanics. Starting from conditions of mechanical

equilibrium, the geometric relationship between the sides of a right triangle is derived from physical considerations, without direct reliance on classical geometric arguments. Such a formulation demonstrates how physical laws can serve as a conceptual foundation for mathematical reasoning and contribute to a deeper understanding of well-known theorems.

Key words: *triangle, median, centroid, structural mathematics, Pythagorean theorem*

References

- [1] A. S. Arslan, S. Arslan R. R. Skemp, *Mathematical models in physics: A study with prospective physics teacher*, Scientific Research and Essays Vol. 5 (7), 2010, 634-640.
- [2] S. Jantassova, D. Churchill, Z. Tentekbayeva and S. Aitbayeva, *STEM Language Literacy Learning in Engineering Education in Kazakhstan*, 2024, Educ. Sci., 14, 1352.
- [3] M. Savage, J. Williams, *Mechanics in action*, Cambridge University Press, 1990.

ИНТЕГРАЦИЈА EBSI ПЛАТФОРМЕ У ПРОЦЕСЕ ВЕРИФИКАЦИЈЕ НЕФОРМАЛНОГ УЧЕЊА У ВИСОКОМ ОБРАЗОВАЊУ

Душан Костић¹, Тамара Наумовић¹, Милица Симић¹, Марија Јанковић²

¹ Универзитет у Београду, Факултет организационих наука, Београд, Србија,

² Центар за истраживање и технологију Хелас, Институт за информационе технологије, Солун, Грчка, dusan.kostic@fon.bg.ac.rs, tamara.naumovic@fon.bg.ac.rs, milica.simic@fon.bg.ac.rs, jankovicm@iti.gr

У циљу превазилажења раскорака између високог образовања и потреба индустрије, евидентира се потреба за успостављањем структурираног екосистема за формализацију неформално стечених компетенција [1]. Студенти се често сусрећу са проблемом бележења и праћења личних ваннаставних достигнућа, што директно отежава доказивање њиховог искуства и стечених знања у конкурентном окружењу тржишта рада [1]. Циљ овог рада је предлагање теоријског и апликативног модела за интеграцију европске *blockchain* инфраструктуре (EBSI) у процесе високошколских установа ради дигиталне верификације неформалног образовања [2]. Методолошки приступ обухвата детаљну анализу техничких капацитета EBSI платформе ради дефинисања оквира за верификацију стечених компетенција. Упоредо са техничком анализом, спроведено је мапирање исхода неформалног учења према стандардизованим оквирима [3], чиме је постављена основа за прецизно структурирање и вредновање компетенција унутар предложеног модела. Резултати обухватају дефинисање архитектуре дигиталног екосистема и

развој прототипа EBSI-компатибилне апликације помоћу које високошколске установе користећи децентрализоване идентификаторе, издају проверљиве креденцијале за стечене компетенције студената [2]. Овакав модел омогућава трансформацију студентских ваннаставних активности у стандардизоване микрокреденцијале који су лако проверљиви од стране послодаваца [4]. Евалуација модела је спроведена кроз тестни сценарио верификације компетенција стечених током курса у оквиру летње школе на високошколској установи. На основу спроведене евалуације, закључак рада указује на то да примена модела заснованог на EBSI инфраструктури омогућава студентима пуну контролу над процесима верификације сопствених постигнућа, док из перспективе високошколских установа издавање дигиталних креденцијала представља механизам изградње и потврде поверења које произилази из њиховог институционалног легитимитета [5]. Тиме се такође подиже кредибилитет ваннаставних програма у оквиру институције и постиже се већи степен усклађености са захтевима савремене индустрије.

Кључне речи: *EBSI, blockchain, неформално учење, компетенције, високо образовање*

INTEGRATION OF THE EBSI PLATFORM INTO THE VERIFICATION PROCESSES OF NON-FORMAL LEARNING IN HIGHER EDUCATION

Dušan Kostić¹, Tamara Naumović¹, Milica Simić¹, Marija Janković²

+

¹ University of Belgrade, Faculty of Organizational Sciences, Belgrade, Serbia, ² Centre for Research and Technology Hellas, Information Technologies Institute, Thessaloniki, Greece, dušan.kostic@fon.bg.ac.rs, tamara.naumovic@fon.bg.ac.rs, milica.simic@fon.bg.ac.rs, jankovicm@iti.gr

In order to overcome the gap between higher education and the needs of industry, there is a need to establish a structured ecosystem for the formalization of non-formally acquired competencies [1]. Students often face the problem of recording and tracking personal extracurricular achievements, which directly makes it difficult to prove their experience and acquired knowledge in the competitive labor market environment [1]. The aim of this paper is to propose a theoretical and application model for the integration of the European blockchain infrastructure (EBSI) into the processes of higher education institutions for the purpose of digital verification of non-formal education [2]. The methodological approach includes a detailed analysis of the technical capacities of the EBSI platform in order to define a framework for the verification of acquired competences. In parallel with the technical analysis, a mapping of non-formal learning outcomes to standardized frameworks was

carried out [3], thereby laying the foundation for the precise structuring and assessment of competencies within the proposed model. The results include defining the architecture of the digital ecosystem and developing a prototype of an EBSI-compatible application through which higher education institutions, using decentralized identifiers, issue verifiable credentials for students' acquired competencies [2]. This model enables the transformation of students' extracurricular activities into standardized microcredentials that are easily verifiable by employers [4]. The evaluation of the model was conducted through a test scenario of verification of competencies acquired during a summer school course at a higher education institution. Based on the evaluation conducted, the conclusion of the paper indicates that the implementation of a model based on the EBSI platform allows students to have full control over the processes of verification of their own achievements, while from the perspective of higher education institutions, the issuance of digital credentials represents a mechanism for building and confirming trust that stems from their institutional legitimacy [5]. This also increases the credibility of extracurricular programs within the institution and achieves a greater degree of compliance with the requirements of modern industry.

Key words: *EBSI, blockchain, non-formal learning, competencies, higher education-*

References

- [1] *EBSI Verifiable Credentials - EBSI -*, accessed Apr. 26, 2026. [Online]. Available: <https://ec.europa.eu/digital-building-blocks/sites/spaces/EBSI/pages/600343491/EBSI+Verifiable+Credentials>
- [2] The Council of the European Union, *European approach to micro-credentials for lifelong learning and employability*, *Official Journal of the European Union*, Jun. 2022, accessed Apr. 26, 2026. [Online]. Available: [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32022H0627\(02\)](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32022H0627(02))
- [3] X. Li, R. Pu, N. Phakdeephrot, *The influence of achievement motivation on college students' employability: A chain mediation analysis of self-efficacy and academic performance*, *Frontiers in Psychology* 13, 2022, 972910.
- [4] J. J. Gish-Lieberman, A. Tawfik, J. Gatewood, *Micro-Credentials and Badges in Education: A Historical Overview*, *TechTrends* 65, 2021, 5–7.
- [5] E. Tan, E. Lerouge, J. Du Caju, D. Du Seuil, *Verification of Education Credentials on European Blockchain Services Infrastructure (EBSI): Action Research in a Cross-Border Use Case between Belgium and Italy*, *Big Data and Cognitive Computing* 7(2), 2023, 79.

ИЗАЗОВИ АКАДЕМСКОГ ИНТЕГРИТЕТА У ДИГИТАЛНОМ ДОБУ: ПРАКТИЧАН ПРИСТУП ЗА ИСПИТЕ ИЗ РАЧУНАРСТВА

Лазар Крстић

Универзитет у Крагујевцу, Природно–математички факултет, Крагујевац, Република Србија, lazar.krstic@pmf.kg.ac.rs

Варање на испитима из рачунарства који се одржавају уживо и даље представља значајан изазов, јер паметни телефони и паметни сатови омогућавају приступ спољним информацијама чак и у контролисаним условима. Ниједна појединачна мера није довољна. Ова студија предлаже практичан, вишеслојни оквир за спречавање и откривање варања на универзитетима средње величине у Европи са ограниченим ресурсима, уз нагласак на физичке контроле, дизајн испита и академски интегритет. Приступ обухвата политику испита без електронских уређаја, низак однос броја студената и дежурних наставника ($\approx 1:35$), као и дизајн испита са насумичним варијацијама унутар задатака (нпр. измењени називи променљивих, параметри или скупови података), уз више верзија испита. Такође укључује селективну усмену проверу, алате отвореног кода за откривање плагијата у програмерским задацима, анализу понашања при куцању ради уочавања аномалија које указују на копирање решења, као и изјаве о поштовању академског кодекса. Насумичност и усмене провере ограничавају сарадњу, док ограничења у вези са уређајима и надзор решавају проблем неовлашћеног приступа информацијама. Аллати за детекцију плагијата додатно јачају валидацију након испита. Резултати показују да слојевите стратегије надмашују изоловане мере. Студија закључује да институције треба да дају приоритет дизајну испита и праксама надзора, уз подршку јасних политика интегритета, како би се унапредила правичност и поузданост у образовању из области рачунарства.

Кључне речи: *академски интегритет, детекција плагијата, рачунарски испити, превенција преписивања, испитни надзор*

ACADEMIC INTEGRITY CHALLENGES IN THE DIGITAL AGE: A PRACTICAL APPROACH FOR COMPUTER SCIENCE EXAMS

Lazar Krstic

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Republic of Serbia,
lazar.krstic@pmf.kg.ac.rs

Cheating in in-person computer science exams remains a significant challenge, as smartphones and smartwatches enable access to external information even in controlled environments. No single measure is sufficient. This study proposes a practical, multi-layered framework for preventing and detecting cheating in mid-sized European universities with limited resources, emphasizing physical controls, assessment design, and academic integrity. The approach integrates device-free exam policies, low student-to-proctor ratios ($\approx 1:35$), and exam designs with randomized variations within tasks (e.g. altered variable names, parameters, or data instances), as well as multiple exam versions. It further includes selective oral verification, open-source plagiarism detection tools for programming tasks, analysis of typing behavior to detect anomalies indicative of copy-pasted solutions, and honor code statements. This integrated approach effectively reduces opportunities for cheating while remaining feasible to implement. Randomization and oral checks limit collaboration, while device restrictions and proctoring address unauthorized access to information. Plagiarism detection tools further strengthen post-exam validation. The findings demonstrate that layered strategies outperform isolated measures. The study concludes that institutions should prioritize assessment design and invigilation practices, supported by clear integrity policies, to improve fairness and reliability in computer science education.

Key words: academic integrity, plagiarism detection, computer-based exams, cheating prevention, exam proctoring

References

- [1] L. Zhao, J. Peng, X. Yang, W. Yan, S. Ke, L. D. Dong, Y. Li, J. Ma, K. Lee, *Effects of honor code reminders on university students' cheating in unproctored exams: A double-blind randomized controlled field study*, Contemporary Educational Psychology 75 (2023), 102213.
- [2] G. Rusak, L. Yan, *Unique Exams: Designing assessments for integrity and fairness*, arXiv:2009.01713, 2020.

- [3] R. Dillon, M. De Marsico, *Behavioral Biometrics for Remote Exam Integrity: Continuous Authenticity Assessment via Keystroke Dynamics*, *Procedia Computer Science* 274 (2025), 402–411.
- [4] A. Fenton, *Reconsidering the Use of Oral Exams and Assessments: An Old Way to Move Into a New Future*, *Educational Researcher* 54 (7), 2025, 430–436.
- [5] A. Migicovsky, Z. Durumeric, J. Ringenberg, J. A. Halderman, *Outsmarting Proctors with Smartwatches: A Case Study on Wearable Computing Security*, *Financial Cryptography and Data Security*, *Lecture Notes in Computer Science* 8437, Springer, Berlin, Heidelberg, 2014, 89–96.

КРИТИЧКИ ПРИЛОГ ЕЛЕМЕНТАРНОЈ НАСТАВИ ГЕОМЕТРИЈЕ

Александар Липковски

Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, Србија
aleksandar.lipkovski@matf.bg.ac.rs

Већ више од две хиљаде година се настава геометрије ослања на Еуклидове ΣΤΟΙΧΕΙΑ, од око IV века пре Христа када су написани. То је најстабилнији школски предмет у историји образовања и његов најважнији део. Од времена Платонове Академије и његовог легендарног ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ, раних средњовековних персијско-арапских превода Елемената из IX века пре Христа, употребе латинских превода са арапског из XII века у средњовековним манастирским школама и коначно у модерној ери државних школа, почев од Коменског у XVII веку.

У XX веку је настава геометрије претрпела две велике промене. „Основе геометрије“ Давида Хилберта, објављене 1899. године, у енглеском преводу Ерика Ц. Таунсенда 1902. године, обележиле су развој школских програма у првој половини века. У духу „Елемената“ уведено је дубоко и математички исправно аксиоматско утемељење еуклидске геометрије. Цитирајмо Таунсендов предговор: „Ова расправа о основним принципима геометрије није само од математичког већ и од педагошког значаја. Надајући се да ће кроз енглеско издање ови важни резултати истраживања професора Хилберта постати приступачнији студентима и наставницима геометрије који говоре енглески језик, предузео сам, уз његову дозволу, овај превод“. И заиста, била је. Курсеви геометрије на свим нивоима у свим земљама света били су засновани на овој књизи. Развој наставе геометрије пратио је ту линију све до 60-их година, када је почела последња дубока и велика промена. Главни разлог за то је увођење теорије скупова и скуповних основа у математику. Почело је приближно у исто време када и Хилбертова геометрија, Раселовом књигом „Принципи

математике“, први пут објављеном 1903. године, а кулминирало је у делу Николе Бурбакија „Елементи математике“, које је почело да се објављује 1938. године. Године 1957. један од водећих чланова Бурбакијеве групе, Жан Дједоне, прогласио је: „Геометрија је мртва. Доле троуглови!“ Околности и последице овог прогласа биће објашњене у предавању, а биће представљени и анализирани примери из српских уџбеника за основне школе. Ови догађаји су имали веома лош утицај на наставу геометрије, као и на геометријску интуицију и знање у савременим школама у Србији, као и скоро свуда у свету.

Кључне речи: почетна настава геометрије, Хилберт и Дједоне

TEACHING OF GEOMETRY: A CRITICAL APPROACH

Aleksandar Lipkovski

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia,
aleksandar.lipkovski@matf.bg.ac.rs

For more than two thousand years, the teaching of geometry has relied on Euclid's $\Sigma\text{ΤΟΙΧΕΙΑ}$, from around the 4th century BC when it was written. It is the most stable school subject in the history of education and its most important part: from the time of Plato's Academy and his legendary $\text{ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ}$, to the early medieval Persian-Arabic translations of the Elements from the 9th century BC, to the use of Latin translations from Arabic in the medieval monastery schools from the 12th century, and finally to the modern era of public schools, starting with Comenius in the 17th century.

In the 20th century, the teaching of geometry underwent two major changes. David Hilbert's "Foundations of Geometry", published in 1899 (English translation by Eric J. Townsend in 1902), marked the development of school curricula in the first half of the century. In the spirit of "Elements", a profound and mathematically sound axiomatic foundation of Euclidean geometry was introduced. Let us quote Townsend's preface: "This development and discussion of the foundation principles of geometry is not only of mathematical but of *pedagogical importance*. Hoping that through an English edition these important results of Professor Hilbert's investigation may be made more accessible to English speaking students and *teachers of geometry*, I have undertaken, with his permission, this translation." And indeed, it was. Geometry courses at all levels in all countries of the world were based on this book. The development of geometry teaching followed this line until the 1960s, when the last deep change began. The main reason for this is the introduction of set theory into mathematics, at about the same time as Hilbert's geometry,

with Russell's book "Principia Mathematica" first published in 1903, and culminated in Nicolas Bourbaki's work "Elements of Mathematics", which began to be published in 1938. In 1957, one of the leading members of Bourbaki group, Jean Dieudonne, declared: "Geometry is dead. Down with triangles!" The circumstances and consequences of this proclamation will be explained in the lecture, and examples from Serbian elementary school textbooks will be presented and analyzed. These events had a very bad impact on the teaching of geometry, as well as on geometric intuition and knowledge in contemporary schools in Serbia, as well as almost everywhere in the world.

Key words: *teaching geometry, Hilbert and Dieudonne*

References

- [1] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899.
- [2] J. Dieudonné, *New Thinking in School Mathematics. 1959 Royaumont Seminar*, Organisation for European Economic Co-operation, 1961.

ВРШЊАЧКО ОЦЕЊИВАЊЕ У ВИСОКОМ ОБРАЗОВАЊУ: ПЕРЦЕПЦИЈЕ СТУДЕНАТА И УТИЦАЈ НА УЧЕЊЕ

Јелена Матејић, Јелена Игњатовић

Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет, Ниш, Србија, jelena.matejic@pmf.edu.rs, jelena.ignjatovic@pmf.edu.rs

Вршњачко оцењивање све више добија на значају у високом образовању, нарочито у настави усмереној ка практичном раду, јер омогућава студентима да развијају критичко мишљење, рефлексiju и професионалне компетенције. Истраживање је реализовано у оквиру студентских пројеката на курсу Увод у веб програмирање. Након завршетка пројеката, спроведена је вршњачка евалуација, а сам процес је додатно испитиван путем анкетног упитника. Упитник је обухватио више аспеката: техничке и визуелне карактеристике пројеката, квалитет и садржај коментара, презентационе вештине, као и емоционалне реакције и степен рефлексивног ангажовања студената.

Резултати истраживања показују да студенти високо вреднују и примљене и дате коментаре, препознајући њихов значај за унапређење квалитета пројеката и развој евалуационих вештина. Већина испитаника је, на основу добијених повратних информација, извршила конкретне измене, што указује на практичну применљивост овог приступа. Поред тога, потврђено је да вршњачко оцењивање доприноси развоју критичког мишљења, самопоуздања и конструктивне академске комуникације.

Закључци указују да вршњачко оцењивање представља ефикасан педагошки алат који подстиче активно учење и развој метакогнитивних и професионалних вештина. Такође, указује се на могућности шире примене овог приступа у настави рачунарских наука и сродних области, уз унапређење структура и смерница за давање квалитетне повратне информације.

Кључне речи: *вршњачко оцењивање, студентски пројекти, високо образовање*

PEER ASSESSMENT IN HIGHER EDUCATION: STUDENTS' PERCEPTIONS AND IMPACT ON LEARNING

Jelena Matejić, Jelena Ignjatović

University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics, Niš, Serbia,
jelena.matejic@pmf.edu.rs, jelena.ignjatovic@pmf.edu.rs

Peer assessment is becoming increasingly significant in higher education, particularly in practice-oriented teaching, as it enables students to develop critical thinking, reflection, and professional competencies. The study was conducted within student projects in the course Introduction to Web Programming. After the completion of the projects, peer assessment was carried out, and the process itself was further examined through a survey questionnaire. The questionnaire covered multiple aspects, including technical and visual characteristics of the projects, the quality and content of feedback, presentation skills, as well as students' emotional responses and level of reflective engagement.

The results indicate that students highly value both received and provided feedback, recognizing its importance for improving project quality and developing evaluative skills. The majority of participants made concrete revisions to their projects based on the feedback received, highlighting the practical applicability of this approach. Furthermore, peer assessment was found to contribute to the development of critical thinking, self-confidence, and constructive academic communication.

The findings suggest that peer assessment represents an effective pedagogical tool that promotes active learning and the development of metacognitive and professional skills. Additionally, the results point to opportunities for broader implementation of this approach in computer science education and related fields, along with the need to further improve structures and guidelines for providing high-quality feedback.

Key words: *peer assessment, student projects, higher education*

References

- [1] J. Matejić, *Students' perceptions of peer assessment in a Web programming course: Reflections on feedback, learning, and professional improvement*, Journal of Educational Studies in Mathematics and Computer Science, 2(1), 2025, 56–66.
- [2] J. Matejić, A. Milenković, *Impact of Peer Feedback in a Web Programming Course on Students' Achievement*, International Journal of Cognitive Research in Science, Engineering and Education (IJCRSEE), 13(1), 2025, 33–49.

ИСПИТИВАЊЕ ОСПОСОБЉЕНОСТИ БУДУЋИХ УЧИТЕЉА ЗА ФОРМУЛИСАЊЕ ТЕКСТУАЛНОГ МАТЕМАТИЧКОГ ЗАДАТКА НА ОСНОВУ ДАТЕ ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Милан Миликић, Ненад Вуловић, Александра Михајловић

Универзитет у Крагујевцу, Факултет педагошких наука, Јагодина, Србија,
milic.milan@yahoo.com, vnened@gmail.com, aleksandra.mihajlovic@pefja.kg.ac.rs

За развој математичке писмености није довољно да ученици искључиво моделују проблеме задате у текстуалном облику у математичке изразе, већ и да извршавају инверзне поступке превођења математичких израза у проблемске ситуације. Овакви поступци захтевају од ученика високо развијене језичке и математичке компетенције. Зато је изузетно важно на време обучити студенте – будуће учитеље да буду спремни да овакве захтеве користе у свом будућем раду. У раду се представља истраживање чији је циљ био да се утврди степен оспособљености студената да за дате линеарне једначине формулишу одговарајуће текстуалне проблеме. Узорак истраживања чинили су студенти шест факултета на којима се образују учитељи (у Сомбору, Београду, Јагодини, Ужицу, Лепосавићу и Врању), који су у марту 2026. године попуњавали упитник доступан у електронском облику. Од испитаника се тражило да за две задате једначине формулишу текстуалне задатке примерене ученицима нижих разреда основне школе. Прикупљени подаци анализирани су према следећим критеријумима: у којој мери су испитаници математички коректно превели линеарну једначину у текстуални задатак водећи рачуна о рачунским операцијама; да ли су приликом састављања текста водили рачуна о вредностима које се јављају у једначинама и у којој мери су оне реално представљене; колико су теме о којима су писали разноврсне; као и који је степен оригиналности проблема који се јављају у текстовима задатака. Резултати анализе указују на то да будући учитељи имају потешкоћа да једначине са две рачунске операције математички коректно преведу у текстуалне проблеме, врло

често не воде рачуна о реалистичности контекста, најчешће пишу проблеме на исте теме и не теже томе да проблеми буду оригинални. На основу добијених резултата може се закључити да студенти нису у довољној мери оспособљени да, на основу датих критеријума, самостално формулишу текстуалне математичке проблеме, те би требало радити на развоју њихових кометенција када је овај аспект наставе математике у питању.

Кључне речи: *будући учитељи, линеарне једначине, текстуални математички проблеми, математичко моделовање*

EXAMINING PRE-SERVICE TEACHERS' ABILITY TO FORMULATE A MATHEMATICAL WORD PROBLEM BASED ON A GIVEN LINEAR EQUATION *

*Milan Milikić, Nenad Vulović, Aleksandra Mihajlović **

University of Kragujevac, Faculty of Education, Jagodina, Serbia,
milikic.milan@yahoo.com, vnenad@gmail.com, aleksandra.mihajlovic@pefja.kg.ac.rs

For the development of mathematical literacy, it is not sufficient for students to only model problems presented in textual form into mathematical expressions; they also need to perform inverse processes: translating mathematical expressions into problem situations. Such processes require highly developed linguistic and mathematical competencies. Therefore, it is of great importance to prepare students – future teachers – in a timely manner so that they are ready to incorporate such demands into their future practice. This paper presents a study aimed at determining the level of students' ability to formulate appropriate word problems based on given linear equations. The research sample consisted of students from six teacher education faculties (in Sombor, Belgrade, Jagodina, Užice, Leposavić, and Vranje), who completed an online questionnaire in March 2026. The participants were asked to formulate word problems suitable for lower primary school students based on two given equations. The collected data were analyzed according to the following criteria: the extent to which participants correctly translated a linear equation into a word problem while taking into account arithmetic operations; whether they considered the values appearing in the equations and the degree to which these were realistically represented; the diversity of the topics they used; and the level of originality of the problems formulated. The results indicate that future teachers experience difficulties in correctly translating equations involving two arithmetic operations into word problems. They often neglect the realism of the context, tend to construct problems on similar topics, and do not strive for originality. Based on these findings, it can be concluded that students are not

sufficiently prepared to independently formulate mathematical word problems according to the given criteria, and that greater attention should be devoted to developing their competencies in this aspect of teaching mathematics.+

Key words: *pre-service teachers, linear equations, mathematical word problems, mathematical modeling*+

References

- [1] L. Baumanns, B. Rott, *Problem-posing tasks and their influence on pre-service teachers' creative problem-posing performance and self-efficacy*. The Journal of Mathematical Behavior, 73, 2024, 101130.
- [2] L. D. Fitriana, R. Ekawati, Z. Kovács, *Perspectives on the problemposing activity by prospective teachers: A cross-national study*. Journal on Mathematics Education, 13(1), 2022, 149–172.
- [3] K. Kadir, E. Kodirun, A. L. Hadi, A. Sani, Jafar, *The ability of prospective teachers to pose contextual word problem about fractions addition*. Journal of Physics: Conference Series, 1581(012025), 2020, 1–9.
- [4] A. M. Leavy, M. Hourigan, *Posing mathematically worthwhile problems: Developing the problem posing skills of prospective teachers*. Journal of Mathematics Teacher Education, 23, 2020, 341–361.
- [5] А. Михајловић, Н. Вуловић, М. Миликић, *Постављање проблема у математичком образовању: испитивање способности будућих учитеља*, Стратегија васпитања и образовања у савременим условима, зборник радова, 2025, 521–533.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ НЕСВОЈСТВЕНИХ ИНТЕГРАЛА: АНАЛИЗА КОГНИТИВНИХ КОНФЛИКАТА УЧЕНИКА

Драгица Милинковић¹, Радослав Божић², Слађана Игњатовић¹

¹ Универзитет у Источном Сарајеву, Педагошки факултет, Бијељина, Босна и Херцеговина, ² Универзитет Едуконс, Учитељски факултет, Сремска Каменица, Нови Сад, Србија, dragica.milinkovic@pfb.ues.rs.ba, radoslav.bozic@gmail.com, sladjana.mitrovic@pfb.ues.rs.ba

Ранија истраживања указују на то да се код ученика јављају одређене потешкоће и когнитивни конфликти при израчунавању одређених интеграла, при чему се значајан део тих потешкоћа односи на несвојствене интеграле. У овом раду посебна пажња посвећена је когнитивним конфликтима који се јављају код ученика при усвајању дефиниције несвојствених интеграла и њиховом израчунавању. Узорак испитаника чинило је 20 ученика са посебним склоностима за математику, завршног разреда

гимназије „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду, који су задатке решавали у оквиру писменог задатка. Ученици су наставу похађали у складу са наставним програмом предмета Анализа са алгебром. Добијени резултати упоређени су са резултатима истраживања које су спровели Rasslan и Tall (2002). За поређење процената тачних одговора између две независне групе у првом примеру примењен је тест разлике две пропорције (two-proportion z-test), док је у другом примеру примењен Фишеров екзактни тест. Анализа резултата показала је да ученици приликом израчунавања одређеног интеграла често не проверавају да ли је подинтегрална функција дефинисана на посматраном интервалу, односно да ли је реч о несвојственом интегралу друге врсте (са коначним границама интеграције и прекидом у функцији).

Кључне речи: *когнитивни конгликти, несвојствени интеграл, одређени интеграл*

THE COMPUTATION OF IMPROPER INTEGRALS: AN ANALYSIS OF STUDENTS' COGNITIVE CONFLICTS[÷]

Dragica Milinković¹, Radoslav Božić², Slađana Ignjatović¹ ÷

¹ University of East Sarajevo, Faculty of Education, Bijeljina, Bosnia and Herzegovina,

² Faculty of Teacher Training, Educons University, Sremska Kamenica, Novi Sad, Serbia, dragica.milinkovic@pfb.ues.rs.ba, radoslav.bozic@gmail.com, sladjana.mitrovic@pfb.ues.rs.ba

Previous research indicates that students encounter certain difficulties and cognitive conflicts when computing definite integrals, a significant portion of which relate to improper integrals. This study focuses particularly on the cognitive conflicts that arise when students learn the definition of improper integrals and perform their computation. The sample consisted of 20 mathematically gifted students in the final grade of “Jovan Jovanović Zmaj” High School in Novi Sad, who completed tasks as part of a written assignment. The students followed the curriculum of the course *Analysis with Algebra*. The obtained results were compared with those from the study conducted by Rasslan and Tall (2002). To compare the percentages of correct responses between two independent student groups, a *two-proportion z-test* was applied in the first example, while *Fisher's exact test* was used in the second example. Analysis of the results showed that, when computing definite integrals, students often fail to check whether the integrand is defined on the given interval, i.e., whether the integral represents an improper integral of the second kind (with finite bounds but a discontinuity in the integrand).

Key words: *cognitive conflicts, definite integral, improper integral*[÷]

References

- [1] S. Mitrović, R. Božić & Đ. Takači, *Efficiency of blended learning of calculus content during the Covid19 crisis*. Interactive Learning Environments, 2022.
- [2] S. A. Rasslan & D. Tall, *Definitions and images for the definite integral concept*, In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psycho-logical of Mathematics Education*, PME Press, 2022.
- [3] S. Yasin & E. Tatar, *Students Difficulties with Application of Definite Integration*, *Educația Matematică* 3 (1-2), 15-27, 2007.

МОДЕЛИ БРОЈЕВНЕ ПРАВЕ КАО АЛАТИ У НАСТАВИ

Јасмина Милинковић

Универзитет у Београду, Факултет за образовање учитеља и васпитача, Београд,
Србија, milinkovic.jasmina@yahoo.com

Ова студија испитује модел бројевне праве као наставно средство у настави математике. Бројевна права је препозната у наставном програму као значајни визуелни подстицај за развој нумеричког разумевања на свим нивоима основношколског образовања. Појављује се у различитим облицима и користи се у различитим фазама образовног процеса. Примарни циљ ове студије је да се анализира како се модели бројевне праве користе у подстицању концептуалног разумевања бројева и аритметичких операција. Спроведена је квалитативна анализа садржаја одабраних уџбеника математике, са фокусом на начине на које се модели бројевне праве уводе, структурирају и користе у остваривању образовних задатака. Пажња је посвећена њиховој улози у подржавању ученичког резонувања и решавања проблема. Резултати показују да се бројевна права доминантно користи као алат у концептуализацији бројева, структурирању нумеричких односа и развијању стратегија рачунања. Као кључни модел за скупове бројева, бројевна права се постепено „попуњава“ природним бројевима и правим разломцима у млађим разредима, а затим целим бројевима и рационалним бројевима у вишим разредима основног образовања. Коришћење различитих модела бројевне праве одражава кључне принципе реалистичног математичког образовања, посебно у повезивању математичких појмова са смисленим реалистичним контекстима. Студија указује на приступе у савременим уџбеницима, наглашавајући важност сврсисходне и кохерентне употребе бројевне праве као наставног средства. Разматрају се импликације за наставну праксу и будућа истраживања, посебно у погледу утицаја на развој

математичког резонувања, флуентности извођења операција код ученика и решавања проблема.

Кључне речи: *дидактички модел, концептуализација, број, аритметичке операције, визуелизација*

NUMBER LINE MODELS AS A TOOL IN TEACHING

Jasmina Milinković

University of Belgrade, Faculty of Education, Belgrade, Serbia,
milinkovic.jasmina@yahoo.com

This study examines the number line model as an instructional tool in mathematics teaching. The number line is recognized in curriculum as a powerful didactical model that supports the development of numerical understanding across grade level. It appears in various forms and serves in diverse parts of instructions. The primary aim of this study is to analyze how the number line models are used in fostering conceptual understanding of numbers and arithmetic operations. A qualitative content analysis of selected mathematics textbooks was conducted, focusing on the ways number line models are introduced, structured, and utilized in instructional tasks. Attention was given to their role in supporting students' reasoning and problem-solving. The findings reveal that the number line is dominantly used as a tool in conceptualization of numbers, structuring numerical relationships, and guiding procedural strategies. As a key model for number sets, number line is gradually "filled in" with whole numbers and proper fractions in early grades, and integers and rational numbers in higher grades of elementary education. Usage of various number line models reflects key principles of Realistic Mathematics Education, especially in connecting mathematical concepts to meaningful contexts. The study highlights current textbook approaches, emphasizing the importance of purposeful and coherent use of the number line as a teaching tool. Implications for teaching practice and future research are discussed, particularly regarding its impact on students' mathematical reasoning, operational fluency, and problem solving.

Key words: *didactic model, conceptualization, number, arithmetic operations, visualization*

References

- [1] A. Arcavi, *The role of visual representations in the learning of mathematics*, *Educational Studies in Mathematics* 52(3), 2003, 215–241.
- [2] R. Duval, *Representation, vision, and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking*, *Basic Issues for Learning and Teaching Mathematics* 3(1), 1999, 3–26.

- [3] J. Milinković, *Visualization as a tool in teaching: Pre-service teachers competencies in visualization, in Elementary Mathematics Teaching: 30 Years of SEMT*, Oxford Academic, 2024.
- [4] R. S. Siegler, J. L. Booth, *Development of numerical estimation in young children*, *Child Development* 75(2), 2004, 428–444.
- [5] M. Van den Heuvel-Panhuizen, *The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage*, *Educational Studies in Mathematics* 54(1), 2003, 9–35.

ОРИГАМИ У НАСТАВИ ГЕОМЕТРИЈЕ У ОСНОВНОЈ И СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Дара Милојковић

Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, Србија,
dara.milojkovic@matf.bg.ac.rs

Оригами, уметност савијања папира, потекао је из традиционалне јапанске стваралачке вештине и развио се у значајан математички метод за конструисање геометријских фигура, нарочито након своје формализације у 20. веку. Његово проучавање тесно је повезано са Еуклидовим конструкцијама, покрећући важна питања о томе како се геометријски објекти могу конструисати полазећи од датих тачака и правих [1]. Оригами је значајан и за унапређивање геометрије као научне области и за побољшање наставе математичког закључивања и визуелизације.

Циљ овог рада је да се стекне дубљи увид у аксиоме оригамија и анализира њихов однос са конструкцијама лењиром и шестаром у Еуклидовој равни. Поређење ова два приступа усмерено је на алгебарску интерпретацију и једначине које их одређују. Занимљиво је приметити да се круг, као примитивни објекат у конструкцијама лењиром и шестаром, може описати искључиво помоћу правих и тачака, које чине основне примитиве оригами конструкција [2].

Добро је познато да оригами конструкције, као и конструкције лењиром и шестаром, омогућавају решавање линеарних и квадратних једначина, али и једначина вишег степена, чиме се објашњавају њихове проширене геометријске могућности [3].

Оригами стога представља снажно проширење класичних геометријских метода и може се ефикасно користити за увођење ширег спектра проблема геометријских конструкција ученицима у основном и средњем образовању.

Кључне речи: *оригами, оригами конструкције, Хузитини аксиоми*

ORIGAMI IN ELEMENTARY AND HIGH SCHOOL GEOMETRY CLASSES

Dara Milojković

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia,
dara.milojkovic@matf.bg.ac.rs

Origami, the art of paper folding, originated from a traditional Japanese creative skill and developed into a notable mathematical method for constructing geometric figures, particularly since its formalization in the 20th century. Its study is closely connected to Euclidean constructions, raising important questions about how geometric objects can be constructed from given points and lines [1]. It is relevant both for advancing the geometric field of research and improving the teaching of mathematical reasoning and visualization.

The aim of this paper is to gain deeper insight into origami axioms and analyze their relationship with ruler and compass constructions in the Euclidean plane. The comparison of the two approaches focuses on algebraic interpretation and the equations that define them. It is interesting to note that the circle, a primitive object in ruler and compass constructions, can be described solely in terms of lines and points, which constitute the fundamental primitives of origami constructions [2].

It is well known that origami constructions allow both solving linear and quadratic equations, as in ruler and compass constructions, and equations of higher degree, thereby explaining their extended geometric capabilities [3].

Origami therefore represents a powerful extension of classical geometric methods and can be effectively used to introduce a broader range of geometric construction problems to students in elementary and high school education.

Key words: *origami, origami constructions, Huzita's axioms*

References

- [1] R. Geretschläger, *Euclidean constructions and the geometry of origami*, Mathematics Magazine 68(5), 1995, 357–371.
- [2] Ben-Ari., Mordechai, *The Axioms of Origami*, In: Mathematical Surprises. Springer, Cham, 2022, 113-130.
- [3] T. C. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020

ПРЕДВИЂАЊЕ НАМЕРЕ УЧЕНИКА ГИМНАЗИЈА ДА КОРИСТЕ CHATGPT У УЧЕЊУ МАТЕМАТИКЕ

Верџа Милутиновић, Ивана Обрадовић, Сузана Ђорђевић

Универзитет у Крагујевцу, Факултет педагошких наука, Јагодина, Србија,
verica.milutinovic@pefja.kg.ac.rs, ivana.obradovic@pefja.kg.ac.rs, suzana.djordjevic@pefja.kg.ac.rs

Брзи развој генеративне вештачке интелигенције значајно мења образовну праксу, укључујући и учење математике. Циљ овог истраживања био је да се испитају фактори који предвиђају намеру ученика гимназија да користе ChatGPT у учењу математике. Истраживање је спроведено на узорку од 286 ученика гимназија у Србији. Предложени модел обухвата варијабле засноване на моделима прихватања технологије у образовању: очекивану корисност, очекивану лакоћу коришћења, олакшавајуће услове, став, унутрашњу и спољашњу мотивацију, индивидуалне захтеве учења, изазове и резерве ученика, личну иновативност и социјални утицај. Резултати вишеструке регресионе анализе показали су да модел објашњава висок проценат варијансе намере коришћења ChatGPT-а ($R^2 = 0.764$). Очекивана корисност, очекивана лакоћа коришћења, социјални утицај и лична иновативност издвојили су се као значајни директни предиктори намере коришћења ChatGPT-а у учењу математике. Додатне анализе показале су да је очекивана лакоћа коришћења пре свега објашњена ставом ученика, олакшавајућим условима и индивидуалним захтевима учења, док је очекивана корисност била условљена ставом, унутрашњом и спољашњом мотивацијом, очекиваном лакоћом коришћења и изазовима и резервама ученика. Налази истичу централну улогу очекиване корисности и очекиване лакоће коришћења, али и значај социјалног утицаја и личне иновативности у прихватању генеративних AI алата. Резултати пружају емпиријску основу за интеграцију генеративне вештачке интелигенције у наставу математике у средњем образовању.

Кључне речи: *ChatGPT, генеративна вештачка интелигенција, настава математике, ученици гимназија, прихватање технологије*

PREDICTING GRAMMAR SCHOOL STUDENTS' BEHAVIORAL INTENTION TO USE CHATGPT FOR LEARNING MATHEMATICS

Verica Milutinović, Ivana Obradović, Suzana Đorđević

University of Kragujevac, Faculty of Education, Jagodina, Serbia,
verica.milutinovic@pefja.kg.ac.rs, ivana.obradovic@pefja.kg.ac.rs,
suzana.djordjevic@pefja.kg.ac.rs

The rapid emergence of generative artificial intelligence has significantly transformed educational practices, including mathematics learning. This study examines factors that predict grammar school students' behavioral intention to use ChatGPT for learning mathematics. The research was conducted on a sample of 286 grammar school students in Serbia. The proposed model integrates constructs derived from technology acceptance research, including performance expectancy, effort expectancy, facilitating conditions, attitude, intrinsic and extrinsic motivation, individual learning demands, students' perceived challenges and reservations, personal innovativeness, and social influence. Multiple regression analysis showed that the model explains a substantial proportion of variance in students' behavioral intention ($R^2 = 0.764$). Performance expectancy, effort expectancy, social influence, and personal innovativeness emerged as significant direct predictors of students' intention to use ChatGPT for learning mathematics. Further analyses revealed that effort expectancy was primarily predicted by students' attitude, facilitating conditions, and individual learning demands. Performance expectancy was predicted by students' attitude, intrinsic and extrinsic motivation, effort expectancy, and challenges and reservations toward using ChatGPT. The findings highlight the central role of performance expectancy and effort expectancy, while also emphasizing the importance of social influence and students' personal innovativeness in the adoption of generative AI tools. The study provides empirical evidence supporting the integration of generative AI tools into secondary mathematics education.

Key words: ChatGPT, generative artificial intelligence, mathematics education, grammar school students, technology acceptance

References

- [1] E. Kasneci, K. Seßler, S. Küchemann, M. Bannert, D. Dementieva, F. Fischer, U. Gasser, G. Groh, S. Günemann, E. Hüllermeier, S. Krusche, G. Kutyniok, T. Michaeli, C. Nerdel, J. Pfeffer, O. Poquet, M. Sailer, A. Schmidt, T. Seidel, M. Stadler, J. Weller, J. Kuhn, G. Kasneci, *ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education*, Learning and Individual Differences, 103, 2023, 102274.

- [2] O. Zawacki-Richter, V. I. Marín, M. Bond, F. Gouverneur, *Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education –where are the educators?*, International Journal of Educational Technology in Higher Education, 16(1), 2019, 1-27.
- [3] V. Milutinović, S. Đorđević, I. Obradović, *Factors Shaping the Adoption of Artificial Intelligence in Education*, *Metodička teorija i praksa*, 28(1), 2025, 7–30.
- [4] V. Milutinović, *Unpacking the relationship between AI competences, intelligent ethical TPACK, and factors influencing AI adoption in pre-service teachers: A comprehensive model*, *Education and Information Technologies*, 30, 2025, 26261–26299.

ОД КОНКРЕТНОГ КА АПСТРАКТНОМ: ИНТЕГРАЦИЈА ВАН ХИЛЕОВИХ НИВОА МИШЉЕЊА И СРА ПРИСТУПА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Катарина Перовић

ОШ „Јован Јовановић Змај“, Крушевац, Србија, Katarina.perovic70@gmail.com

Савремена настава математике суочава се са изазовом како ученицима у старијим разредима основне школе објаснити одређене нове појмове. У области геометрије, традиционални аксиоматски приступ често није у складу са когнитивним развојем ученика, што доводи до површног разумевања појмова. Рад полази од Pierre van Hiele-ове теорије нивоа геометријског мишљења и Jerome Bruner-овог Concrete–Pictorial–Abstract (CPA) модела као теоријских оквира који омогућавају поступно вођење ученика од интуитивног ка формалном мишљењу, а такође више ангажују ученике и побољшавају њихову мотивацију.

Циљ рада је да прикаже одређене примере из наставне праксе, као и идеје које би могле да се искористе, а које су засноване на ова два принципа.

Резултати указују да систематско повезивање конкретних материјала, сликовних репрезентација и симболичког записа подржава прелазак ученика са нижих на више нивое геометријског мишљења и подстиче математичко резоновање. Уочено је да истовремена употреба различитих репрезентација доприноси дубљем разумевању различитих математичких концепата.

Закључује се да интеграција Ван Хилеове теорије и CPA приступа представља методички утемељен оквир за планирање наставе усмерене ка концептуалном разумевању. Импликације се односе на потребу систематске примене репрезентација у наставној пракси и усклађивање наставних стратегија са развојним нивоом ученика.

Кључне речи: Ван Хилеова теорија, CPA приступ, репрезентације, концептуално разумевање

FROM CONCRETE TO ABSTRACT: INTEGRATING VAN HIELE'S LEVELS OF THINKING AND THE CPA APPROACH IN MATHEMATICS TEACHING

Katarina Perović

Primary School "Jovan Jovanović Zmaj", Kruševac, Serbia,
Katarina.perovic70@gmail.com

Modern mathematics education faces the challenge of explaining certain new concepts to students in the older grades of primary school. In the field of geometry, the traditional axiomatic approach is often not in line with the cognitive development of students, which leads to a superficial understanding of the concepts. The paper starts from Pierre van Hiele's theory of levels of geometric thinking and Jerome Bruner's Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) model as theoretical frameworks that allow for the gradual guidance of students from intuitive to formal thinking, while also engaging students more and improving their motivation.

The aim of the paper is to present certain examples from teaching practice, as well as ideas that could be used, which are based on these two principles.

The results indicate that the systematic connection of concrete materials, pictorial representations, and symbolic notation supports students' transition from lower to higher levels of geometric thinking and encourages mathematical reasoning. It has been observed that the simultaneous use of different representations contributes to a deeper understanding of different mathematical concepts.

It is concluded that the integration of Van Hyle's theory and the CPA approach represents a methodologically sound framework for planning lessons aimed at conceptual understanding. The implications relate to the need for the systematic application of representations in teaching practice and the alignment of teaching strategies with the developmental level of students. ÷

Key words: *Van Hile's theory, CPA approach, representations, conceptual understanding* ÷

References

- [1] P. M. van Hiele, *Developing geometric thinking through activities that begin with play*, Teaching Children Mathematics 6, 1999, 310–316.

G. F. Agustin, *Concrete Pictorial Abstract (CPA) Approach in Mathematics Problem Solving*, International Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology 10(7), 2023.

МОГУЋНОСТИ ПРИМЕНЕ ЧАСОПИСА „МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ“ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ: ДИДАКТИЧКО-МЕТОДИЧКА АНАЛИЗА

Анђелка Симић Миливојевић¹, Вељко Ћировић²

¹ Гимназија „Бранислав Петронијевић“, Уб, Србија, ² Ваљевска гимназија, Ваљево, Србија, simic.andjelka@gmail.com, cirovic@gmail.com

Рад разматра могућности и значај употребе часописа „Математички лист“ као дидактичког средства у настави математике у основној школи. У оквиру савремених дидактичко-методичких приступа, који наглашавају активну улогу ученика, диференцијацију наставе и развој функционалних знања, посебна се пажња посвећује избору задатака и додатних извора за рад у настави математике. У том контексту, у овом раду се анализирају задаци за редовну наставу, конкурсни и наградни задаци, задаци са такмичења, научно-популарни текстови и математичка енигматика. Методом анализе садржаја испитују се врсте задатака, њихова методичка вредност и могућности примене у различитим облицима наставе, уз класификацију према сложености, когнитивним захтевима и потенцијалу за развој логичког, проблемског и креативног мишљења. Резултати показују да „Математички лист“ представља значајан дидактички ресурс који омогућава диференцијацију наставе, подстиче мишљење оријентисано на решавање проблема и доприноси продубљивању знања, те указују на потребу систематичније интеграције његових садржаја у редовну и додатну наставу математике.

Кључне речи: *настава математике, диференцијација наставе, проблемски задаци, функционално знање, креативно мишљење*

POSSIBILITIES FOR USING THE JOURNAL “MATEMATIČKI LIST” IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHING: A DIDACTIC- METHODOLOGICAL ANALYSIS

Anđelka Simić Milivojević¹, Veljko Ćirović²

¹Grammar school “Branislav Petronijević”, Ub, Serbia, ²Grammar school Valjevo, Valjevo, Serbia, simic.andjelka@gmail.com, cirovic@gmail.com

This paper examines the possibilities and significance of using the journal *Matematički list* as a didactic resource in primary school mathematics teaching. Within contemporary didactic and methodological approaches that emphasize the active role of students, differentiated instruction, and the development of functional knowledge, special attention is given to the selection of tasks and supplementary resources for use in mathematics teaching. In this context, the present paper analyzes tasks intended for regular classroom instruction, competition and award problems, problems from mathematical contests, popular-science texts, and mathematical puzzles. Using the method of content analysis, the paper investigates the types of tasks, their methodological value, and their potential application in various forms of teaching, with classification according to complexity, cognitive demands, and their potential to foster logical, problem-solving, and creative thinking. The results indicate that *Matematički list* represents a valuable didactic resource that supports differentiation in teaching, encourages problem-oriented thinking, and contributes to deeper understanding. They also point to the need for a more systematic integration of its content into both regular and supplementary mathematics instruction.

Key words: mathematics teaching, differentiated instruction, problem tasks, functional knowledge, creative thinking

References

- [1] Друштво математичара Србије, *Математички лист – часопис за математику и рачунарство за ученике основних школа*, Београд: Друштво математичара Србије. Доступно на: <https://dms.rs/matematicki-list/>
- [2] М. Дејић, М. Егерић, А. Михајловић, *Методика математике у разредној настави* (2. издање), Јагодина: Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, 2022.
- [3] В. Поповић, С. Димитријевић, М. Станић, А. Милenkовић, *Students' success in solving mathematical problems depending on different representations*, *The teaching of mathematics*, XXV (2), 2022, 74-92.

МУЗИЧКЕ ТОНСКЕ ЛЕСТВИЦЕ ОД ПИТАГОРЕ ДО ДАНАС

Горан Софијанић

Техничка школа, Пожега, Србија, sofijanicgoran@gmail.com

Тема овог рада је објашњење везе између математике, музике (музичке тонске лествице кроз историју, све засноване на математичким принципима), физике (фреквенција звучног таласа) и Питагорејске филозофије (у основи света је узајамни однос бројева).

Зачетник музичке теорије је познати старогрчки филозоф Питагора који је поставио филозофску идеју о *хармонији сфера*, по којој су кретања небеских тела у савршеној математичкој и музичкој хармонији, јер свако тело које се креће мора производити звук који зависи од брзине, величине и раздаљине одређеног тела. Питагорејско учење да је у основи свега број одговара музичкој теорији основаној на односу бројева.

Позни питагорејац, Архита из Таранта, значајно је унапредио Диатонску тонску лествицу, која је наследила Питагорину лествицу, увођењем три средине у музику: аритметичку, геометријску и хармонијску. Архита је остао запамћен и по томе што је бројчане односе имплементирао у обављање државничких послова због чега је био инспитација Платону.

Откриће ирационалних бројева приписује се лично Питагори, што је и њега самог узнемирило јер је довело до колизије са тврђењем да се све може изразити разломком. Имплементација ирационалних бројева доживела је свој успон управо кроз музику. Они су у основи Хроматске темпероване тонске лествице која је данас доминантно у употреби.

Рад је намењен ученицима треће године средње школе у оквиру теме Геометријски нивои (проблем интерполације). Рад може да се користи као материјал за додатну наставу, али је пре свега предлог за пројектну наставу која укључује корелацију између предмета Математика, Музичка култура, Филозофија и Физика. Као резултат ученици би могли самостално или у групама урадити следеће задатке: израчунати фреквенције свих тонова једне октаве ако знамо фреквенцију основног тона у различитим тонским лествицама; направити музички инструмент монокорд; мерити фреквенције тонова помоћу апликације на мобилном телефону и анализирати одступања у фреквенцијама у различитим лествицама; организовати дебату на тему да ли су композиција, осећај смирености код човека и правде у друштву изрази математичке пропорције или личних осећаја.

Кључне речи: *фреквенција, октава, квинта, тонска лествица*

MUSICAL SCALES FROM PYTHAGORAS TO THE PRESENT DAY

Goran Sofjanić

Technical School, Požega, Serbia, sofjanićgoran@gmail.com

The topic of this paper is the explanation of the connection between mathematics, music (musical scales throughout history, all based on mathematical principles), physics (the frequency of a sound wave), and Pythagorean philosophy (the mutual relationship of numbers lies at the foundation of the world).

The founder of music theory was the famous ancient Greek philosopher Pythagoras, who proposed the philosophical idea of the harmony of the spheres, according to which the movements of celestial bodies are in perfect mathematical and musical harmony, since every moving body must produce a sound that depends on its speed, size, and distance. The Pythagorean teaching that number is at the basis of everything corresponds to music theory founded on numerical ratios.

The later Pythagorean, Archytas of Tarentum, significantly improved the diatonic scale, which inherited Pythagoras's scale, by introducing three means into music: arithmetic, geometric, and harmonic mean. Archytas is also remembered for implementing numerical ratios in the conduct of state affairs, which is why he was an inspiration to Plato.

The discovery of irrational numbers is attributed personally to Pythagoras, and it disturbed even him, since it led to a collision with the claim that everything can be expressed as a fraction. The implementation of irrational numbers experienced its rise precisely through music. They form the basis of the chromatic tempered scale, which is predominantly in use today.

The paper is intended for third-year high school students within the topic of geometric sequences (the interpolation problem). It can be used as material for supplementary classes, but it is primarily proposed as a project-based teaching unit involving correlation among the subjects of Mathematics, Music, Philosophy, and Physics. As an outcome, students could independently or in groups complete the following tasks: calculate the frequencies of all tones within one octave if the frequency of the fundamental tone is known in different musical scales; construct a monochord musical instrument; measure tone frequencies using a mobile phone application and analyze deviations in frequencies across different scales; organize a debate on whether musical composition, a sense of calmness in human beings, and justice in society are expressions of mathematical proportion or of personal feelings.

Key words: frequency, octave, fifth, musical scale

References

- [1] M. Čanak, *Matematika i muzika: istina i lepota: Jedna zlatna harmonijska nit*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2009.
- [2] M. N. Đurić, *Filozofski spisi: Platonova akademija i njen politički rad*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1997.
- [3] R. Madarász, *Matematika i muzika*, Tangenta – časopis za matematiku i računarstvo za učenike srednjih škola, br. 61, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2010.
- [4] Z. Šikić, *Matematika i muzika*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1999.
- [5] M. Tajčević, *Osnovna teorija muzike*, Prosveta, Beograd, 1962.

РАЗУМЕВАЊЕ ИНТЕРПОЛАЦИЈЕ КОД УЧЕНИКА ТРЕЋЕГ РАЗРЕДА СРЕДЊЕ ШКОЛЕ ОБДАРЕНИХ ЗА РАЧУНАРСТВО И ИНФОРМАТИКУ

Марија Станић¹, Татјана Томовић Младеновић¹, Нина Икодиновић²,
Александра Милосављевић¹

¹ Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац, Србија, ² Прва крагујевачка гимназија, Крагујевац, Србија,
marija.stanic@pmf.kg.ac.rs, tatjana.tomovic@pmf.kg.ac.rs,
nina.ikodinovic@prvagimnazija.edu.rs, aleksandra.milosavljevic@pmf.kg.ac.rs

У овом раду представљени су резултати петогодишњег истраживања спроведеног са ученицима трећег разреда одељења за ученике обдарене за рачунарство и информатику у гимназији, у оквиру наставног предмета Примена рачунара. Истраживање се бави педагошким изазовом увођења напредних математичких појмова, конкретно интерполационог полинома, у раној фази образовања. Циљ је био да се процене како ефикасност наставних метода, тако и дубина ученичког разумевања интерполације, као и њене примене у решавању проблема из стварног живота.

Кључне речи: обдарени ученици у гимназији, интерполациони полином

COMPREHENSION OF INTERPOLATION AMONG THIRD-YEAR HIGH SCHOOL STUDENTS TALENTED IN COMPUTER SCIENCE AND INFORMATICS

*Marija Stanić¹, Tatjana Tomović Mladenović¹, Nina Ikodinović²,
Aleksandra Milosavljević¹*

¹ University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,

² First Gymnasium of Kragujevac, Kragujevac, Serbia,

marija.stanic@pmf.kg.ac.rs, tatjana.tomovic@pmf.kg.ac.rs,
nina.ikodinovic@prvagimnazija.edu.rs, aleksandra.milosavljevic@pmf.kg.ac.rs

This paper presents the outcomes of a five-year study conducted with third-grade students from class for talented students in computer science and informatics at grammar school, within the subject Application of Computers. The research addresses the pedagogical challenge of introducing advanced mathematical concepts, specifically interpolating polynomial, at an early stage of education. The aim was to evaluate both the effectiveness of instructional methods and the depth of student understanding of interpolation, as well as its applications in real-world problem solving.

Key words: *talented students at grammar school, interpolating polynomial*

References

[1] G. V. Milovanović, *Numerička analiza II deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

ИСТРАЖИВАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА ЗА ВИ И УПОТРЕБЕ АЛАТА ВИ КОД СТУДЕНАТА УЧИТЕЉСКИХ СТУДИЈА

Марко Станковић¹, Марија Тасић¹, Александар Миленковић²

¹ Универзитет у Нишу, Педагошки факултет у Врању, Врање, Србија,

² Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Србија,

Крагујевац, Србија, markos@pfvr.ni.ac.rs, marijat@pfvr.ni.ac.rs,
aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs

Брза експанзија вештачке интелигенције (ВИ) довела је до развоја бројних алата применљивих у образовном контексту, при чему истраживања указују како на њихов значајан потенцијал, тако и на постојећа ограничења. Све веће присуство ВИ у образовању покренуло је важна питања у вези са компетенцијама студената и њиховом стварном употребом ВИ алата у академском контексту. Циљ овог истраживања био

је да се испита однос између дигиталних и компетенција за ВИ код студената и њихове употребе алата ВИ у учењу. Истраживање је спроведено анкетним истраживањем на узорку од 82 студента учитељских студија у Србији. Подаци су прикупљени путем анонимног онлајн упитника. Факторском анализом издвојена су два фактора: дигиталне и компетенције за ВИ, као и употреба алата ВИ у учењу. Анализа поузданости показала је добру до високу унутрашњу конзистентност за оба фактора (Кронбах $\alpha > 0.87$), што указује на то да су коришћене скале поуздане и погодне за даљу анализу. Резултати показују да студенти процењују своје дигиталне и компетенције за ВИ као развијене, док је њихова стварна употреба алата ВИ у академском контексту знатно ређа. Ови налази указују на несклад између перципираних компетенција и стварне употребе, наглашавајући потребу за систематичнијом интеграцијом алата ВИ у образовању. Резултати имају импликације за образовну праксу, посебно у контексту подршке будућим учитељима у ефикасној примени технологија ВИ.

Кључне речи: *вештачка интелигенција, дигиталне компетенције, образовање учитеља, факторска анализа, алати ВИ*

EXPLORING AI COMPETENCIES AND THE USE OF AI TOOLS AMONG TEACHER EDUCATION STUDENTS

Marko Stanković¹, Marija Tasić¹, Aleksandar Milenković²

¹University of Niš, Pedagogical Faculty in Vranje, Vranje, Serbia,

²University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
markos@pfvr.ni.ac.rs, marijat@pfvr.ni.ac.rs, aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs

The rapid expansion of artificial intelligence (AI) has led to the development of numerous tools applicable in educational contexts, with research showing both their significant potential and their current limitations. This increasing presence of AI in education has raised important questions regarding students' competencies and their actual use of AI tools in academic contexts. The aim of this study was to examine the relationship between students' digital and AI competencies and their use of AI tools in studying. The study was conducted using a cross-sectional survey design, with a sample of 82 students enrolled in teacher education programs in Serbia. Data were collected through an anonymous online questionnaire. Factor analysis identified two dimensions: digital and AI competencies, and the use of AI tools in studying. Reliability analysis demonstrated good to high internal consistency for both factors (Cronbach's $\alpha > 0.87$), indicating that the scales used in this study were reliable and suitable for further analysis. The results showed that students perceive themselves as highly competent in digital and AI-related skills, while

their actual use of AI tools in academic contexts is considerably lower. These findings suggest a discrepancy between perceived competencies and actual use, highlighting the need for more structured integration of AI tools in education. The results have implications for educational practice, particularly in the context of supporting future teachers in the effective use of AI technologies.

Key words: *artificial intelligence, digital competencies, teacher education, factor analysis, AI tools*

References

- [1] A. M. Mohamed, T. S. Shaaban, S. H. Bakry, F. D. Guillén-Gámez, and A. Strzelecki, *Empowering the Faculty of Education Students: Applying AI's Potential for Motivating and Enhancing Learning*, *Innovative Higher Education*, 50, 2024, 587–609.
- [2] B. Klimova and M. Pikhart, *Exploring the effects of artificial intelligence on student and academic well-being in higher education: A mini-review*, *Frontiers in Psychology*, 16 (16), 2025, 1498132.
- [3] Z. Slimi, A. Benayoune, and A. E. Alemu, *Students' Perceptions of Artificial Intelligence Integration in Higher Education*, *European Journal of Educational Research*, 14 (2), 2025, 471–484.
- [4] B. Han, S. Nawaz, G. Buchanan, and D. McKay, *Students' Perceptions: Exploring the Interplay of Ethical and Pedagogical Impacts for Adopting AI in Higher Education*, *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 35 (4), 2025, 1887–1912.
- [5] D. A. Schmidt, B. Alboloushi, A. Thomas, and R. Magalhaes, *Integrating artificial intelligence in higher education: perceptions, challenges, and strategies for academic innovation*, *Computers and Education Open*, 9, 2025, 100274.

ШАХОВСКИ ПРОБЛЕМИ И ВЕШТАЧКА ИНТЕЛИГЕНЦИЈА

Татјана Станковић¹, Един Лићан²

¹ Београдска академија пословних и уметничких струковних студија, Београд, Србија, ² Четврта гимназија Илића, Сарајево, Босна и Херцеговина, tatjana.stankovic@bpa.edu.rs, lidan.edin@gmail.com

Шах као једна од најстаријих игара која развија логичко и стратегијско резонување има важну улогу у наставном процесу. Решавање шаховских проблема доприноси развоју способности сагледавања проблема са различитих аспеката, повећава креативност и развој вештина планирања [1]. Постоји седам основних шаховских вештина (визуелизација, прорачун, тактика, процена/анализа, стратегија, отварања и завршнице) [2]. Ове вештине могу допринети побољшању

когнитивних способности као што су решавање проблема, критичко размишљање и вештине планирања [3].

Експанзија вештачке интелигенције утиче и на начин приступа односно решавања проблема. У овом раду осврнућемо се на начин на који поједини алати вештачке интелигенције решавају одабране шаховске проблеме [4] и направићемо компаративну анализу њихових решења.

Кључне речи: *шаховски проблеми, алати вештачке интелигенције*

CHESS PROBLEMS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE ÷

Tatjana Stanković¹, Edin Liđan² ÷

¹ Belgrade Business and Arts Academy of Applied Studies, Belgrade, Serbia,

² Fourth Gymnasium Ilidža, Sarajevo, Bosnia and Hercegovina,

tatjana.stankovic@bpa.edu.rs, lidan.edin@gmail.com

Chess, as one of the oldest games that develops logical and strategic reasoning, plays an important role in the teaching and learning process. Solving chess problems contributes to the development of the ability to see problems from different aspects, increases creativity and the development of planning skills [1]. There are seven fundamental chess skills (visualization, calculation, tactics, evaluation/analysis, strategy, openings and endgames) [2]. These skills can contribute to improvement of cognitive skills such as problem-solving critical thinking and planning skills [3].

The expansion of artificial intelligence also affects the way of approaching and solving problems. In this paper, we will reflect on the way specific artificial intelligence tools solve selected chess problems [4] and we will make a comparative analysis of their solutions.

Key words: *chess problems, artificial intelligence tools ÷*

References

- [1] R. J. Stanborough, *The 9 Best Benefits of Playing Chess*, Healthline, 2023, <https://www.healthline.com/health/benefits-of-playing-chess>
- [2] Chessfox, *The 7 Fundamental Chess Skills*, Chessfox, 2026, <https://chessfox.com/the-7-fundamental-chess-skills/>
- [3] Divyanshu Prakash (DPPlayingChess), *The Impact of Chess on Cognitive Skills*, Chess.com, 2024, <https://www.chess.com/blog/TheChessHuddle/the-impact-of-chess-on-cognitive-skills>
- [4] K. Vincetić, D. Brajković, M. Pilj, *Matematički zadatci na šahovskoj ploči*, Osječki matematički list 18, 2018, 81-103, <https://hrcak.srce.hr/file/314102>

КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ: АПОС АНАЛИЗА КУРИКУЛУМА И ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА ИЗ СРБИЈЕ

Јелена Стеванић¹, Зорана Лужанин², Слађана Димитријевић¹

¹ Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац, Србија, ² Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Нови Сад, Србија, jelena.stevanic@pmf.kg.ac.rs, zorana@dmi.uns.ac.rs, sladjana.dimitrijevic@pmf.kg.ac.rs

Резултати међународних компаративних истраживања конзистентно указују да ученици у Србији остварују статистички значајно нижа постигнућа у домену вероватноће и рада са подацима у поређењу са вршњацима из других земаља. Овај рад има два циља. Први циљ је анализа заступљености класичне дефиниције вероватноће у наставном програму кроз призму АПОС теорије, док је други довођење налаза те анализе у везу са постигнућима ученика из Србије у домену вероватноће на TIMSS и PISA испитивањима, у поређењу са одабраним земљама које бележе виша постигнућа у овом домену.

Анализа курикулума указује да су ученици претежно изложени задацима који захтевају механичку примену формуле – што одговара нивоу Акције према АПОС теорији – са мало прилика за развој концептуалног разумевања неопходног за рад са бесконачним простором исхода или алтернативним дефиницијама вероватноће. Налази TIMSS испитивања у домену података и вероватноће, као и резултати PISA испитивања на подскали неизвесност и подаци, доводе се у директну везу са овим курикуларним ограничењима и стављају у компаративни контекст са одабраним образовним системима. На основу добијених налаза указујемо на потребу за суштинским променама у приступу настави вероватноће у Србији и истичемо потенцијал АПОС теорије као оквира за осмишљавање наставних интервенција.

Кључне речи: *класична дефиниција вероватноће, АПОС теорија, ТИМСС, ПИСА, курикуларна анализа*

CLASSICAL DEFINITION OF PROBABILITY: AN APOS ANALYSIS OF CURRICULUM AND ACHIEVEMENT OF SERBIAN STUDENTS⁺

Jelena Stevanić¹, Zorana Lužanin², Slađana Dimitrijević¹ ⁺

¹ University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,

² University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia,

jelena.stevanic@pmf.kg.ac.rs, zorana@dmi.uns.ac.rs,

sladjana.dimitrijevic@pmf.kg.ac.rs

International comparative research consistently indicates that students in Serbia achieve statistically significantly lower results in the domain of probability and data handling than their peers in other countries. This paper has two objectives. The first is to analyze the representation of the classical definition of probability in the mathematics curriculum through the lens of APOS theory; the second is to relate the findings of that analysis to the achievements of Serbian students in the domain of probability on the TIMSS and PISA assessments, in comparison with selected countries that demonstrate higher performance in this domain.

The curricular analysis indicates that students are predominantly exposed to tasks requiring mechanical application of the formula – corresponding to the Action level of APOS theory – with few opportunities to develop the conceptual understanding needed for work with infinite sample spaces or alternative definitions of probability. The findings from the TIMSS assessment in the data and probability domain, as well as the results of the PISA assessment on the uncertainty and data subscale, are directly linked to these curricular limitations and are placed in a comparative context with selected education systems. Based on the findings, we highlight the need for substantial changes in the approach to teaching probability in Serbia and emphasize the potential of APOS theory as a framework for designing instructional interventions.

Keywords: *classical definition of probability, APOS theory, TIMSS, PISA, curricular analysis*

References

- [1] I. Arnon, J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa Fuentes, M. Trigueros, K. Weller, *APOS theory - A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 2014.
- [2] E. Dubinsky, K. Weller, M. A. McDonald, A. Brown, *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis, Part 1*. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 2005, 335–359.

- [3] E. Dubinsky, K. Weller, M. A. McDonald, A. Brown, *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis, Part 2*. Educational Studies in Mathematics, 60, 2005, 253-266.

СРЕДЊОШКОЛСКА ГЕОМЕТРИЈА, ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ И АУТОМАТСКО ДОКАЗИВАЊЕ ТЕОРЕМА

Сана Стојановић-Ђурђевић

Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, Србија,
sana.stojanovic.djurdjevic@matf.bg.ac.rs

Еуклидска геометрија је прва област кроз коју се ђаци у основним и средњим школама упознају са правилима формалног доказивања, креирањем доказа, пажљиво уклопљеним конструкцијама и аргументацијом која је са једне стране довољно неформална да не омета усвајање градива, а са друге стране довољно прецизна да искусни математичар (а и мање искусни студент) може да препозна да ли су у доказу наведени сви потребни кораци. Овакви докази често су праћени конструкцијама и дијаграмима који воде порекло још из Еуклидових Елемената.

У овом раду ћемо укратко представити аксиоматско заснивање геометрије коришћењем аутоматских доказивача теорема и приказати један начин записивања доказа геометријских теорема на начин разумљив и човеку и рачунару.

Кључне речи: *средњошколска геометрија, аксиоматско заснивање геометрије, аутоматско доказивање теорема, интерактивно доказивање теорема*

HIGH SCHOOL GEOMETRY, EUCLID'S ELEMENTS, AND AUTOMATED THEOREM PROVING

Sana Stojanović-Đurđević

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia,
sana.stojanovic.djurdjevic@matf.bg.ac.rs

Euclidean geometry is the first area for students in elementary and secondary schools to be introduced to the rules of formal proof, the creation of proofs, specific constructions and argumentation that is informal enough not to interfere with the knowledge acquisition, but on the other hand precise enough that an experienced mathematician (and a less experienced student) can

recognize whether all the necessary steps are listed in the proof. Such proofs are often accompanied by constructions and diagrams that originate from Euclid's Elements.

In this paper, we will briefly present the axiomatic foundation of geometry using automatic theorem provers and show one way of writing proofs of geometric theorems understandable to both humans and computers.

Key words: *high-school geometry, axiomatization of geometry, automated theorem proving, interactive theorem proving* ÷

References

- [1] S. Stojanović-Đurđević, *From informal to formal proofs in Euclidean geometry*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 85, 2018, 89–117.
- [2] S. Stojanović, V. Pavlović, P. Janičić, *A coherent logic based geometry theorem prover capable of producing formal and readable proofs*, in Automated Deduction in Geometry: 8th International Workshop, ADG 2010, Germany, 2010.
- [3] M. Beeson, J. Narboux, F. Wiedijk, *Proof-checking Euclid*, CoRR, 2017.
- [4] J. Gil-Férez, M. A. Moshier, A. Naibo, M. Panza, J.-M. Salanskis, *Formalizing the Logic and Proofs of Book I of Euclid's Elements: Some Examples*, Philosophia Scientiæ, 2025.
- [5] S. Stojanović-Đurđević, A. Urošević, F. Marić, *Improving mathematical proving skills through interactive theorem proving*, Journal of Educational Studies in Mathematics and Computer Science, 4(2), 2024, 37–52.

РЕКУРЗИЈА КАО МОСТ ИЗМЕЂУ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Марија Трнавац, Марина Свичевић

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, marija.trnavac@pmf.kg.ac.rs, marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs

Рекурзија представља технику у којој функција позива саму себе током решавања проблема, чиме се сложени задаци свде на једноставније, самосличне инстанце, све до достизања базног случаја. Овај начин решавања проблема има значајну улогу како у математици, тако и у информатици, посебно у алгоритамском моделирању и математичкој формализацији проблема.

Циљ овог рада је да прикаже како се рекурзивни модели могу методички прилагодити настави, са посебним акцентом на изградњу везе између алгоритамског и математичког начина размишљања. У раду се полази од информатичког приступа, кроз анализу извршавања рекурзивних функција у програмском језику Python, након чега се

постепено уводи математичка формализација у виду рекурентних релација.

Посебна пажња посвећена је наставном контексту, где се рекурзија приближава ученицима средњих школа, нарочито у специјализованим ИТ одељењима, као и студентима, кроз интуитивне и визуелно препознатљиве примере. Међу њима се издваја Фибоначијев низ, чија се појава може уочити у природи, као што су распоред листова и спиралне структуре шкољки, што доприноси интуитивнијем разумевању рекурзивног дефинисања и постепеног грађења сложенијих структура из једноставнијих. На тај начин, рекурзија се представља као ефикасан дидактички алат који омогућава превазилажење јаза између наставе математике и информатике, и развоју дубљег разумевања код ученика.

Кључне речи: *рекурзија, Фибоначијев низ, Python, нумеричка анализа*

RECURSION AS A BRIDGE BETWEEN MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Marija Trnavac, Marina Svičević

University of Kragujevac, Faculty of Sciences, Kragujevac, Serbia,
marija.trnavac@pmf.kg.ac.rs, marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs

Recursion is a technique in which a function calls itself during the process of solving a problem, thereby reducing complex tasks to simpler, self-similar instances until a base case is reached. This approach to problem-solving plays a significant role in both mathematics and computer science, particularly in algorithmic modeling and the mathematical formalization of problems.

The aim of this paper is to demonstrate how recursive models can be methodically adapted for teaching purposes, with particular emphasis on building a connection between algorithmic and mathematical ways of thinking. The paper begins from a computer science perspective, through an analysis of the execution of recursive functions in the Python programming language, after which a mathematical formalization in the form of recurrence relations is gradually introduced.

Special attention is given to the educational context, where recursion is made accessible to secondary school students, especially those in specialized IT programs, as well as to university students, through intuitive and visually recognizable examples. Among these, the Fibonacci sequence stands out, as its appearance can be observed in nature, such as in the arrangement of leaves and the spiral structures of shells, contributes to a more intuitive understanding of recursive definition and the gradual construction of more complex structures from simpler ones. In this way, recursion presents itself as an effective didactic

tool that enables bridging the gap between mathematics and computer science teaching, and fosters deeper understanding among students.

Key words: *recursion, Fibonacci sequence, Python, numerical analysis*

References

- [1] Г. Миловановић, *Нумеричка анализа и теорија апроксимација*, Завод за уџбенике, Београд, 2014.
- [2] М. Rubio-Sánchez, *Introduction to Recursive Programming*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2018.
- [3] М. Свичевић, Н. Вучићевић, *Python – од основа до напредних техника (практикум)*, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2025, 145-152.

МАТЕМАТИКА ИЗМЕЂУ ОМИЉЕНОГ И ТЕШКОГ ПРЕДМЕТА: КАКО УЧЕНИЦИ ОБЈАШЊАВАЈУ ОВАЈ ПАРАДОКС

Вана Цолић¹, Зорана Лужанин²

¹ Академија струковних студија Нови Сад, Одсек Висока пословна школа струковних студија, Нови Сад, Србија, ² Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Нови Сад, Србија, vana.colic@vps.ns.ac.rs, zorana@dmi.uns.ac.rs

Овај рад испитује перцепцију математике као истовремено омиљеног и тешког школског предмета, са циљем да се разумеју начини на које ученици објашњавају овакве процене. Иако се у литератури ове димензије најчешће анализирају одвојено, савремени приступи указују на њихову међусобну повезаност и значај ученичких интерпретација искуства учења [1, 2].

Истраживање је засновано на крос-националном узорку студената из Републике Србије и Сједињених Америчких Држава, који ретроспективно процењују своја школска искуства. Примењен је мешовити методолошки приступ. Квалитативна анализа отворених одговора спроведена је индуктивним кодирањем, при чему су идентификоване категорије организоване у четири димензије: личну, садржајну, наставничку и инструкциону, у оквиру проширеног модела дидактичког троугла [3, 4].

Резултати показују да математика заузима специфичну позицију: истовремено се доживљава као когнитивно захтевна, али и као занимљива и вредна. Објашњења ученика указују на различите обрасце атрибуције, од наглашавања улоге наставника и наставне праксе до истицања личних

интересовања и способности. Посебно се издваја значај наставничке и инструкционе димензије, које обликују да ли ће се математика доживети као смислена или репродуктивна активност, што је у складу са истраживањима о улози питања и наставне интеракције [5].

Рад истиче значај анализе ученичких објашњења као кључа за разумевање образовних искустава. Импликације су посебно релевантне за иницијално образовање наставника, које треба да омогући обликовање подстицајног и смисленог учења математике.

Кључне речи: *математика, перцепција ученика, тежина предмета, наставна пракса*

MATHEMATICS BETWEEN FAVORITE AND DIFFICULT SUBJECT: HOW STUDENTS EXPLAIN THIS PARADOX

Vana Colić¹, Zorana Lužanin²

¹ Academy of Applied Studies Novi Sad, Department of the Novi Sad School of Business, Novi Sad, Serbia, ² University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Novi Sad, Serbia, vana.colic@vps.ns.ac.rs, zorana@dmi.uns.ac.rs

This paper examines the perception of mathematics as both a favorite and a difficult school subject, with the aim of understanding how students explain such evaluations. Although these dimensions are most often analyzed separately in the literature, contemporary approaches point to their interrelatedness and highlight the importance of students' interpretations of their learning experiences [1, 2].

The study is based on a cross-national sample of students from the Republic of Serbia and the United States of America, who retrospectively assess their school experiences. A mixed-methods approach was employed. Qualitative analysis of open-ended responses was conducted through inductive coding, with identified categories organized into four dimensions: personal, content-related, teacher-related, and instructional, within an expanded model of the didactic [3, 4].

The results indicate that mathematics occupies a specific position: it is simultaneously perceived as cognitively demanding, yet also as interesting and valuable. Students' explanations reveal different patterns of attribution, ranging from emphasizing the role of teachers and instructional practices to highlighting personal interests and abilities. In particular, the importance of the teacher-related and instructional dimensions stands out, as they shape whether mathematics is experienced as meaningful or merely reproductive activity, which is consistent with research on the role of questioning and instructional interaction [5].

The paper underscores the importance of analyzing students' explanations as a key to understanding educational experiences. The implications are particularly relevant for initial teacher education, which should support the development of stimulating and meaningful mathematics learning.

Key words: *mathematics, student perception, difficulty, motivation, teaching practice*

References

- [1] J. S. Eccles, M.-T. Wang, *What motivates females and males to pursue careers in mathematics and science?*, International Journal of Behavioral Development, 40(2), 2016, 100–106.
- [2] K. Miller, R. Shifflet, *How memories of school inform preservice teachers' feared and desired selves as teachers*, Teaching and Teacher Education, 53, 2016, 20–29.
- [3] D. L. Ball, F. M. Forzani, *The work of teaching and the challenge for teacher education*, Journal of Teacher Education, 60(5), 2009, 497–511.
- [4] P. L. Grossman, P. Smagorinsky, S. Valencia, *Appropriating tools for teaching English: A theoretical framework for research on learning to teach*, American Journal of Education, 108(1), 1999, 1–29.
- [5] G. Harel, *What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question*, in: G. Hanna, M. de Villiers (Eds.), *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*, Mathematical Association of America, 2008, 265–290.

РАЗВОЈ КУРИКУЛУМА ЗА ОБРАЗОВАЊЕ НАСТАВНИКА МАТЕМАТИКЕ: ИСТОРИЈСКО- КОМПАРАТИВНА АНАЛИЗА

Lana Crnobrnja Perenčević

VERN University, Zagreb, Croatia, perencevic.math@gmail.com

Образовање будућих наставника математике тесно је повезано са структуром и развојем универзитетских курикулума, који одражавају шире промене у образовним парадигмама и наставној пракси. Разумевање начина на који се ови курикулуми развијају током времена од суштинског је значаја за унапређивање квалитета образовања наставника и његово усклађивање са савременим образовним захтевима. Циљ овог истраживања је да се испита развој курикулума за образовање наставника математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Загребу, кроз историјско-компаративну анализу која обухвата период од 1958. до 2025. године. Истраживање се заснива на анализи одабраних курикулума који представљају кључне прекретнице, са фокусом на трајање студија, структуру предмета и расподелу математичких, као и

педагошких, психолошких и дидактичких садржаја по годинама студија. Резултати указују да су ранији курикулуми показивали минималне разлике између програма за образовање наставника и инжењерски оријентисаних студија математике. Временом је дошло до јасније диференцијације, обележене јачањем педагошких и дидактичких компоненти, нарочито у последњим деценијама. Ови налази истичу све већи значај успостављања равнотеже између снажног математичког знања и педагошких компетенција у образовању будућих наставника математике, чиме се даје допринос развоју курикулума и образовној пракси у области математичког образовања.

Кључне речи: *развој курикулума, историјско-компаративна анализа, педагошке компетенције, дидактика математике*

DEVELOPMENT OF THE MATHEMATICS TEACHER EDUCATION CURRICULUM: A HISTORICAL-COMPARATIVE ANALYSIS

Lana Crnobrnja Perencević

VERN University, Zagreb, Croatia, perencevic.math@gmail.com

The education of future mathematics teachers is closely linked to the structure and development of university curricula, reflecting broader changes in educational paradigms and teaching practices. Understanding how these curricula evolve over time is essential for improving the quality of teacher education and aligning it with contemporary educational demands. The aim of this study is to examine the development of the mathematics teacher education curriculum at the Faculty of Science, University of Zagreb, through a historical-comparative analysis covering the period from 1958 to 2025. The research is based on the analysis of selected curricula representing key turning points, with a focus on study duration, course structure, and the distribution of mathematical and pedagogical, psychological, and didactical content across study years. The results indicate that earlier curricula showed minimal differences between teacher education and engineering-oriented mathematics programs. Over time, a clearer differentiation has emerged, marked by the strengthening of pedagogical and didactical components, particularly in recent decades. These findings highlight the increasing importance of balancing strong mathematical knowledge with pedagogical competencies in the education of future mathematics teachers, contributing to curriculum development and educational practice in mathematics education.

Key words: *curriculum development, historical-comparative analysis, pedagogical competencies, mathematics didactics*

References

- [1] M. Cindrić, D. Miljković, V. Strugar, *Didaktika i kurikulum (2. izdanje)*, IEP-D2, Učiteljski fakultet, Zagreb, 2016.
- [2] M. Koludrović, V. Rajić, *Razvoj i uloga školskog kurikuluma u Republici Hrvatskoj: Povijesno-komparativna analiza*, *Metodički ogledi*, 28 (2), 2021, 11–36.
- [3] N. Pastuović, *Edukologija: integrativna znanost o sustavu cjeloživotnog obrazovanja i odgoja*, Znamen, Zagreb, 1999.
- [4] M. Matijević, *Praćenje i ocjenjivanje školskog uspjeha u svjetlu teorije kurikuluma*, u: H. Vrgoč (ur.), *Praćenje i ocjenjivanje školskog uspjeha*, Hrvatski pedagoško-književni zbor, Zagreb, 2002, 18–38.
- [5] *Red predavanja u zimskom i ljetnom semestru (2025)*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek.

СЕКЦИЈА 2: ШКОЛСКА ПРАКСА

НЕВИДЉИВА МОЋ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА: ОД ЛОГИЧКИХ ПАРАДОКСА ДО ДИГИТАЛНЕ РЕАЛНОСТИ

Сузана Алексић

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, suzana.aleksic@pmf.kg.ac.rs

Начин на који уводимо концепт комплексних бројева, често занемарујући логичке замке које настају када се правила реалне анализе некритички пренесу у комплексни домен, доводи до тога да се они у средњошколском образовању третирају као апстрактан, па чак и вештачки концепт, што код ученика ствара отпор и неразумевање.

Овај рад представља методички приступ који трансформише доживљај комплексних бројева кроз три етапе: препознавање уобичајених заблуда, геометријску интуицију и модерну примену у програмирању видео игара.

Анализираћемо најчешће логичке грешке које настају услед некритичког преношења особина реалне квадратне функције у комплексни домен. Указаћемо на важност прецизног дефинисања операција и граница примењивости правила на којима инсистирамо у

настави. Показаћемо како комплексни бројеви служе као моћна замена за традиционалне геометријске методе, омогућавајући да се до сложених резултата дође кроз једноставне алгебарске трансформације.

У завршном делу, илустроваћемо употребу комплексних бројева у савременој технологији кроз моделирање физичких процеса у видео играма. Користећи линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима, објаснићемо како природа решења у комплексном домену директно креира визуелни идентитет карактера. Појаснићемо како присуство имагинарних корена даје живот и еластичност желатинозним објектима кроз осцилације, док њихово одсуство у реалном домену верно симулира отпор и тромост кретања кроз блато или густе средине.

Циљ овог излагања је да наставницима понуди готове моделе којима могу мотивисати ученике, показујући им да су комплексни бројеви невидљиви, али неопходни мотори који покрећу како геометрију, тако и најмодерније дигиталне симулације.

Кључне речи: *комплексни бројеви, школска пракса, логичке грешке, дигиталне симулације*

THE INVISIBLE POWER OF COMPLEX NUMBERS: FROM LOGICAL PARADOXES TO DIGITAL REALITY

Suzana Aleksić

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
suzana.aleksic@pmf.kg.ac.rs

The way the concept of complex numbers is introduced, often neglecting the logical pitfalls that arise when the rules of real analysis are uncritically transferred to the complex domain, causes them to be treated in secondary education as an abstract and even artificial concept, leading to student resistance and misunderstanding. This paper presents a methodological approach that transforms the experience of complex numbers through three stages: recognizing common misconceptions, developing geometric intuition, and exploring modern applications in video game programming.

We analyze the most common logical errors resulting from the uncritical transfer of the properties of the real quadratic function to the complex domain. We highlight the importance of precise definitions of operations and the limits of applicability for the rules emphasized in teaching. Next, we show how complex numbers serve as a powerful alternative to traditional geometric methods, allowing complex results to be achieved through simple algebraic transformations.

In the final section, we illustrate the use of complex numbers in modern technology through the modeling of physical processes in video games. Using linear differential equations with constant coefficients, we explain how the nature of the solutions in the complex domain directly creates the visual identity of the characters. We clarify how the presence of imaginary roots imparts life and elasticity to gelatinous objects through oscillations, while their absence in the real domain faithfully simulates the resistance and sluggishness of movement through mud or dense media.

The aim of this presentation is to provide teachers with ready-to-use models to motivate their students, showing them that complex numbers are the invisible yet indispensable engines driving both geometry and state-of-the-art digital simulations.

Key words: *complex numbers, teaching practice, logical errors, digital simulations*

References

- [1] N. Ikodinović, S. Dimitrijević, S. Aleksić, *Matematika - udžbenik sa zbirkom zadataka za drugi razred gimnazije*, Izdavačka kuća Klett, Beograd, 2015.
- [2] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [3] T. Andreescu, D. Andrica, *Complex Numbers from A to... Z*, Birkhäuser, Boston, 2006.
- [4] I. Millington, *Game Physics Engine Development*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 2010.
- [5] D. M. Bourg, B. Bywalec, *Physics for Game Developers*, 2nd ed., O'Reilly Media, Sebastopol, 2013.

ЈЕДАН ОД МОГУЋИХ МЕТОДИЧКИХ ПРИСТУПА ГЕОМЕТРИЈСКОМ ДОКАЗУ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Војислав Андрић

Математички клуб „Диофант“, Ваљево, Србија, voja.andric@gmail.com

Многе ствари у настави математике ће се временом променити (програми наставе и учења, наставни исходи, наставна средства, облици рада ...), али неке важне појединости ће остати наставна потреба кроз векове и докле год се буде учила математика. У те вечне наставне проблеме спада и методика доказивања која се и у алгебарским и у геометријским проблемима своди на скоро идентичне законе закључивања, али понекад има и сасвим различите приступе. Тешко је прогнозировати моћ и немоћ вештачке интелигенције у тој области, али ма колико она успешно

решавала доказне проблеме, питање је колико ће то утицати на математичку писменост људи и развијање њихових креативних способности.

Циљ овог саопштења је да се слушаоцима предложи један од могућих приступа дедуктивном геометријском доказу - такозвани ПТДД приступ (претпоставка, тврђење, доцртавање, доказ) и укаже на важност и методологију квалитетног образлагања доказа. Биће речи и о грешкама које се у таквим доказним поступцима најчешће појављују.

Излагање једног од могућих методичких поступака за доказивање у геометрији биће илустровано следећим примерима.

1. У троуглу ABC спољашњи угао троугла код темена B је 60° . Ако је на страници AC , дата тачка M , таква да је $AM = MB = BC$, онда је $\angle BAC = 20^\circ$. Докажи.
2. У правоуглом троуглу оштри углови су 30° и 60° . Докажи да је катета наспрам најмањег угла једнака половини хипотенузе.
3. Дат је квадрат $ABCD$. На страници CD дата је тачка M тако да је $\angle AMD = 60^\circ$, а на страници BC тачка N тако да је $\angle CMN = 60^\circ$. Докажи да је $\angle BAN = 15^\circ$.
4. На страници AB , троугла ABC дата је тачка M тако да је $AM = MB$. Ако је $\angle AMC = 45^\circ$ и $\angle ABC = 30^\circ$, онда је $\angle BAC = 105^\circ$. Докажи.
5. У једнакокраном трапезу $ABCD$, дијагонале трапеза AC и BD секу се у тачки S , тако да је $\angle ASB = 60^\circ$. Докажи да су средишта дужи AS , DS и BC темена једнакограничног троугла.

Кључне речи: доказ геометријског тврђења, фазе извођења доказа, настава геометрије

ONE POSSIBLE METHODOLOGICAL APPROACH TO GEOMETRIC PROOF IN MATHEMATICS TEACHING

Vojislav Andrić

Mathematics Club "Diophantus", Valjevo, Serbia, voja.andric@gmail.com ÷

Many things in mathematics teaching will change over time (teaching and learning programs, learning outcomes, teaching aids, forms of work, etc.), but some important elements will remain an educational necessity for centuries, as long as mathematics continues to be taught. Among these enduring teaching issues is the methodology of proof, which in both algebraic and geometric problems is reduced to almost identical laws of reasoning, but at times also involves completely different approaches. It is difficult to predict the power and limitations of artificial intelligence in this area, but no matter how successfully it solves proof-related problems, the question remains as to how much this will

influence people's mathematical literacy and the development of their creative abilities.

The aim of this presentation is to propose to the audience one possible approach to deductive geometric proof – the so-called HCAD approach (Hypothesis, Claim, Auxiliary Construction, Proof) and to point out the importance and methodology of high-quality proof explanation. Attention will also be given to the errors that most frequently occur in such proof procedures.

The presentation of one possible methodological procedure for proving in geometry will be illustrated by the following examples.

1. In triangle ABC , the exterior angle at vertex B is 60° . On side AC , a point M , is given such that $AM = MB = BC$. Prove that $\angle BAC = 20^\circ$.
2. In the right triangle, the acute angles are 30° and 60° . Prove that the leg opposite the smaller angle is equal to half of the hypotenuse.
3. A square $ABCD$ is given. On side CD a point M is given such that $\angle AMD = 60^\circ$ and on side BC , a point N is given such that $\angle CMN = 60^\circ$. Prove that $\angle BAN = 15^\circ$.
4. On side AB of triangle ABC , a point M is given such that $AM = MB$. If $\angle AMC = 45^\circ$ and $\angle ABC = 30^\circ$, then $\angle BAC = 105^\circ$. Prove.
5. In an isosceles trapezoid $ABCD$, the diagonals AC and BD intersect at point S , such that $\angle ASB = 60^\circ$. Prove that the midpoints of segments AS , DS , and BC are the vertices of an equilateral triangle.

Key words: *proof of a geometric statement, phases of proof construction, geometry teaching*

ИНТЕРДИСЦИПЛИНАРНОСТ НА ЧАСУ МАТЕМАТИКЕ: ОБРАДА ПОДАТАКА О РЕЦИКЛАЖИ

Данка Антић

ОШ „Вук Караџић“, Пирот, Србија, danka.antic@vkpirot.edu.rs

У савременој настави математике све је израженија потреба за повезивањем математичких садржаја са контекстима из свакодневног живота. У овом раду представљен је пример добре наставне праксе – час обраде података у вези са рециклажом, заснован на интердисциплинарном приступу који интегриса математику, екологију, грађанско васпитање и друге сродне предмете. Час је реализован у оквиру конкурса „Компетенције за демократску културу – примена у наставној пракси“ и налази се у бази примера добре праксе Завода за унапређивање образовања и васпитања.

Циљ рада је да представи овај час као пример добре праксе, са посебним освртом на ситуације учења, организацију ученичког рада и методичке приступе.

Посебна одлика часа јесте симболичка примена концепта рециклаже на саме податке – исти скуп података се више пута користи, трансформише и поново тумачи у различитим фазама обраде, чиме се развија идеја о поновној употреби података у различитим аналитичким контекстима.

Настава је организована кроз групни рад по моделу REDUCE-REUSE-RECYCLE. Ученици су обрађивали податке о рециклажи, приказивали их у табелама и графиконима, поново их користили на различите начине и дискутовали о добијеним резултатима, интегришући знања из више предмета. Наставник је усмеравао рад ученика, подстичући сарадњу и активно учешће.

Час показује како интердисциплинарни и активни приступи учењу могу унапредити ангажованост ученика, побољшати разумевање статистичких појмова и развијати демократске компетенције. Такође има за циљ да подигне свест ученика о значају рециклаже и одговорног односа према животној средини.

Кључне речи: *интердисциплинарно учење, рециклажа, настава математике, анализа података, демократске компетенције*

INTERDISCIPLINARITY IN A MATHEMATICS LESSON: PROCESSING RECYCLING DATA

Danka Antić

Primary School "Vuk Karadžić", Pirot, Serbia, danka.antic@vkipirot.edu.rs

In contemporary mathematics teaching, there is an increasing need to connect mathematical content with real-life contexts. This paper presents an example of good teaching practice – a lesson on data processing related to recycling, based on an interdisciplinary approach that integrates mathematics, ecology, civic education, and other related subjects. The lesson was implemented within the competition "Competences for Democratic Culture – Application in Teaching Practice" and is included in the database of good practice examples of the Institute for the Improvement of Education and Upbringing.

The aim of the paper is to present this lesson as an example of good practice, with a focus on learning situations, student work organization, and methodological approaches.

A specific feature of the lesson is the symbolic application of the recycling concept to data itself – the same dataset is repeatedly used,

transformed, and reinterpreted at different stages of processing, thereby developing the idea of data reuse in different analytical contexts.

Teaching was organized through group work following the REDUCE-REUSE-RECYCLE model. Students processed recycling data, presented it in tables and graphs, reused it in different ways, and discussed their findings, integrating knowledge from multiple subjects. The teacher acted as a facilitator, encouraging collaboration and active student participation.

The lesson demonstrates how interdisciplinary and active learning approaches can enhance student engagement, improve understanding of statistical concepts, and develop democratic competences. It also aims to raise students' awareness of the importance of recycling and responsible environmental behavior.

Key words: interdisciplinary learning, recycling, mathematics education, data analysis, democratic competences

References

- [1] J. Van den Heuvel-Panhuizen, *Realistic Mathematics Education*, in Encyclopedia of Mathematics Education, Springer, 2020.
- [2] Institute for Improvement of Education, Republic of Serbia; Council of Europe; European Union, *Democratic Competences through a Cross-Curricular Approach*, Strasbourg, April 2025.
- [3] OECD, *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*, OECD Publishing, Paris, 2023.

КОНЦЕПТИ ГРАФОВСКИХ АЛГОРИТАМА ЗА РАЗВОЈ АЛГОРИТАМСКОГ РАЗМИШЉАЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Милош Арсић

Математичка гимназија, Београд, Србија, milosharsic.matf.bg.ac.rs@gmail.com

Појам графа се у програму такмичења из информатике за ученике основних школа експлицитно појављује тек на највишим нивоима такмичења као што су Српска информатичка олимпијада и изборна такмичења. Међутим, анализа садржаја програма показује да су кључне идеје графовских алгоритама имплицитно присутне и у ранијим фазама такмичења кроз теме као што су рад са матрицама, претрага простора и итеративни и рекурзивни алгоритми.

Задаци који укључују рад са матрицама, анализу суседстава у неком моделу или одређивање најкраћег пута у дискретном простору

представљају природан увод у концепте који се касније формализују кроз алгоритме као што су Дијкстрин алгоритам или претрага у дубину и ширину. Решавање ових задатака има значајну улогу у оквиру STEM образовања, јер омогућава постепено увођење апстрактних структура као што су графови при решавању конкретних проблема уз истовремени развој алгоритамског начина размишљања.

Циљ рада је да покаже методички приступ за постепено увођење основних концепата и алгоритама теорије графова у додатној настави математике и информатике. Посебна пажња посвећена је идентификацији задатака и тема које могу послужити као мост између основних алгоритамских техника и напреднијих графовских проблема. У раду су додатно анализирани задаци и примери са државних тестирања из информатике других земаља света.

Кључне речи: *графови, алгоритми, такмичења из информатике, алгоритамско размишљање, STEM образовање*

GRAPH ALGORITHMS CONCEPTS FOR THE DEVELOPMENT OF ALGORITHMIC THINKING IN PRIMARY SCHOOL STUDENTS

Miloš Arsić

Mathematical Grammar School, Belgrade, Serbia, milosharsic.matf.bg.ac.rs@gmail.com

The concept of a graph in competitive programming for primary school students appears explicitly only at the highest levels of competition, such as the Serbian Olympiad in Informatics and selection contests. However, an analysis of the competition curriculum shows that the key ideas of graph algorithms are implicitly present in earlier stages of competition through topics such as matrix operations, space exploration, and iterative and recursive algorithms.

Problems involving matrix operations, the analysis of adjacency in a given model or determining the shortest path in a discrete space represent a natural introduction to concepts that are later formalized through algorithms such as Dijkstra's algorithm or depth-first and breadth-first search. Solving these problems plays an important role in STEM education, as it enables the gradual introduction of abstract structures, such as graphs, for solving concrete problems, alongside the simultaneous development of algorithmic thinking.

The aim of this paper is to present a methodological approach for the gradual introduction of basic concepts and algorithms from graph theory in supplementary mathematics and computer science education. Special attention is given to identifying tasks and topics that can serve as a bridge between basic algorithmic techniques and more advanced graph problems. The paper

additionally analyzes problems and examples from national informatics examinations in other countries.

Keywords: *graphs, algorithms, programming competitions, algorithmic thinking, STEM education*

References

- [1] F. Marić, N. Alimpić, N. Vasiljević, M. Vugdelija, D. Vuković, M. Đurišić, V. Marinković, S. Matković, J. Hadži-Purić, M. Čabarkapa, *Metodička zbirka algoritamskih zadataka sa rešenjima*, Društvo matematičara Srbije i Fondacija Petlja, Beograd, 2019.
- [2] U. Manber, *Introduction to Algorithms, A Creative Approach*, Addison-Wesley, Reading, 1989.
- [3] *SpecIT3 programiranje*, accessed Apr. 20, 2026. [Online]. Available: https://petlja.github.io/specit3_prog/

ЗБИР ЦИФАРА НА ТАКМИЧЕЊИМА И ПРИЈЕМНИМ ИСПИТИМА ОСНОВАЦА

Владимир Балтић

АТУСС, ВИШЕР, Београд, Србија, balticvladimir@gmail.com

Представимо 5 задатака везаних са збиром цифара. Прва 2 су били на пријемним испитима за упис у Рачунарску и Математичку гимназију. Наредна 2 задатка су била на Савезним такмичењима ученика 7. разреда, а последњи је био на државном такмичењу ученика 6. разреда. Даћемо везу збира цифара и остатака при дељењу са 9 (критеријумом дељивости са 9).

1. Колико има троцифрених бројева који су 33 пута већи од збира својих цифара?
2. Збир цифара броја n је m , а збир цифара броја m је p . Колико има природних бројева n таквих да је $n + m + p = 78$?
3. Ако су у троцифреном броју дељивом са 7 две последње цифре једнаке, доказати да је збир цифара тог броја дељив са 7.
4. Нека је $S(n)$ збир цифара природног броја n . Одредити n ако је:
 - а) $n + S(n) = 2002$;
 - б) $n + S(n) + S(S(n)) = 2002$.
5. Збир цифара природног броја n једнак је збиру цифара броја $5n$. Докажи да је број n дељив са 9.

Кључне речи: *збир цифара, дељивост са 9 и 7, такмичења, пријемни испити*

SUM OF DIGITS IN PRIMARY SCHOOL COMPETITIONS AND ENTRANCE EXAMS

Vladimir Baltić

ATUSS, VISER, Belgrade, Serbia, balticvladimir@gmail.com

We will present 5 problems related to the sum of digits. The first 2 were on entrance exams for the Computer and Mathematics Gymnasium. The next 2 problems were on the Federal competitions for 7th-grade students, and the last one was on the National competition for 6th-grade students. We will provide the connection between the sum of digits and remainders when divided by 9 (the Divisibility rule for 9).

1. How many 3-digit numbers are there that are 33 times greater than the sum of their digits?
2. The sum of the digits of the number n is m , and the sum of the digits of the number m is p . How many natural numbers n are there such that $n + m + p = 78$?
3. If in a 3-digit number divisible by 7 the last two digits are equal, prove that the sum of the digits of that number is divisible by 7.
4. Let $S(n)$ be the sum of the digits of a natural number n . Determine n if:
a) $n + S(n) = 2002$; b) $n + S(n) + S(S(n)) = 2002$.
5. The sum of the digits of a natural number n is equal to the sum of the digits of the number $5n$. Prove that the number n is divisible by 9.

Key words: *sum of digits, divisibility by 9 and 7, competitions, entrance exams*

References

- [1] *1000 задатака са такмичења ученика основних школа 1987-1996*, Материјал за младе математичаре, Свеска 31, ДМС, Београд, 1996.
- [2] *1000 задатака са такмичења ученика основних школа 1994-2003*, Материјал за младе математичаре, Свеска 31, ДМС, Београд, 2003.
- [3] *1100 задатака са такмичења ученика основних школа 2012-2021*, Материјал за младе математичаре, Свеска 54, ДМС, Београд, 2021.

МЕЂУПРЕДМЕТНА ПОВЕЗАНОСТ НАСТАВЕ ДИСКРЕТНЕ МАТЕМАТИКЕ И ПРОГРАМИРАЊА КРОЗ ТЕОРИЈУ ГРАФОВА У СРЕДЊОШКОЛСКОМ ОБРАЗОВАЊУ

Бојана Боровићанин

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, bojana.borovicanin@pmf.kg.ac.rs

Теорија графова представља значајан део наставног програма како у оквиру предмета Дискретна математика, тако и у оквиру предмета Програмирање у трећем разреду гимназије за ученике са посебним способностима за рачунарство и информатику. Иако се ови садржаји обрађују паралелно у оквиру два различита предмета, они се често реализују без довољно јасне међупредметне повезаности, што може довести до фрагментiranог разумевања и отежаног трансфера знања код ученика.

У раду се анализирају могућности повезивања теоријског и алгоритамског приступа у обради садржаја из теорије графова. У оквиру Дискретне математике акценат је на дефиницијама и врстама графова, повезаности, најкраћем путу, разапињућим стаблима и минималном разапињућем стаблу, док се у оквиру Програмирања фокус ставља на репрезентацију графова, претраге у ширину и дубину (BFS и DFS), Дијкстрин алгоритам и имплементацију графовских алгоритама.

Предлаже се модел интегрисаног приступа настави заснован на повезивању математичких појмова и њихове алгоритамске реализације кроз практичне примере и проблеме из свакодневног живота ученика, као што су друштвене мреже и навигациони системи. Посебна пажња посвећена је развоју алгоритамског мишљења и дубљем разумевању графовских структура кроз приказ истог концепта из две комплементарне перспективе.

Циљ овог рада је да укаже на значај међупредметне корелације математике и програмирања и понуди практичне смернице за унапређење наставног процеса у средњошколском образовању.

Кључне речи: *теорија графова, дискретна математика, програмирање, међупредметна повезаност, алгоритамско мишљење*

INTERDISCIPLINARY CONNECTION BETWEEN DISCRETE MATHEMATICS AND PROGRAMMING THROUGH GRAPH THEORY IN SECONDARY SCHOOL EDUCATION

Bojana Borovićanin

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
bojana.borovicainin@pmf.kg.ac.rs

Graph theory represents an important part of the curriculum both in the course Discrete Mathematics and in the course Programming in the third grade of grammar schools for students with special abilities in computing and informatics. Although these topics are taught simultaneously within two different subjects, they are often presented without sufficiently clear interdisciplinary connection, which may lead to fragmented understanding and difficulties in knowledge transfer among students.

This paper analyzes the possibilities of connecting theoretical and algorithmic approaches in teaching graph theory concepts. In Discrete Mathematics, the focus is placed on graph definitions and types, connectivity, shortest paths, spanning trees, and minimum spanning trees, while in Programming the emphasis is on graph representation, breadth-first and depth-first search (BFS and DFS), Dijkstra's algorithm, and the implementation of graph algorithms.

A model of integrated teaching is proposed, based on connecting mathematical concepts with their algorithmic realization through practical examples and real-life problems familiar to students, such as social networks and navigation systems. Special attention is given to the development of algorithmic thinking and a deeper understanding of graph structures by presenting the same concept from two complementary perspectives.

The aim of this paper is to highlight the importance of interdisciplinary correlation between Mathematics and Programming and to offer practical guidelines for improving the teaching process in secondary school education.

Key words: graph theory, discrete mathematics, programming, interdisciplinary connection, algorithmic thinking

References

- [1] B. Borovićanin, *Discrete Mathematics – Number Theory, Combinatorics and Graph Theory*, Faculty of Science, Kragujevac, 2019.
- [2] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3rd Edition, MIT Press, Cambridge, 2009.

- [3] G. Polya, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, Princeton, 2004.
- [4] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw-Hill Education, New York, 2019.
- [5] D. Stevanović, M. Ćirić, S. Simić, V. Baltić, *Discrete Mathematics – Fundamentals of Combinatorics and Graph Theory*, Mathematical Society of Serbia, Belgrade, 2008.

ДИНАМИЧКА ВИЗУЕЛИЗАЦИЈА МАТЕМАТИЧКИХ ПОЈМОВА ПРИМЕНОМ АЛАТА MANIM

*Немања Вучићевић, Александар Миленковић,
Марина Свичевић*

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs, aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs,
marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs

Развој образовних технологија отворио је нове могућности за унапређење наставе математике, нарочито у домену визуелизације апстрактних појмова и процеса. У овом раду разматра се примена алата Manim као средства за израду математички прецизних анимација које могу имати значајну дидактичку улогу у наставном процесу. Посебан акценат ставља се на могућност динамичког приказа различитих садржаја чије разумевање често захтева више од статичне илустрације.

Циљ рада је да се прикажу образовни потенцијали овог алата, да се истакну његове предности у односу на друге дигиталне приступе визуелизацији и да се укаже на његов значај у обликовању савременог, интерактивног и методолошки осмишљеног приступа настави математике.

У поређењу са другим често коришћеним алатима за визуелизацију у образовању, Manim се издваја већим степеном флексибилности, прецизнијом контролом над приказом и могућношћу креирања садржаја који је у потпуности прилагођен наставним потребама. На тај начин, он није само технички алат за израду анимација, већ и ресурс који подржава дубље концептуално разумевање математичких садржаја и подстиче повезивање математике са информатиком, као и развој дигиталних компетенција.

Кључне речи: *Manim алат, настава математике, образовна технологија, динамичка визуелизација, дигитални алати за учење*

DYNAMIC VISUALIZATION OF MATHEMATICAL CONCEPTS USING THE MANIM TOOL

Nemanja Vučićević, Aleksandar Milenković, Marina Svičević

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs, aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs,
marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs

The development of educational technologies has opened up new possibilities for improving mathematics teaching, particularly in the visualization of abstract concepts and processes. This paper examines the use of Manim as a tool for creating mathematically precise animations that can play a significant didactic role in the teaching process. Special emphasis is placed on the possibility of dynamically presenting various types of content whose understanding often requires more than a static illustration.

Compared to other commonly used visualization tools in education, Manim stands out due to its greater flexibility, more precise control over presentation, and the ability to create content that is fully tailored to instructional needs. In this way, it is not merely a technical tool for producing animations, but also a resource that supports a deeper conceptual understanding of mathematical content and encourages the integration of mathematics with informatics, as well as the development of digital competencies.

The aim of the paper is to present the educational potential of this tool, to highlight its advantages in relation to other digital approaches to visualization, and to point out its importance in shaping a modern, interactive, and methodologically well-designed approach to mathematics teaching.

Key words: Manim tool, mathematics education, educational technology, dynamic visualization, digital learning tools

References

- [1] P. Akhilesh, K. A. Krishna, S. K. Bharadwaj, D. Subham, M. Belwal, *A visual approach to understand parsing algorithms through Python and Manim*, in *2024 15th International Conference on Computing Communication and Networking Technologies (ICCCNT)*, IEEE, 2024, 1–7.
- [2] R. R. Subramanian, B. Inukurthi, *Manime: A code-driven visual teaching method for deep learning education*, *Journal of Engineering Education Transformations*, 2026, 381–388.
- [3] C. Zhang, *Manim for STEM education: Visualizing complex problems through animation*, *arXiv preprint arXiv:2510.01187*, 2025.

ИНОВАТИВНИ ПРИСТУПИ АУТОМАТИЗАЦИЈИ ТАБЛИЦЕ МНОЖЕЊА

Мирјана Глишић , Марија Павловић

ОШ „ Др Драгиша Мишовић“ , Чачак, Република Србија, glisic.mirjana2@gmail.com , marija71.pavlovic@gmail.com

Један од трајних изазова у настави математике јесте ефикасна аутоматизација таблице множења. Традиционални приступи, засновани на механичком памћењу, често доводе до ниске мотивације и отпора код ученика. Овај рад приказује трансформацију тог процеса кроз две комплементарне фазе – физичку и дигиталну .

У првом делу рада представљамо дидактичку игру „Реци-клажа“. Коришћењем илустрованих картица са операцијама множења, ученици извлаче задатке, а тачан резултат усмерава их ка слици одређене врсте отпада коју потом разврставају у канте одговарајућих боја. Тиме се постиже вишеструки ефекат: математичка операција постаје визуелна и опипљива, док се истовремено развија еколошка свест и вештина правилног разврставања отпада.

Други део рада усмерен је ка будућности образовања кроз примену дигиталних математичких игара. Приказујемо избор интерактивних алата и платформи (Wordwall, LearningApps, eTwinning ресурси) креираних са циљем да кроз гемификацију додатно учврсте знање таблице множења. Дигиталне игре омогућавају тренутну повратну информацију, индивидуални темпо напредовања и висок степен ангажованости у дигиталном окружењу.

У закључку се истиче да оптималан резултат у школској пракси произилази из комбинације опипљивих, физичких средстава и савремене технологије. Овакав интегративни приступ олакшава прелазак са апстрактног на конкретно, чинећи учење математике мотивишућим, сврсисходним и применљивим у свакодневном животу.

Кључне речи: *таблица множења, аутоматизација, Реци-клажа, дигиталне игре, активно учење*

INNOVATIVE APPROACHES TO AUTOMATING THE MULTIPLICATION TABLE

Mirjana Glišić, Marija Pavlović

Primary School "Dr Dragiša Mišović", Čačak, Republic of Serbia,
glisic.mirjana2@gmail.com, marija71.pavlovic@gmail.com

One of the enduring challenges in mathematics teaching is the effective automation of the multiplication table. Traditional approaches, based on rote memorization, often lead to low motivation and resistance among students. This paper presents a transformation of that process through two complementary phases – a physical one and a digital one.

In the first part of the paper, we present the didactic game "Reci-clage". By using illustrated cards with multiplication operations, students draw tasks, and the correct result directs them to the image of a certain type of waste, which they then sort into bins of the appropriate colors. In this way, a multiple effect is achieved: the mathematical operation becomes visual and tangible, while ecological awareness and the skill of proper waste sorting are simultaneously developed.

The second part of the paper is oriented toward the future of education through the use of digital mathematics games. We present a selection of interactive tools and platforms (Wordwall, LearningApps, eTwinning resources) created with the aim of further reinforcing multiplication table knowledge through gamification. Digital games enable immediate feedback, an individual pace of progress, and a high level of engagement in a digital environment.

The conclusion emphasizes that the optimal result in school practice arises from a combination of tangible, physical materials and modern technology. Such an integrative approach facilitates the transition from the abstract to the concrete, making mathematics learning motivating, meaningful, and applicable in everyday life.

Key words: multiplication table, automation, Reci-clage, digital games, active learning

References

- [1] M. Dejić, *Metodika nastave matematike*, Učiteljski fakultet, Beograd, 2014.
- [2] M. Vilotijević, *Didaktika 3: organizacija nastave*, Učiteljski fakultet, Beograd, 2000.
- [3] Z. Kovačević, T. Miljanović, „Gamikacija u obrazovanju – između motivacije i manipulacije”, u: *Zbornik radova sa Konferencije o nastavi matematike*, 2018.
- [4] European School Education Platform, 2023.

УЧЕНИЧКА ПИТАЊА КАО ИНДИКАТОР ПОТЕШКОЋА У РЕШАВАЊУ ТАКМИЧАРСКИХ ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

*Милица Грбовић Тирић, Ненад Стојановић, Александар Миленковић,
Немања Вучићевић*

Универзитет у Крагујевцу, Природно - математички факултет, Крагујевац,
Србија, milica.grbovic@pmf.kg.ac.rs, nenad.stojanovic@pmf.kg.ac.rs,
aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs, nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs

Математичка такмичења имају важну улогу у подстицању интересовања ученика за дубље бављење математиком, као и у развоју здравог такмичарског духа. Кроз решавање сложенијих задатака, ученици не само да продубљују своја математичка знања, већ развијају и компетенције за решавање и превазилажење изазовних ситуација. Циљ овог рада је да се испита са којим врстама изазова се ученици основних школа сусрећу приликом решавања такмичарских задатака из математике. Истраживање је спроведено применом тематске анализе питања која су ученици од 3. до 8. разреда Шумадијског округа постављали током општинског и окружног такмичења у школској 2025/2026. години. Резултати показују да се учени изазови могу груписати у више категорија: неразумевање задатка и онога што се од ученика тражи; непознавање термина и математичке нотације; тешкоће у тумачењу услова задатка; проблеми са менталном визуелизацијом математичких концепата и њихових међусобних односа; непостојање адекватних стратегија решавања; сумња у исправност или смисао добијеног решења. У раду ће бити представљени карактеристични примери сваке категорије, као и анализа њихове заступљености у односу на узраст ученика. Добијени резултати пружају корисне смернице наставницима за унапређење редовне и додатне наставе математике, посебно у домену развоја разумевања задатака и избора стратегија решавања, што може позитивно утицати на постигнућа ученика на математичким такмичењима.

Кључне речи: *математичка такмичења, решавање проблема, ученичке потешкоће, тематска анализа*

STUDENT QUESTIONS AS AN INDICATOR OF DIFFICULTIES IN SOLVING MATHEMATICAL COMPETITION PROBLEMS

*Milica Grbović Ćirić, Nenad Stojanović, Aleksandar Milenković,
Nemanja Vučićević*

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
milica.grbovic@pmf.kg.ac.rs, nenad.stojanovic@pmf.kg.ac.rs,
aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs, nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs

Mathematical competitions play an important role in fostering students' interest in engaging more deeply with mathematics, as well as in developing a healthy sense of competition among peers. By solving more complex problems, students not only deepen their mathematical knowledge but also develop competencies for addressing and overcoming challenging situations. The aim of this study is to examine the types of challenges primary school students encounter when solving mathematical competition problems. The research was conducted through a thematic analysis of questions posed by students from grades 3 to 8 in the Šumadija District during municipal and regional competitions in the 2025/2026 school year. The results indicate that the identified challenges can be grouped into several categories: misunderstanding of the problem and its requirements; lack of familiarity with mathematical terminology and notation; difficulties in interpreting problem conditions; challenges related to the mental visualization of mathematical concepts and their relationships; absence of appropriate problem-solving strategies; and uncertainty regarding the correctness or meaning of the obtained solution. The paper presents representative examples for each category, along with an analysis of their distribution across different student age groups. The findings provide useful guidance for teachers in improving both regular and supplementary mathematics instruction, particularly in fostering students' understanding of problems and their ability to select appropriate solution strategies, which may ultimately contribute to better performance in mathematical competitions.

Key words: *mathematical competitions, problem solving, student difficulties, thematic analysis*

References

- [1] P. Kenderov, *Mathematical competitions: an integral part of the educational process*, ZDM – Mathematics Education, 54, 2022, 983–996.

- [2] A. Milenković, M. Milikić, N. Vulović, *Analysis of Seventh-Grade Students' Performance in National Mathematics Competitions by Topic and Task Type: A Comparison of Specialized and Regular Classes*, *Nastava i vaspitanje*, 74(3), 2025.
- [3] R. R. Skemp, *Relational understanding and instrumental understanding*, *Mathematics Teaching*, 77(1), 1976, 20–26.
- [4] B. Sriraman, *Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences of Four Gifted Students*, *The Journal of Secondary Gifted Education*, 14(3), 2003, 151–165.
- [5] M. Swan, *Dealing with misconceptions in mathematics*, in *Issues in Mathematics Teaching*, Routledge, 2002, 147–165.

ОД СРЕДЊЕ ВРЕДНОСТИ ДО МАТЕМАТИЧКОГ ОЧЕКИВАЊА: КА КОНЦЕПТУАЛНОМ РАЗУМЕВАЊУ УЗ ПОМОЋ МОДЕЛА ПОЛУГЕ

Слађана Димитријевић

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, sladjana.dimitrijevic@pmf.kg.ac.rs

Ученици често усвајају поступке за рачунање аритметичке средине и математичког очекивања без развијања јасног концептуалног разумевања. У овом раду предлаже се модел полуге као интуитиван и јединствен оквир за подучавање ових појмова заснован на идеји равнотеже. Модел тумачи математичке односе као стања равнотеже на полузи. Променом положаја ослонца и расподеле „тежина“, омогућава се прогресивно увођење појмова. Конкретно, аритметичка средина се уводи као тачка равнотеже система једнаких тежина распоређених на бројевној правој, док се математичко очекивање интерпретира као тежиште система са различитим тежинама које одговарају вероватноћама. Ова структурна аналогија омогућава кохерентан прелаз од елементарних појмова просека ка вероватносном мишљењу, при чему ученици развијају јединствен ментални модел уместо неповезаних процедура. У раду се излаже теоријска основа приступа и илуструје његов дидактички потенцијал.

Предложени модел представља једноставан, а снажан, начин за унапређење концептуалног разумевања аритметичке средине и математичког очекивања, а може бити и основа за даља емпиријска истраживања.

Кључне речи: *аритметичка средина, математичко очекивање, наставни манипулативи, модел полуге*

FROM MEAN TO EXPECTATION: A LEVER-BASED APPROACH TO CONCEPTUAL UNDERSTANDING

Sladjana Dimitrijević

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
sladjana.dimitrijevic@pmf.kg.ac.rs

Students often learn to compute arithmetic mean and expected value procedurally, without developing a clear conceptual understanding. This paper proposes a lever-based model as an intuitive and unifying framework for teaching these concepts through the idea of balance. The model interprets mathematical relationships as equilibrium states on a lever. By varying the fulcrum's position and the distribution of weights, it supports the progressive development of concepts. In particular, the arithmetic mean is introduced as the balance point of equally weighted positions on a number line, while the expected value is interpreted as the center of mass of a system with unequal weights corresponding to probabilities. This structural analogy enables a coherent transition from elementary notions of averaging to probabilistic reasoning, allowing students to build on a single mental model. The paper outlines the theoretical basis of the approach and illustrates its didactical potential.

The proposed model offers a simple yet powerful way to foster conceptual understanding of the arithmetic mean and mathematical expectation, and a foundation for further empirical investigation.

Key words: *arithmetic mean, mathematical expectation, teaching manipulatives, lever model*

References

- [1] R. Borromeo Ferri, *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*, Springer, 2018.
- [2] P. S. Moyer, *Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics*, *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 2001, 175–197.
- [3] D. H. Uttal, K. V. Scudder, J. S. DeLoache, *Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics*, *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 1997, 37–54.
- [4] E. Fischbein, *Intuition in science and mathematics: An educational approach*, Springer, 1987.
- [5] Q. Zou, Y. Sun, *Research on teaching methods of probability theory and mathematical statistics based on modeling ideas*, *Education Reform and Development*, 6(9), 2024, 75–81.

НЕПРЕЦИЗНОСТИ У ФОРМУЛАЦИЈАМА ЗАДАТАКА НА МАТЕМАТИЧКИМ ТАКМИЧЕЊИМА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Милош Ђорић

Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, Србија,
milos.djoric@matf.bg.ac.rs

Математичка такмичења представљају важан облик популаризације математике, нарочито међу ученицима основне школе. Процењује се да се преко 20 хиљада ученика основних школа такмичи из математике на најнижим нивоима, па се управо зато ова такмичења сматрају и најмасовнијим у целој држави. С обзиром на ову чињеницу, успешност реализације ових такмичења умногоме спада на локалне организаторе такмичења. Међутим, још битнији фактор је квалитет самих задатака и њихова усклађеност са Програмом такмичења. У пракси се дешавало да формулације самих задатака садрже одређене непрецизности (математичке, језичке, термилошке), које самим тим код одређених ученика утичу на успешност решавања и крајњи резултат на самом такмичењу. Циљ овог рада је да укаже на такве конкретне примере и начине њиховог превазилажења у пракси у последњих неколико година.

Кључне речи: *математичка такмичења, програм, формулација*

IMPRECISIONS IN THE WORDING OF PROBLEMS IN MATHEMATICS COMPETITIONS FOR PRIMARY SCHOOL STUDENTS ÷

Miloš Đorić÷

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia,
milos.djoric@matf.bg.ac.rs

Mathematics competitions represent an important form of promoting mathematics, especially among primary school students. It is estimated that more than 20,000 primary school students participate in mathematics competitions at the lowest levels, which is why these competitions are considered the most widespread in the entire country. Given this fact, the success of organizing these competitions largely depends on local organizers. However, an even more important factor is the quality of the problems themselves and their alignment with the competition syllabus. In practice, it has been observed that the wording of problems sometimes contains certain

imprecisions (mathematical, linguistic, terminological), which can affect some students' ability to solve them successfully and, consequently, their final results in the competition. The aim of this paper is to highlight such specific examples over the past several years and propose ways to overcome them in practice.

Key words: *mathematical competitions, syllabus, wording*

References

- [1] Група аутора, *1100 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 2015-2024. године*, Друштво математичара Србије, Београд, 2024.

ХИЈЕРАРХИЈСКИ ПРИСТУП СИМЕТРИЈИ У НАСТАВИ ОДРЕЂЕНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

Милан Живановић

Гимназија „Јосиф Панчић“, Бајина Башта, Србија, mzivanovic@vaspks.edu.rs

У раду се презентује методички оквир за обраду напредних техника интеграције, заснован на хијерархијском уочавању симетрије. Полазећи од принципа да је у настави математике неопходно кретати се од визуелно уочљивих ка апстрактним структурама, аутор предлаже редослед излагања који започиње Краљичиним правилом (симетрија граница), наставља се Краљевим правилом (симетрија интервала), а кулминира алгебарском реципрочности.

Овакав редослед омогућава ученицима да примарну интуицију, развијену на симетричним интервалима $[-a, a]$, постепено трансформишу у моћан алат за анализу општих случајева $[a, b]$ и бесконачних домена. У раду су приказани примери који демонстрирају како се препознавањем унутрашње хармоније функције сложени рачунски проблеми своде на елементарне операције, чиме се редукује когнитивно оптерећење и развија истраживачки дух. Рад је намењен наставницима који теже да наставу анализе учине креативнијом и ефикаснијом, стављајући акценат на концептуално разумевање насупрот механичком рачунању.

Кључне речи: *одређени интеграл, симетрија, краљичино правило, краљево правило*

HIERARCHICAL APPROACH TO SYMMETRY IN TEACHING DEFINITE INTEGRATION †

Milan Živanović†

Josif Pancic Gymnasium, Bjina Basta, Serbia, mzivanovic@vaspks.edu.rs

This paper presents a methodical framework for teaching advanced integration techniques, based on the hierarchical identification of symmetry. Starting from the principle that mathematics education must move from visually perceptible to abstract structures, the author proposes a sequence of presentation that begins with the Queen's Rule (symmetry of limits), continues with the King's Rule (symmetry of the interval), and culminates in algebraic reciprocity.

This sequence allows students to gradually transform their primary intuition, developed on symmetric intervals $[-a, a]$, into a powerful tool for analyzing general cases $[a, b]$ and infinite domains. The paper features examples demonstrating how recognizing the internal harmony of a function reduces complex computational problems to elementary operations, thereby lowering cognitive load and fostering an inquisitive spirit. The work is intended for teachers who strive to make the teaching of calculus more creative and efficient, emphasizing conceptual understanding over mechanical calculation.

Key words: *definite integrals, symmetry, queen's property, king's property*

References

- [1] D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza I*, Matematički fakultet, Krug, Beograd, 2008.
- [2] B. J. Gardner, *The King's Property of Definite Integrals*, *The Mathematical Gazette* 86(505), 2002, 90–93.
- [3] G. Polya, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton, 1945.
- [4] J. Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th ed., Cengage Learning, 2015.
- [5] J. Sweller, *Cognitive load during problem solving: Effects on learning*, *Cognitive Science* 12(2), 1988, 257–285.

ПРОЈЕКАТ НАУЧНИ БРОД

Милан Живановић, Александра Ђурић Караклић, Мирјана Радивојевић

Гимназија „Јосиф Панчић“, Бајина Башта, Србија,
mzivanovic@vaspks.edu.rs, aleksandradjuric@gimnazijabb.edu.rs,
dorijangrejbb1@gmail.com

Савремени образовни стандарди захтевају напуштање строго предметно-центричног приступа у корист интегрисаног учења које ученицима омогућава сагледавање природних феномена из више углова. Рад представља концепт пројекта „Научни брод“, осмишљеног као мобилна лабораторија за ученике гимназије током шловидбе кањоном реке Дрине, на релацији између Перућца и Вишеграда.

Циљ пројекта је да се кроз директну опсервацију и истраживачки рад на терену повежу знања из биологије (проучавање ендемита попут Панчићеве оморике и анализа квалитета воде), географије (анализа геоморфологије кањона и утицаја акумулације на животну средину) и математике (практична примена тригонометрије и статистичка обрада података у реалном времену).

У раду се детаљно описује методичка поставка пројекта: од фазе припреме и формулисања истраживачких питања, преко реализације активности на самом броду, до финалне фазе у којој ученици синтетичу податке користећи ИКТ алате. Посебан фокус стављен је на развој критичког мишљења и сарадничких вештина код ученика. Очекивани резултати указују на то да овакав вид амбијенталне наставе драстично повећава мотивацију за учење и трајност усвојених знања, трансформишући пасивног посматрача у активног истраживача у јединственом природном лабораторијуму кањона Дрине.

Кључне речи: *интердисциплинарност, теренска настава, биологија, географија, математика, активно учење*

THE SCIENCE BOAT PROJECT

Milan Živanović, Aleksandra Djurić Karaklić, Mirjana Radivojević

Josif Pancic Gymnasium, Bjina Basta, Serbia
mzivanovic@vaspks.edu.rs, aleksandradjuric@gimnazijabb.edu.rs,
dorijangrejbb1@gmail.com

Modern educational standards necessitate a shift from strictly subject-centric approaches toward integrated learning, enabling students to perceive natural phenomena from multiple perspectives. This paper presents the concept

of the "Science Boat" project, designed as a mobile laboratory for high school (gymnasium) students during a voyage through the Drina River canyon, specifically along the route between Perućac and Višegrad.

The primary objective of the project is to connect knowledge from biology (the study of endemic species such as the Pančić Spruce and water quality analysis), geography (analysis of canyon geomorphology and the environmental impact of artificial reservoirs), and mathematics (practical application of trigonometry and real-time statistical data processing) through direct observation and field research.

The paper details the methodological framework of the project: from the preparation phase and the formulation of research questions to the execution of activities on the boat and the final synthesis of data using ICT tools. Special focus is placed on the development of critical thinking and collaborative skills. Expected outcomes suggest that this form of ambient teaching significantly increases student motivation and the long-term retention of knowledge, transforming passive observers into active researchers within the unique natural laboratory of the Drina canyon.

Key words: interdisciplinarity, field-based learning, biology, geography, mathematics, active learning

References

- [1] J. Кечкић, *Математика са збирком задатака за 4 разред гимназије*, Завод за уџбенике, Београд, 2016.
- [2] С. Станковић (ур), *Дрина*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2005.
- [3] Р. Голић, Д. Шабић, С. Вујадиновић, *Географија 1*, Логос, Београд, 2019.
- [4] Г. Милићев, Љ. Лалић, М. Кокотовић, *Биологија 2 уџбеник за други разред гимназије*, Клет, Београд, 2019.

ГЕОМЕТРИЈСКА МЕСТА ТАЧАКА У РАВНИ \mathbb{R}^2 , КАО КОНВЕКСНИ ИЛИ КОМПАКТНИ СКУПОВИ

Босилка Јовановић

ОШ „Васа Чарапић“, Бели Поток, Београд Србија, bosiljkajovanovic99@gmail.com

Овај рад разматра геометријска места тачака у Еуклидској равни из перспективе конвексних и компактних скупова. Циљ рада је да се анализира како се класични геометријски проблеми могу тумачити применом основних појмова из топологије и конвексне анализе. Посебна пажња посвећена је карактеризацији скупова дефинисаних условима растојања, као и њиховим геометријским и аналитичким својствима. У

раду се такође разматрају услови под којима су такви скупови конвексни и компактни, као и њихов значај у моделовању ситуација из реалног живота. Ове идеје су посебно погодне за примену у настави математике, јер пружају интуитивну везу између геометријске интуиције и апстрактних математичких појмова.

Кључне речи: *геометријска места тачака, конвексни скупови, компактни скупови, унапређење наставе математике*

A GEOMETRIC LOCI IN THE PLANE \mathbb{R}^2 AS CONVEX OR COMPACT SETS

Bosiljka Jovanović

Primary School "Vasa Čarapić", Beli Potok, Belgrade, Serbia,
bosiljakajovanovic99@gmail.com

This paper considers geometric loci in the Euclidean plane from the perspective of convex and compact sets. The aim of the paper is to analyze how classical geometric problems can be interpreted through the application of basic concepts from topology and convex analysis. Special attention is devoted to the characterization of sets defined by distance conditions, as well as to their geometric and analytical properties. The paper also discusses the conditions under which such sets are convex and compact, as well as their significance in modeling real-life situations. These ideas are particularly suitable for application in mathematics teaching, as they provide an intuitive connection between geometric intuition and abstract mathematical concepts. ÷

Key words: *geometric loci, convex sets, compact sets, improvement of teaching mathematics*

КУТАК ЗА МАТЕМАТИЧКИ ТРЕНУТАК

Јелена Кенић

ОШ „Др Драгиша Мишовић“, Чачак, Република Србија, jecakenic@gmail.com

У раду је представљен развој и образовни утицај два међународна eTwinning пројекта „The ABC of mathematicians“, реализована школске 2021/22. и 2023/24. године. Пројекти су окупили 19 наставника из 13 европских земаља, а њихови кључни резултати били су заједнички дигитални речник о славним математичарима, календар у облику додекаедра, као и креирање заједничких едукативних игара путем којих су ученици размењивали знања са иностраним вршњацима. Иако су

обухватали историју математике у целини, у школи је донета стратешка одлука да се истраживачки фокус усмери на допринос жена у математици, информатици и другим техничким наукама, са циљем сузбијања родних предрасуда у овим областима. Рад документарно прати петогодишњи развој ученика: од израде традиционалних хамера у трећем разреду (2021), преко овладавања Web 2.0 алатима, израде презентација и дигиталних календара на енглеском језику у петом разреду (2023), до потпуне ученичке аутономије у седмом разреду (2026). Данас ова група седамка самостално води и уређује школски подкаст, односно YouTube канал „Кутак за математички тренутак“, трансформишући своја сазнања о научницама у трајне дигиталне ресурсе. Оба пројекта су награђена Националним и Европским ознакама квалитета, што потврђује њихову вредност као одрживог модела за развој дигиталне писмености и ученичке иницијативности.

Кључне речи: *жене у математици, eTwinning, школски подкаст, ученичка аутономија, дигитална писменост*

THE MATH MOMENT CORNER

Jelena Kenić

Primary School “Dr Dragiša Mišović”, Čačak, Serbia, jecakenic@gmail.com

This paper presents the development and educational impact of two international eTwinning projects, “The ABC of mathematicians”, implemented during the 2021/22 and 2023/24 school years. The projects involved 19 teachers from 13 European countries, with key outcomes including a collaborative digital A-Z dictionary of famous mathematicians, a dodecahedron-shaped calendar, and the creation of shared educational games through which students exchanged knowledge with their international peers. Although the projects covered the history of mathematics as a whole, a strategic decision was made at the school level to focus research on women's contributions to mathematics, computer science, and other technical fields, aiming to challenge gender prejudices in these areas. The paper provides a documentary tracking of the students' five-year development: from creating traditional posters in the third grade (2021), through mastering Web 2.0 tools and developing presentations and digital calendars in English in the fifth grade (2023), to achieving full student autonomy in the seventh grade (2026). Today, this group of seventh-graders independently hosts and edits the school podcast – specifically the YouTube channel “Kutak za matematički trenutak” – transforming their insights about female scientists into permanent digital resources. Both projects were awarded National and European Quality Labels, confirming their value as

a sustainable model for developing digital literacy and student agency within the teaching process.

Key words: *women in mathematics, eTwinning, school podcast, student autonomy, digital literacy*

References

- [1] А. Р. Даниловић, *ПАРИЗматичан eTwinning*, Књига апстраката ТЕМАТСОМ 2024, Крагујевац, 2024, 49.
- [2] Н. А. Васојевић, И. А. Васојевић, Н. Кнежевић-Лукић, *Настава математике у Вишој женској школи (1863-1904)*, Књига апстраката ТЕМАТСОМ 2024, Крагујевац, 2024, 46.
- [3] Kutak za matematički trenutak - YouTube channel, <https://www.youtube.com/@Kutakzamatematickitrenutak>
- [4] А. Стевановић и сар., *Изазови и могућности: презентација ефективних метода популаризације математике кроз међународну сарадњу*, Књига апстраката ТЕМАТСОМ 2024, Крагујевац, 2024, 61.
- [5] European School Education Platform - <https://school-education.ec.europa.eu/>

ВИ У МАТЕМАТИЧКОЈ ГАЛЕРИЈИ

Јелена Кенић, Мирјана Глишић

ОШ „Др Драгиша Мишовић“, Чачак, Република Србија,
jecakenic@gmail.com, glisic.mirjana2@gmail.com

Савремена настава математике суочава се са изазовом како ојачати мотивацију ученика. У раду је приказана иновативна радионица „ВИ у математичкој галерији“, реализована као угледни час у мешовитим групама ученика (3, 5. и 7. разред). Циљ активности био је да се математика прикаже као алат за креирање дигиталне уметности помоћу вештачке интелигенције (ВИ). Ученици су решавали задатке из геометрије (обим), дељивости (НЗС/НЗД) и алгебре (степени), а тачне резултате су користили као параметре за „prompt engineering“ – писање текстуалних упутстава за ВИ алат ДеерАИ. Промптови су писани на енглеском језику уз помоћ ауторске „Књиге речи“ и Google Translate-а, чиме је остварена међупредметна повезаност са страним језиком. Старији ученици (седмаци) су преузели улогу ментора млађим друговима и присутним родитељима. Најважнији исход радионице је развој критичког мишљења: ученици су увидели да квалитет генерисане слике зависи искључиво од њихове математичке прецизности, јер свака грешка у прорачуну води ка лошијем визуелном резултату. Рад нуди модел који математику из скупа правила трансформише у оперативни код за креативно изражавање.

Кључне речи: *вештачка интелигенција, промптови, математика, енглески језик, вршњачко менторство*

AI IN THE MATHEMATICAL GALLERY

Jelena Kenić, Mirjana Glišić

Primary School "Dr Dragiša Mišović", Čačak, Serbia,
jecakenic@gmail.com, glisic.mirjana2@gmail.com

Modern mathematics teaching faces the challenge of strengthening student motivation. This paper presents an innovative workshop, "AI in the Mathematical Gallery", implemented as an exemplary lesson in mixed-age groups (grades 3, 5, and 7). The goal was to present mathematics as a tool for creating digital art using artificial intelligence (AI). Students solved problems in geometry (perimeter), divisibility (LCM/GCD), and algebra (powers), using the accurate results as parameters for "prompt engineering" – writing instructions for the DeepAI tool. Prompts were written in English using an original "Word Book" and Google Translate, establishing a cross curricular connection with foreign languages. Seventh-graders acted as mentors to younger students and parents. The most significant outcome was the development of critical thinking: students realized that the quality of the generated image depends entirely on their mathematical precision, as any calculation error led to visual degradation. This work offers a model that transforms mathematics from a set of rules into an operational code for creative expression.

Key words: *artificial intelligence, prompts, mathematics, English language, peer mentoring*

References

- [1] А. Капларевић Малишић, *Генеративна вештачка интелигенција као подршка у настави: могућности, изазови и примери*, Књига апстраката ТЕМАТСОМ 2024, Крагујевац, 2024, 12.
- [2] К. Вељковић, *ESCAPE ROOM*, Књига апстраката ТЕМАТСОМ 2024, Крагујевац, 2024, 47.
- [3] В. Андрић, *STREAM варијације на тему површина квадрата и правоугаоника*, Књига апстраката ТЕМАТСОМ 2024, Крагујевац, 2024, 45.
- [4] С. Димитријевић, А. Миленковић, Т. Здрахал, *Истраживање интуитивног разумевања вероватноће код ученика основних школа*, Књига апстраката ТЕМАТСОМ 2024, Крагујевац, 2024, 20.

ДИДАКТИЧКИ ЗНАЧАЈ ЛИНЕАРНОГ ХАРМОНИЈСКОГ ОСЦИЛАТОРА ЗА УЧЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Милан Ковачевић¹, Мирослав Јовановић²

¹ Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац, Србија, ² Гимназија “Јосиф Панчић” Бајина Башта, Србија
kovac@kg.ac.rs, mjovanovic34@gmail.com

У пракси, сваки професор математике и физике се бар једном сусрео са питањима ученика: „Због чега морамо да учимо математику/физику?“, „Какве везе са реалним животом има ово што радимо?“ и „Где се ово примењује?“. Одговори на оваква питања, који би ученике мотивисали и подстакли њихово разумевање, нису једноставни. У овом раду разматра се дидактички значај линеарног хармонијског осцилатора у настави математике, са посебним акцентом на учење и разумевање диференцијалних једначина другог реда. Истражује се како физички системи, као што су слободне, пригушене и принудне осцилације, природно воде до различитих облика диференцијалних једначина и њихових решења. Показује се да експериментална посматрања осцилаторног кретања омогућавају ученицима да визуализују и интерпретирају математичке резултате, чиме се повећава мотивација и разумевање апстрактних математичких концепата. Рад такође истиче интердисциплинарни приступ, повезујући физику и математику, и указује на могућности примене овог метода у настави различитих узраста и нивоа образовања.

Кључне речи: *диференцијалне једначине, линеарни хармонијски осцилатор, слободне и пригушене осцилације*

THE DIDACTIC SIGNIFICANCE OF THE LINEAR HARMONIC OSCILLATOR FOR LEARNING DIFFERENTIAL EQUATIONS

Milan Kovačević¹, Miroslav Jovanović²

¹ University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
² High School “Josif Pančić”, Bajina Bašta, Serbia,
kovac@kg.ac.rs, mjovanovic34@gmail.com

In practice, every mathematics and physics teacher has at some point encountered students' questions such as: “Why do we have to learn

mathematics/physics?", "What is the connection of this to real life?", and "Where is this applied?". Providing answers that both motivate students and enhance their understanding is not straightforward. This paper examines the didactic significance of the linear harmonic oscillator in mathematics education, with a particular focus on learning and understanding second-order differential equations. It explores how physical systems, such as free and forced oscillations, naturally lead to various forms of differential equations and their solutions. It is shown that experimental observations of oscillator motion allow students to visualize and interpret mathematical results, thereby increasing motivation and comprehension of abstract mathematical concepts. The paper also highlights an interdisciplinary approach that links physics and mathematics and points out the potential application of this method across different educational levels and age groups. ÷

Key words: differential equations, linear harmonic oscillator, free and damped oscillations ÷

References

- [1] H. R., Andreevski, D., Paul, D., M. Šterk, R. Repnik, *Teaching of the harmonic oscillator damped by a constant force: The use of analogy and experiments*. American Journal of Physics, 2018, 86(9), 657-662.
- [2] N. Gauthier, *Novel approach for solving the equation of motion of a simple harmonic oscillator*, Int J Math Educ Sci Technol. 2004, 35(3):446-452.
- [3] C. C. Tisdell, *An, accessible, justifiable and transferable pedagogical approach for differential equations of simple harmonic motion*, 2018, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol.50 950-959.
- [4] E. Losada, C. Guerrero-Ortiz, A. Coronel R. Medina, *Proposal of a Mathematical Modelling Activity to Facilitate Students' Learning of Ordinary Differential Equation Concepts*, 2023, Sustainability,15(16), 12483.

ДИГИТАЛНА ПИСМЕНОСТ ВАСПИТАЧА КАО ДЕТЕРМИНАНТА КВАЛИТЕТА САВРЕМЕНЕ ВАСПИТНО-ОБРАЗОВНЕ ПРАКСЕ

Марија Крстић Радојковић

Универзитет у Крагујевцу, Факултет педагошких наука,
Јагодина, Србија, marijakrstic016@hotmail.com

Савремени образовни контекст обележен је дигиталном трансформацијом која условљава редефинисање професионалних компетенција васпитача. Дигитална писменост се не може посматрати

искључиво као скуп техничких вештина, већ као вишедимензионалан конструкт који обухвата критичке, безбедносне и социјалне аспекте примене технологије у пракси.

Циљ истраживања је испитивање нивоа дигиталне писмености васпитача у Србији и утврђивање утицаја социодемографских и професионалних варијабли на њену развијеност. Истраживање је спроведено у Републици Србији на узорку од 90 васпитача применом DLAS скале [1]. Подаци су обрађени у програму SPSS применом Kolmogorov-Smirnov теста, дескриптивне статистике, t-теста, једнофакторске анализе варијансе (ANOVA) и корелационе анализе, уз проверу поузданости помоћу Cronbach α коефицијента.

Резултати указују на неуједначену развијеност дигиталне писмености. Највиши ниво уочен је у домену основних техничких вештина, док су нижи резултати забележени у области критичке анализе садржаја, безбедности на интернету и сложеније примене технологије. Утврђене су значајне разлике у односу на образовање, похађање обука и учесталост коришћења технологије.

Закључци истраживања показују да дигитална писменост представља важан фактор квалитета савремене васпитно-образовне праксе, али истовремено указују на неслагање између техничке опремљености и стварне компетентности васпитача. Посебно се уочавају изазови у домену критичке анализе дигиталних садржаја, безбедносних пракси и сложенијих облика примене технологије. Добијени резултати додатно указују на значај осмишљавања и примене акредитованих програма стручног усавршавања који су усклађени са реалним потребама васпитача и усмерени ка развоју критичке и безбедне употребе дигиталних технологија у пракси.

Кључне речи: *дигитална писменост, васпитачи, дигиталне компетенције, предшколско образовање, DLAS*

DIGITAL LITERACY OF PRESCHOOL TEACHERS AS A DETERMINANT OF THE QUALITY OF CONTEMPORARY EDUCATIONAL PRACTICE

Marija Krstić Radojković

University of Kragujevac, Faculty of Education, Jagodina, Serbia,
marijakrstic016@hotmail.com

The contemporary educational context is marked by digital transformation, which requires a redefinition of preschool teachers' professional competencies. Digital literacy cannot be viewed solely as a set of

technical skills, but rather as a multidimensional construct encompassing critical, safety-related, and social aspects of the use of technology in practice.

The aim of the study is to examine the level of digital literacy among preschool teachers in Serbia and to determine the influence of sociodemographic and professional variables on its development. The study was conducted in the Republic of Serbia on a sample of 90 preschool teachers using the DLAS scale (Acar, 2015). The data were processed in SPSS using the Kolmogorov-Smirnov test, descriptive statistics, the t-test, one-way analysis of variance (ANOVA), and correlation analysis, with reliability tested by means of Cronbach's alpha coefficient.

The results indicate an uneven development of digital literacy. The highest level was observed in the domain of basic technical skills, while lower results were recorded in the areas of critical content analysis, internet safety, and more complex uses of technology. Significant differences were found with respect to education, attendance at training programs, and frequency of technology use.

The conclusions of the study show that digital literacy is an important factor in the quality of contemporary educational practice, but they also point to a discrepancy between technical equipment and the actual competence of preschool teachers. Challenges are particularly evident in the domains of critical analysis of digital content, safety practices, and more complex forms of technology use. The obtained results further indicate the importance of designing and implementing accredited professional development programs aligned with the real needs of preschool teachers and focused on developing the critical and safe use of digital technologies in practice. ÷

Key words: digital literacy, preschool teachers, digital competencies, preschool education, DLAS

References ÷

- [1] Ç. Acar, *Anne ve babaların ilkököl ortaokul lise öğrencisi çocukları ile kendilerinin dijital okuryazarlıklarına ilişkin görüşleri* (Parents' and students' views on digital literacy), Master's thesis, 2015.
- [2] M. Korkmaz, A. O. Akçay, *Determining the Digital Literacy Levels of Primary School Teachers*, *Journal of Learning and Teaching in Digital Age*, 9(1), 2024, 1-16.
- [3] W. Ng, *Can we teach digital natives digital literacy?*, *Computers & Education*, 59, 2012, 1065-1078.

ТЕМАТСКЕ РАДИОНИЦЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Марија Кузелевић¹, Славица Бероња²

¹ОШ „Ђорђе Натoшевић“, Нови Сад, Србија, ²ОШ „Славко Родић“, Крајишник, Србија, marija.kuzeljevic@dms.rs, slavkavlatko2010@gmail.com

У савременом добу све већи изазов у настави математике представља мотивација ученика и њихово активно укључивање у процес учења. Један од начина да се математика приближи ученицима јесте обележавање значајних математичких датума кроз интерактивне активности.

У оквиру излагања биће приказани примери добре праксе кроз тематске радионице поводом Дана броја π и Фибоначијевог дана. Кроз игре, истраживачке и креативне задатке ученици имају прилику да математику доживе на другачији начин, повезујући је са свакодневним животом, уметношћу и природом.

Посебан акценат биће на активностима које подстичу тимски рад, логичко размишљање и креативност, као и на начинима мотивисања ученика за активно учење. Биће приказани и примери задатака и организације активности који се лако могу применити у наставној пракси.

Циљ излагања је да укаже на значај тематских радионица као једноставног и ефикасног приступа унапређивању наставе математике и развијању позитивног односа ученика према предмету.

Кључне речи: Дан броја π , Фибоначијев дан, радионице

THEMATIC WORKSHOPS IN MATHEMATICS EDUCATION +

Marija Kuzeljević¹, Slavica Beronja²⁺

¹ Primary School “Djordje Natošević”, Novi Sad, Serbia, ²Primary School “Slavko Rodić”, Krajišnik, Serbia, marija.kuzeljevic@dms.rs, slavkavlatko2010@gmail.com

In the modern age, one of the growing challenges in mathematics teaching is motivating students and actively involving them in the learning process. One way to bring mathematics closer to students is by marking important mathematical dates through interactive activities.

As part of the presentation, examples of good practice will be shown through thematic workshops organized on the occasion of π Day and Fibonacci Day. Through games, exploratory tasks, and creative activities, students have

the opportunity to experience mathematics in a different way, connecting it with everyday life, art, and nature.

Special emphasis will be placed on activities that encourage teamwork, logical thinking, and creativity, as well as on ways of motivating students to participate actively. Examples of tasks and activity organization that can easily be applied in teaching practice will also be presented.

The aim of the presentation is to point out the importance of thematic workshops as a simple and effective approach to improving mathematics teaching and developing a positive attitude of students toward the subject.

Key words: π Day, Fibonacci Day, workshops

References

- [1] P. Liljedahl, *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K–12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*, Corwin Press, 2020.
- [2] D. Vilotijević, *Didaktika 1*, Naučna knjiga, Beograd, 1999.
- [3] J. Boaler, *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*, Jossey-Bass, San Francisco, 2016.

ПОВРШИНЕ У ГЕОМЕТРИЈСКИМ ЗАДАЦИМА НА НАЦИОНАЛНИМ ТАКМИЧЕЊИМА

Катарина Лукић

Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, Република Србија,
katarina.lukic@matf.bg.ac.rs

Појам површине правоугаоника ученици упознају у редовној настави у нижим разредима основне школе. У шестом разреду се сусрећу са формулама за израчунавање површина троуглова и четвороуглова попут паралелограма, трапеза и делтоида. У оквиру редовне наставе ученици углавном решавају шаблонске задатке, директном применом формула. Пракса показује да се концепту површина у редовној настави не приступа темељно и на напредном нивоу који је потребан за решавање сложених геометријских задатака на националним такмичењима.

У овом раду посебан акценат ће бити стављен на развој геометријске интуиције, визуелизације, мотивације за доцртавање нових геометријских објеката и њихово упоређивање.

Циљ рада је да покаже пут и начин решавања сложених геометријских задатака кроз повезивање површине као теме са битним геометријским појмовима као што су значајне тачке троугла, тежишне дужи, средње линије, подударност и сличност троуглова, Питагорина и

Талесова теорема. Овакав приступ је користан јер повећава постигнуће ученика на националним такмичењима.

У раду ће бити приказана примена неких мање познатих, али веома примењивих тврђења о површинама која могу олакшати решавање сложених геометријских задатака на националним такмичењима. Рад ће садржати приказ ситуације, геометријског проблема и приказ решења кроз неколико добрих примера из школске праксе.

Кључне речи: *геометријски проблеми, површина, додатна настава из математике, национална такмичења*

AREAS IN GEOMETRIC PROBLEMS AT NATIONAL COMPETITIONS

Katarina Lukić

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Republic of Serbia,
katarina.lukic@matf.bg.ac.rs

Students are introduced to the concept of the area of a rectangle during regular mathematics instruction in the lower grades of primary school. In the sixth grade, they encounter formulas for calculating the areas of triangles and quadrilaterals, such as parallelograms, trapezoids, and deltoids. Within the standard curriculum, students predominantly solve routine problems through the direct application of formulas. Practice indicates that the concept of area is often not approached with the depth or advanced level required for solving complex geometric problems encountered in national competitions.

In this paper, a particular emphasis is placed on the development of geometric intuition, visualization, and the motivation for constructing auxiliary geometric objects and their comparison. The aim of this work is to demonstrate methods for solving complex geometric tasks by linking the topic of area with fundamental geometric concepts, such as centers of a triangle, medians, midlines, congruence and similarity of triangles, and the Pythagorean and Thales' theorems. This approach is beneficial as it enhances student performance in national competitions.

The paper will present the application of several lesser-known but highly applicable propositions regarding areas that can facilitate the resolution of intricate geometric problems. Furthermore, the work will include an overview of specific scenarios and geometric problems, providing solutions through several illustrative examples from teaching practice.

Key words: *geometric problems, area, advanced mathematics classes, national competitions*

References

- [1] В. Балтић, Д. Ђукић, Ђ. Кртинић, И. Матић, *ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ за математичка такмичења средњошколаца у Србији*. Збирка решених задатака, Друштво математичара Србије, Београд, 2011.
- [2] В. Драговић, П. Младеновић, С. Огњановић, *ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА ЗА УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА*, Друштво математичара Србије, Београд, 1999.
- [3] Државна комисија за математичка такмичења ученика основних школа, *1100 ЗАДАТАКА са математичких такмичења ученика основних школа 2015-2024. године*, Друштво математичара Србије, Београд, 2024.
- [4] Материјали за младе математичаре, *РЕПУБЛИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 1959-2000*, Друштво математичара Србије, Београд, 2000.
- [5] В. Стојановић, *Инострана такмичења основаца*, Математископ, Београд, 2010.

МАТЕМАТИЧКИ ГЕНЕЗИС: ОД АНАЛОГНОГ КОРЕНА ДО ДИГИТАЛНОГ ПЛОДА

Јасминка Марић-Глишовић

ОШ „Вук Караџић“, Чачак, Србија, [jasnamaricglisovic@gmail](mailto:jasnamaricglisovic@gmail.com)

Да ли је могуће обухватити бесконачност броја π обичним памучним канапом и претворити дечји корак у прецизан алгоритам? Овај рад деконструира традиционалне оквире наставе, представљајући математику као живу, опипљиву силу која пулсира изван зидова учионице. Кроз концепт „Математичког генезиса“, ученици пролазе развојни пут који су прешли највећи умови човечанства: од Архимедових кругова исцртаних у песку, преко тактилног истраживања природе „штапом и канапом“, до софистицираног света QR кодова и роботике.

Циљ рада је приказ иновативног модела који трансформише апстрактне математичке константе у чулно искуство. Процес почиње архаичним мерењима у амбијенталној настави („Парк знања“), где се кроз СТЕМ приступ и НТЦ принципе развија функционална писменост. Посебан фокус је на „Zero Waste“ концепту израде наставних средстава, где рециклирани материјал и природни предмети постају дидактички артефакти. Кулминација процеса је имплементација мобилне роботике, где ученици програмирају путање робота кроз математичке лавиринте, повезујући тиме аналогно порекло са дигиталном будућношћу. Евалуацијом је утврђено да описане активности позитивно утичу на мотивацију ученика, доказујући да математика, када се врати у руке детета, постаје језик разумевања света.

Кључне речи: *математички генезис, учење без зидова, Архимедови кругови, роботика, рециклажа*

MATHEMATICAL GENESIS: FROM ANALOG ROOTS TO DIGITAL FRUIT ÷

Jasminka Marić-Glišović ÷

Primary School "Vuk Karadžić", Čačak, Serbia, jasnamaricglisovic@gmail.com ÷

Is it possible to encompass the infinity of Pi with a simple cotton string and transform a child's step into a precise algorithm? This paper deconstructs traditional teaching frameworks, presenting mathematics as a living, tangible force pulsating beyond the classroom walls. Through the concept of "Mathematical Genesis", students traverse the developmental path of humanity's greatest minds: from Archimedes' circles in the sand, through tactile nature exploration using "sticks and strings", to the sophisticated world of QR codes and robotics.

The aim is to demonstrate an innovative model that transforms abstract mathematical constants into sensory experiences. The process begins with archaic measurements in ambient learning settings, utilizing STEM and NTC principles to develop functional literacy. A special focus is placed on the "Zero Waste" concept, where recycled and natural materials are repurposed into didactic artifacts. The process culminates in mobile robotics implementation, where students program robot trajectories through mathematical labyrinths, bridging analog origins with a digital future. The evaluation found that the described activities have a positive impact on student motivation, proving that mathematics, when returned to a child's hands, becomes the language for understanding the world.

Key words: *mathematical genesis, outdoor learning, Archimedean circles, robotics, recycling* ÷

References

- [1] Р. Рајовић, *IQ детета – брига родитеља (NTC систем учења)*, Нови Сад, 2011.
- [2] I. Harel, S. Papert, *Constructionism*, Ablex Publishing, 1991.
- [3] UNESCO, *Digital Literacy in Education*, Policy Brief, 2011.

КУРИКУЛУМ МАТЕМАТИКЕ: ОД ИСТОРИЈСКИХ ОСНОВА ДО САВРЕМЕНИХ ИЗАЗОВА И НАСТАВНЕ ПРАКСЕ

Божидар Милановић¹, Милан Грујин²

¹ Гимназија Младеновац, Младеновац, Србија, ² Школска управа Нови Сад, Нови Сад, Србија, milanovic.boza@gmail.com, milan.grujin@gmail.com

У раду се анализира курикулум математике кроз призму његовог историјског развоја, различитих теоријских одређења и савремених образовних захтева. Полазећи од кључних концепција курикулума, даје се кратак преглед еволуције његовог разумевања, као и анализа основних карактеристика савременог курикулума у контексту актуелних образовних стандарда. Посебна пажња посвећена је степену усклађености важећег курикулума у Републици Србији са савременим педагошким приступима, укључујући диференцирану наставу, пројектно учење и примену информационо-комуникационих технологија. У раду се разматрају могућности унапређења наставне праксе кроз примену елемената вештачке интелигенције, као и повезивање садржаја математике са сродним наставним предметима. Посебан сегмент односи се на прилагођавање курикулума различитим групама ученика, укључујући даровите ученике и ученике који раде по индивидуалном образовном плану (ИОПЗ), уз конкретне предлоге за прилагођавање наставних садржаја. Рад такође обухвата компаративни осврт на присуство савремених наставних приступа у земљама региона, као и анализу заступљености и начина увођења тема вероватноће и статистике и тригонометрије у наставни процес, илустровану примерима добре праксе.

Кључне речи: *курикулум, стандарди, диференцијација, ИОПЗ, пројектна настава*

MATHEMATICS CURRICULUM: FROM HISTORICAL FOUNDATIONS TO CONTEMPORARY CHALLENGES AND TEACHING PRACTICE

Božidar Milanović¹, Milan Grujin²

¹Gymnasium Mladenovac, Mladenovac, Serbia, ²School Administration Office Novi Sad, Novi Sad, Serbia, milanovic.boza@gmail.com, milan.grujin@gmail.com

This paper analyzes the mathematics curriculum through the lens of its historical development, various theoretical definitions, and contemporary educational demands. Starting from the key curriculum concepts, a brief overview of the evolution of curriculum understanding is provided, along with the analysis of the main characteristics of the modern curriculum in the context of current educational standards. Special attention is given to the degree of accordance of the current curriculum in the Republic of Serbia with contemporary pedagogical approaches, including differentiated instruction, project-based learning, and the use of information and communication technologies. The paper examines possibilities for improving teaching practice through the application of AI elements, as well as the integration of mathematics with related subjects. A particular segment focuses on adapting the curriculum to different groups of students, including gifted students and those following an Individualized Education Plan (IEP3), offering concrete suggestions for adapting teaching content. The paper also includes a comparative overview of the presence of modern teaching approaches in countries in the region, as well as an analysis of the representation and introduction of probability and statistics and trigonometry in the curriculum, illustrated with examples of good practice.

Key words: curriculum, standards, differentiated instruction, IEP3, project-based learning

References

- [1] J. Vuković, B. R. Milanović, *Making Mathematics Easy for Every Student*, seminar materials, Catalogue No. 404.
- [2] Institute for the Improvement of Education (ZUOV), *Formative Assessment*, seminar materials.

ИНТЕГРАЦИЈА АЛАТА NOTEBOOKLM У НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ КРОЗ МОДЕЛ ИЗОКРЕНУТЕ УЧИОНИЦЕ

*Александар Миленковић, Немања Вучићевић,
Марина Свичевић*

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs, nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs,
marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs

Модел изокренуте учионице интегрише два комплементарна сегмента: компјутерски потпомогнуте самосталне инструкције ван школе и колаборативно учење унутар учионице. Процес се може детаљније посматрати кроз три хронолошке етапе: активности пре, током и након часа. У припремној фази (пре наставе у учионици), ученицима се прослеђује пажљиво креиран или одабран дигитални наставни материјал, попут видео-лекција, подкаста или презентација који они самостално истражују, бележећи кључне тачке или питања. Ова етапа представља темељ за непосредни рад у учионици, где се претходно усвојене информације примењују. На почетку часа или непосредно пре часа, наставник треба да процени разумевање онога што су ученици научили код куће. У припреми поменутих наставних материјала и формативне процене наученог пре часа математике, наставници могу користити различите платформе и алате. Озбиљан потенцијал у овом контексту припреме различитих дигиталних наставних материјала, заснованих на конкретним садржајима које је наставник издвојио и одредио да их ученици самостално савладају, има алат вештачке интелигенције NotebookLM. Рад анализира потенцијал овог алата вештачке интелигенције у контексту специфичних математичких садржаја, нудећи практичне смернице и примере за наставнике који теже оптимизацији модела изокренуте учионице.

Кључне речи: изокренута учионица, настава математике, дигитални наставни материјали, NotebookLM, вештачка интелигенција у образовању

INTEGRATING NOTEBOOKLM IN MATHEMATICS EDUCATION USING THE FLIPPED CLASSROOM APPROACH

Aleksandar Milenković, Nemanja Vučićević, Marina Svičević

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs, nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs,
marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs

The flipped classroom model integrates two complementary segments: computer-assisted independent instruction outside the school setting and collaborative learning within the classroom. This process can be examined through three distinct chronological stages: pre-class, in-class, and post-class activities. During the preparatory phase (prior to in-class instruction), students are provided with carefully designed or curated digital learning materials – such as video lectures, podcasts, or presentations – which they explore independently while noting key points or questions. This stage serves as the foundation for direct classroom engagement, where previously acquired information is applied. At the beginning of the lesson, or preceding it, the teacher assesses the students' understanding of the material studied at home. In preparing these instructional materials and conducting formative assessments for mathematics lessons, teachers can utilize various platforms and tools. Within this context, the artificial intelligence tool NotebookLM shows significant potential for developing diverse digital learning materials based on specific content selected by the teacher for student self-mastery. This paper analyzes the potential of this AI tool within the framework of specific mathematical content, offering practical guidelines and examples for educators striving to optimize the flipped classroom model.

Keywords: *flipped classroom, mathematics education, digital learning materials, NotebookLM, artificial intelligence in education*

References

- [1] A. Banihashemi, A. Shahriary, Y. Yaghoobzadeh, *Human vs NotebookLM for Educational Podcasts: A Controlled Experiment on Two General Topics*, in 15th International Conference on Computer and Knowledge Engineering (ICCKE), IEEE, 2025, 1–6.
- [2] L. Dan, H. Mohamed, Z. Yue, *A Review on the Effect of Integrating AI-Based Technology into Flipped Learning*, Innovative Teaching and Learning Journal, 7(2), 2023, 41–50.
- [3] D. López-Villanueva, R. Santiago, R. Palau, *Flipped Learning and Artificial Intelligence*, Electronics, 13, 2024, 3424.

ПРОМОЦИЈА МАТЕМАТИКЕ ИНТЕГРАЦИЈОМ ТАКМИЧЕЊА „КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА“, ЧАСОПИСА ЗА УЧЕНИКЕ, ВЕБ-ПЛАТФОРМЕ И YOUTUBE КАНАЛА

*Александар Миленковић¹, Марина Свичевић¹, Невена Петровић²,
Теодора Љујић¹, Марко Дабић¹, Немања Вучићевић¹, Јелена Стеванић¹*

¹ Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац, Србија, ² Универзитет у Крагујевцу, Факултет за машинство и грађевинарство, Краљево, Србија, aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs, marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs, nevena.z.petrovic@pmf.kg.ac.rs, teodora.trifunovic@pmf.kg.ac.rs, marko.dabic@pmf.kg.ac.rs, nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs, jelena.dimitrijevic@pmf.kg.ac.rs

У овом раду представимо иновативан приступ промоцији математике заснован на интеграцији такмичења „Кенгур без граница“, ученичког часописа „Математички лист“, образовне веб-платформе и YouTube канала са видео-решењима задатака. Циљ овог приступа је повећање интересовања ученика за учење математике, подстицање самосталног учења и развој математичке писмености кроз комбиновање формалних и неформалних облика образовања.

Савремени трендови у образовању указују на значај хибридног учења, дигиталних платформи и видео-садржаја као подршке учењу, док такмичење „Кенгур без граница“ представља један од најраспрострањенијих начина популаризације математике међу ученицима. Полазећи од значаја развоја математичке писмености и потребе за већом ангажованошћу ученика, интегрисали смо задатке који одговарају концепту задатака са такмичења са интерактивним начином решавања на веб-платформи (уз добијање повратне информације), као и са детаљним видео-решењима доступним на YouTube каналу. На тај начин ученици имају могућност да уче сопственим темпом и продубљују разумевање кроз различите формате. Подаци о коришћењу видео-материјала, укључујући велики број прегледа појединих решења, указују на то да овакав приступ допире до значајног броја ученика и представља ефикасан вид подршке учењу математике ван школског окружења. Интеграција различитих ресурса доприноси већој доступности садржаја и подстиче интересовање за решавање математичких проблема. Планирана даља истраживања усмерена су на испитивање ставова ученика о овом интегрисаном приступу и на анализу његовог утицаја на постигнућа ученика.

Кључне речи: промоција математике, хибридно учење, „Кенгур без граница“, „Математички лист“, видео-материјали, математичка писменост

PROMOTION OF MATHEMATICS THROUGH THE INTEGRATION OF THE MATHEMATICAL KANGAROO COMPETITION, A STUDENT JOURNAL, A WEB PLATFORM, AND A YOUTUBE CHANNEL

Aleksandar Milenković¹, Marina Svičević¹, Nevena Petrović², Teodora Ljujić¹, Marko Dabić¹, Nemanja Vučićević¹, Jelena Stevanić¹

¹ University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia, ² University of Kragujevac, Faculty of Mechanical and Civil Engineering, Kraljevo, Serbia, aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs, marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs, nevena.z.petrovic@pmf.kg.ac.rs, teodora.trifunovic@pmf.kg.ac.rs, marko.dabic@pmf.kg.ac.rs, nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs, jelena.dimitrijevic@pmf.kg.ac.rs

This paper presents an innovative approach to the promotion of mathematics based on the integration of the Mathematical Kangaroo competition, the student magazine "Matematički list", an educational web platform, and a YouTube channel featuring video solutions to mathematical problems. The primary objective of this approach is to increase students' interest in learning mathematics, encourage autonomous study, and develop mathematical literacy by combining formal and informal educational frameworks.

Contemporary educational trends highlight the significance of hybrid learning, digital platforms, and video content as learning support tools, while the Mathematical Kangaroo competition remains one of the most widespread methods for popularizing mathematics among students. Recognizing the importance of mathematical literacy and the need for greater student engagement, we have integrated competition tasks with an interactive problem-solving method on a web platform – providing immediate feedback – alongside detailed video solutions available on YouTube. In this manner, students are given the opportunity to learn at their own pace and deepen their understanding through various formats. Data regarding the utilization of video materials, including high view counts for specific solutions, indicate that this approach reaches a significant number of students and serves as an effective form of mathematical learning support outside the traditional school environment. The integration of diverse resources contributes to greater content accessibility and fosters interest in mathematical problem-solving. Future research will focus on examining student attitudes toward this integrated

approach and analyzing its impact on both students' interest and academic achievement.

Key words: *promotion of mathematics, hybrid learning, Mathematical Kangaroo competition, "Matematički list", video materials, mathematical literacy*

ОДРЕЂИВАЊЕ БРОЈА π КРОЗ МУЛТИДИСЦИПЛИНАРНИ STEM ПРИСТУП

Далибор Рајковић

Гимназија Ђуприја, Ђуприја, Србија, d.rajkovicrs@gmail.com

Број π представља једну од фундаменталних математичких константи која се јавља у различитим областима математике, физике и информатике и рачунарства. Иако се у редовној настави најчешће уводи кроз геометријске садржаје, његова примена је знатно шира и омогућава повезивање више научних дисциплина у оквиру савременог STEM приступа. Такав приступ доприноси функционалном повезивању знања и развоју истраживачког начина размишљања код ученика.

У раду је приказан модел одређивања броја π кроз три међусобно повезана приступа: експериментални, аналитички и нумерички. Експериментални приступ заснива се на примени математичког клатна, мерењем периода осциловања за различите дужине клатна и израчунавање вредности броја π .

Посебна пажња посвећена је условима примене овог модела, пре свега ограничењу малих углова отклона, као и анализи грешака мерења, као што су неодређеност дужине клатна, реакционо време при мерењу периода и утицај отпора ваздуха.

Аналитички приступ омогућава повезивање експерименталних резултата са теоријским моделом и показује да број π није искључиво геометријска константа, већ величина која се природно јавља и у опису периодичних појава. Нумерички приступ реализује се применом Monte Carlo методе, засноване на случајном генерисању великог броја тачака у квадрату са уписаним кругом. На основу односа броја тачака које припадају кругу и укупног броја генерисаних тачака добија се апроксимација број π .

Поређењем вредности добијених различитим методама и анализом апсолутних и релативних грешака ученици развијају критичко мишљење, разумевање ограничења модела и значаја апроксимације у природним наукама. Предложени модел представља пример мултидисциплинарне STEM наставе у којој се кроз један математички појам истовремено развијају експерименталне, аналитичке и алгоритамске компетенције.

Кључне речи: број π , математичко клатно, Monte Carlo метода, STEM приступ

DETERMINING THE NUMBER π THROUGH A MULTIDISCIPLINARY STEM APPROACH

Dalibor Rajković

Gymnasium of Ćuprija, Ćuprija, Serbia, d.rajkovicrs@gmail.com

The number π represents one of the fundamental mathematical constants that appear in various fields of mathematics, physics, informatics, and computer science. Although it is most commonly introduced in regular teaching through geometric concepts, its application is significantly broader and enables the connection of multiple scientific disciplines within the framework of the modern STEM approach. Such an approach contributes to the functional integration of knowledge and the development of students' research-oriented way of thinking.

This paper presents a model for determining the value of π through three interconnected approaches: experimental, analytical, and numerical. The experimental approach is based on the application of the mathematical pendulum, by measuring the oscillation period for different pendulum lengths and calculating the value of π .

Special attention is devoted to the conditions for applying this model, primarily the limitation of small oscillation angles, as well as the analysis of measurement errors, such as uncertainty in pendulum length, reaction time during period measurement, and the influence of air resistance.

The analytical approach enables the connection of experimental results with the theoretical model and shows that π is not exclusively a geometric constant, but also a quantity that naturally appears in the description of periodic phenomena.

The numerical approach is implemented using the Monte Carlo method, based on the random generation of a large number of points inside a square with an inscribed circle. Based on the ratio between the number of points belonging to the circle and the total number of generated points, an approximation of π is obtained.

By comparing the values obtained using different methods and analyzing absolute and relative errors, students develop critical thinking, an understanding of model limitations, and the importance of approximation in natural sciences. The proposed model represents an example of multidisciplinary STEM teaching in which experimental, analytical, and algorithmic competencies are simultaneously developed through a single mathematical concept.

Key words: *Number π , mathematical pendulum, Monte Carlo method, STEM approach*

References

- [1] A. Milenković, D. Ostojić, D. Rajković, M. Milikić, *STEM Workshops and Students' Interest in Mathematics, Physics, and Computer Science: Machine Learning Approach*, International Journal of Instruction, 19(1), 2026, 367–386.
- [2] A. Milenković, A. Maksimović, D. Rajković, D. Ostojić, *How High School Students Assess the Importance of STEM Workshops for Acquiring New Knowledge*, in STEM/STEAM/STREAM Approach in Theory and Practice of Contemporary Education, Conference Proceedings, Faculty of Education, University of Kragujevac, Jagodina, Serbia, 2025.

ОД СЛАМЧИЦА ДО БЕСКОНАЧНОСТИ: ИНОВАТИВНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

Светлана Савовић, Виолета Пушица

ОШ „Данило Киш“, Београд, Србија,
svetlana.savovic@osdanilokis.edu.rs, violeta.pusica@osdanilokis.edu.rs

У савременој настави математике посебан изазов представља мотивисање ученика и повезивање апстрактних појмова са њиховим искуством, нарочито у прелазним периодима као што је пети разред.

Циљ истраживања је да се прикажу и анализирају примери добре наставне праксе који укључују пројектну наставу, примену филмске уметности, ИКТ алата и креативних активности у настави математике од петог до осмог разреда, кроз неколико активности: 1) „Свеска на коцкице“ – демонстрација; 2) „Изаћи на црту!“ – интеракција, демонстрација, визуелизација; 3) „Троугао на енглески начин“ – међупредметна корелација; 4) Ератостеново мерење обима Земље – међународни пројекат; 5) Грађевина од сламчица – креативна демонстрација; 6) Филм у математици (Паја Патак у свету математике, Марсовац, Игра кодова, Човек који је видео бесконачност) – визуелизација; 7) ИКТ на часу математике (GeoGebra, Енигма симулатор) – алгоритамско размишљање.

Методолошки приступ се заснива на квалитативној анализи наставних активности реализованих у непосредној пракси. Резултати показују да овакви приступи значајно повећавају ангажованост ученика и разумевање математичких концепата. Подаци добијени евалуацијом указују да више од 90% ученика успешније усваја градиво када је оно приказано кроз визуелне, проблемске и животне ситуације. Ученици истовремено развијају велики број компетенција, што је и циљ наставе и

учења: логичко мишљење, креативност, сарадњу и дигиталне компетенције.

Закључак је да интеграција различитих метода и медија у настави математике доприноси дубљем разумевању и трајнијем знању. Пракса показује потребу за већом заступљеношћу пројектне и интердисциплинарне наставе, као и системском подршком примени ИКТ-а и иновативних модела учења у основном образовању.

Кључне речи: *иновативне методе, филм у настави, ИКТ у настави, мотивација ученика, активно учење*

FROM STRAWS TO INFINITY: INNOVATIVE MATHEMATICS EDUCATION⁺

Svetlana Savović, Violeta Pušica⁺

Primary School "Danilo Kiš", Belgrade, Serbia,
svetlana.savovic@osdanilokis.edu.rs, violeta.pusica@osdanilokis.edu.rs

A particular challenge in contemporary mathematics teaching is motivating students and connecting abstract concepts with their own experience, especially during transitional periods such as the fifth grade.

The aim of this study is to present and analyze examples of good teaching practice involving project-based learning, the use of film art, ICT tools, and creative activities in mathematics teaching from the fifth to the eighth grade, through several activities: 1) "Squared Notebook" – demonstration; 2) "Step Up to the Line!" – interaction, demonstration, visualization; 3) "A Triangle in the English Way" – interdisciplinary correlation; 4) Eratosthenes' measurement of the Earth's circumference – international project; 5) A structure made of straws – creative demonstration; 6) Film in mathematics (Donald Duck in Mathmagic Land, The Martian, The Imitation Game, The Man Who Knew Infinity) – visualization; 7) ICT in the mathematics classroom (GeoGebra, Enigma simulator) – algorithmic thinking.

The methodological approach is based on the qualitative analysis of teaching activities implemented in direct practice. The results show that such approaches significantly increase student engagement and understanding of mathematical concepts. Data obtained through evaluation indicate that more than 90% of students acquire the material more successfully when it is presented through visual, problem-based, and real-life situations. At the same time, students develop a wide range of competencies, which is also the goal of teaching and learning: logical thinking, creativity, collaboration, and digital competencies.

The conclusion is that the integration of different methods and media in mathematics teaching contributes to deeper understanding and more lasting

knowledge. Practice shows the need for greater representation of project-based and interdisciplinary teaching, as well as for systematic support for the use of ICT and innovative learning models in primary education.

Key words: *innovative methods, film in teaching, ICT in teaching, student motivation, active learning* ÷

References

- [1] V. Vizek Vidaković, M. Rijavec, V. Vlahović Štetić, D. Miljković, *Kako razvijati veštine poučavanja - teorije učenja, metode poučavanja, alternativni pristupi*, Beograd, 2014.
- [2] I. Ivić, A. Pešikan, S. Antić, *Aktivno učenje*, Institut za psihologiju, Beograd, 2001.
- [3] M. Marinović, *Film kao nastavno sredstvo u savremenoj školi*, Učiteljski fakultet, Beograd, 2012.

BEYOND RIGHT AND WRONG: ВЕБ ПЛАТФОРМА ЗА УЧЕЊЕ МАТЕМАТИКЕ КРОЗ АНАЛИЗУ ТАЧНИХ И НЕТАЧНИХ РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

*Марина Свичевић, Александар Миленковић,
Немања Вучићевић, Ђорђе Станковић*

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs, aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs,
nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs, djordjestankovic87@gmail.com

У раду је представљена веб платформа *Beyond Right and Wrong*, развијена у циљу подршке настави и учењу математике кроз анализу понуђених решења задатака. Платформа је заснована на приступу према коме се од ученика не тражи само препознавање тачног решења, већ и способност уочавања, анализе и евалуације грешака у нетачним поступцима, што представља више когнитивне нивое учења по Блумовој таксономији. На тај начин ученици развијају критичко мишљење, способност анализе грешака и дубље разумевање математичких појмова.

Платформа је намењена ученицима основних и средњих школа и обухвата функционалности намењене и наставницима и ученицима. Наставници могу да креирају наставне теме, уносе задатке са више понуђених решења, означавају тачно решење, дефинишу типове грешака у нетачним решењима и формирају вежбања која се додељују групама ученика. Ученици анализирају понуђена решења, бирају тачно решење и одређују типове грешака у преосталим одговорима, при чему се у процесу бодовања вреднују и исправно означено тачно решење и тачно препознати типови грешака. Након завршетка рада, ученик добија бодове

и повратну информацију која укључује тачно решење, објашњења и увид у исправност изабраних типова грешака, као и могућност праћења сопственог напретка.

Посебна вредност платформе огледа се у томе што тежиште учења помера са самог резултата на разумевање и анализу поступка и природе начињених грешака. Захваљујући својих функцијама, платформа представља користан дигитални алат за формативно праћење, индивидуализацију наставе и унапређивање квалитета наставе математике.

Кључне речи: *настава математике, веб платформа, анализа грешака, критичко мишљење, Блумова таксономија*

BEYOND RIGHT AND WRONG: A WEB PLATFORM FOR LEARNING MATHEMATICS THROUGH THE ANALYSIS OF CORRECT AND INCORRECT PROBLEM SOLUTIONS

*Marina Svičević, Aleksandar Milenković,
Nemanja Vučićević, Đorđe Stanković*

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia,
marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs, aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs,
nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs, djordjestankovic87@gmail.com

This paper presents the web platform *Beyond Right and Wrong*, developed with the aim of supporting mathematics teaching and learning through the analysis of offered problem solutions. The platform is based on an approach according to which students are not only required to recognize the correct solution, but also to identify, analyze, and evaluate errors in incorrect procedures, which corresponds to higher cognitive levels of learning in Bloom's taxonomy. In this way, students develop critical thinking, the ability to analyze errors, and a deeper understanding of mathematical concepts.

The platform is intended for primary and secondary school students and includes functionalities designed for both teachers and students. Teachers can create instructional topics, enter tasks with multiple offered solutions, mark the correct solution, define the types of errors in incorrect solutions, and create exercises that are assigned to groups of students. Students analyze the offered solutions, choose the correct solution, and determine the types of errors in the remaining answers, while the scoring process evaluates both the correctly identified correct solution and the accurately recognized error types. After completing the exercise, the student receives points and feedback that include

the correct solution, explanations, and insight into the correctness of the selected error types, as well as the possibility of tracking personal progress.

The particular value of the platform lies in shifting the focus of learning from the result itself to understanding and analyzing the procedure and the nature of the errors made. Owing to its functionalities, the platform represents a useful digital tool for formative assessment, the individualization of teaching, and the improvement of the quality of mathematics education.

Key words: *mathematics education, web platform, error analysis, critical thinking, Bloom's taxonomy*

References

- [1] D. M. Adams, B. M. McLaren, K. Durkin, R. E. Mayer, B. Rittle-Johnson, S. Isotani, M. Van Velsen, *Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system*, *Computers in Human Behavior*, 36, 2014, 401–411.
- [2] S. M. Di Lonardo Burr, H. Douglas, M. Vorobeva, K. Muldner, *Refuting misconceptions: Computer tutors for fraction arithmetic*, *Journal of Numerical Cognition*, 6(3), 2020, 355–377.
- [3] A. Barana, M. Marchisio, M. Sacchet, *Interactive feedback for learning mathematics in a digital learning environment*, *Education Sciences*, 11(6), 2021, 279.
- [4] A. Boomgaarden, M. Wirzberger, J. Hoch, A. Obersteiner, *Fostering learning from errors – Computer-based adaptivity at the transition between problem solving and explicit instruction*, *Journal für Mathematik-Didaktik*, 45, 2024, 537–568.

ПРИМЕНА АЛАТА ВЕШТАЧКЕ ИНТЕЛИГЕНЦИЈЕ У РАЗВОЈУ АЛГОРИТАМСКОГ МИШЉЕЊА КОД ДЕЦЕ ПРЕДШКОЛСКОГ УЗРАСТА - ПРИКАЗ И АНАЛИЗА ПРИМЕРА ИЗ ПРАКСЕ

Драгица Станковић¹, Славица Дражовић Перошевић²

¹ Универзитет Београду, Београдска академија пословних и уметничких струковних студија, Београд, Србија, ² ПУ „Радуловић М23“, Чачак, Србија, dragica.stankovic90@gmail.com, slavicadrazovicperosevic@gmail.com

Савремено предшколско образовање карактерише све веће интеграције дигиталних технологија и алата вештачке интелигенције. У том контексту, развој алгоритамског мишљења препознаје се као кључна компетенција 21. века, која подразумева решавање проблема путем уочавања образаца, секвенцирања и планирања корака. Овај рад анализира примену вештачке интелигенције и едукативне роботике у

развоју алгоритамског мишљења код деце предшколског узраста, кроз примере добре праксе.

Приказане су радионице у вртићком окружењу, организоване као повезане активности: упознавање са таблетима и њиховом едукативном употребом, коришћење једноставних АИ алата ради развоја дигиталних компетенција, задаци са абакусом за јачање логичког и алгоритамског мишљења, те програмирање робота Бее-Бот кроз игру и решавање проблема.

Подаци су прикупљени посматрањем, реализацијом и анализом дечјих активности. Резултати показују висок ниво ангажовања деце и позитиван утицај интегрисаног приступа на развој алгоритамског мишљења, логичког закључивања и сарадничког учења. Интеграција савремених технологија са игром повећава мотивацију и активност деце. Иако је истраживање спроведено на мањем узорку, представља основу за даље истраживање и унапређење праксе у раном и предшколском образовању.

Кључне речи: *предшколско образовање, вештачка интелигенција, алгоритамско мишљење, едукативна роботика, Бее-Бот, дигиталне компетенције, игра*

APPLICATION OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE TOOLS IN THE DEVELOPMENT OF ALGORITHMIC THINKING IN PRESCHOOL CHILDREN - PRESENTATION AND ANALYSIS OF PRACTICAL EXAMPLES

Dragica Stanković¹, Slavica Dražović Perošević²

¹University of Belgrade, Belgrade Academy of Business and Arts Applied Studies, Belgrade, Serbia, ²Preschool Institution "Radulović M23", Čačak, Serbia, dragica.stankovic90@gmail.com, slavicadrazovicperosevic@gmail.com

Contemporary preschool education is increasingly characterized by the integration of digital technologies and artificial intelligence tools. In this context, the development of algorithmic thinking is recognized as a key 21st-century competence, encompassing problem-solving through pattern recognition, sequencing, and step-by-step planning. This paper analyzes the application of artificial intelligence and educational robotics in fostering algorithmic thinking among preschool children through examples of good practice.

The paper presents workshops conducted in a preschool setting, organized as a series of interconnected activities: introducing children to tablets and their educational use, applying simple AI tools to develop digital competencies, engaging in abacus-based tasks to strengthen logical and

algorithmic thinking, and programming the Bee-Bot robot through play and problem-solving activities.

Data were collected through observation, implementation, and analysis of children's activities. The results indicate a high level of children's engagement and a positive impact of the integrated approach on the development of algorithmic thinking, logical reasoning, and collaborative learning. The integration of modern technologies with play increases children's motivation and active participation. Although the research was conducted on a small sample, it provides a basis for further research and the improvement of practices in early and preschool education.

Keywords: *preschool education, artificial intelligence, algorithmic thinking, educational robotics, Bee-Bot, digital competencies, play*

References

- [1] I. R. Berson, M. J. Berson, W. Luo, *Innovating responsibly: Ethical considerations for AI in early childhood education*, *AI, Brain and Child*, 1 (2), 2025.
- [2] K. Kanaki, S. Chatzakis, M. Kalogiannakis, *Fostering algorithmic thinking and environmental awareness via Bee-Bot activities in early childhood education*, *Sustainability*, XVII, 2025, 4208.
- [3] E. Rogulj, L. Radošević, M. Plančić Dlačić, *Primjena Bee-Bot-a u ranom i predškolskom odgoju i obrazovanju*, *Radovi Zavoda za znanstvenoistraživački i umjetnički rad u Bjelovaru*, XVII, 2023, 151–170.
- [4] M. Vargová, L. Círus, *The use of a Bee-bot in pre-primary and primary education*, *Journal of Education, Technology and Computer Science*, 2 (32), 2021, 45–49.

SYNTAHO: ИНТЕРАКТИВНО И ИГРАМА ПОДСТАКНУТО УЧЕЊЕ СИНТАКСЕ ПРОГРАМСКИХ ЈЕЗИКА

Урош Татомир, Татјана Стојановић

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, Крагујевац,
Србија, iturostatomir@gmail.com, tatjana.stojanovic@pmf.kg.ac.rs

Мотивација за развој апликације проистиче из потребе да се ученицима и почетницима у програмирању олакша савладавање синтаксе различитих програмских језика. Традиционални приступи често доводе до демотивације, јер учење новог језика захтева истовремено разумевање концепата и синтаксе. Инспирисани моделом Duolingo, предложена апликација омогућава постепено усвајање синтаксе кроз поређење

примера у језику који корисник већ познаје или у псеудокоду, са примерима у језику који жели да научи.

Резултати који се очекују од оваквог приступа јесу повећана мотивација, активније учешће у процесу учења и брже усвајање нових програмских језика. Задаци као што су проналажење грешака, допуњавање синтаксе и превођење линија кода из једног језика у други чине учење интерактивним и динамичним, док игрификација спречава монотонију и подстиче континуирано напредовање.

Очекивања су да апликација допринесе настави програмирања кроз флексибилно и персонализовано учење, као и да омогући ученицима да развију вештине неопходне за рад у мултијезичком окружењу. Импликације се односе на унапређење наставних програма и креирање алата који интегришу игрификацију као метод за ефикасније учење.

Кључне речи: *програмирање, синтакса, игрификација, апликација, псеудокод*

SYNTAXO: INTERACTIVE AND GAME-BASED LEARNING OF PROGRAMMING LANGUAGE SYNTAX

Uroš Tatomir, Tatjana Stojanović

University of Kragujevac, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia
iturostatomir@gmail.com, tatjana.stojanovic@pmf.kg.ac.rs

The motivation for developing the application stems from the need to help students and novice programmers more easily master the syntax of various programming languages. Traditional approaches often lead to demotivation, as learning a new language requires understanding both concepts and syntax simultaneously. Inspired by the Duolingo model, the proposed application supports the gradual learning of syntax by comparing examples in a language the user already knows or in pseudocode, with examples in the language they wish to learn.

The expected outcomes of this approach include increased motivation, more active participation in the learning process, and faster acquisition of new programming languages. Tasks such as finding errors, filling in missing parts of code, and translating lines of code from one language to another make learning interactive and dynamic, while gamification helps avoid monotony and encourages continuous progress.

It is expected that the application will contribute to programming education through flexible and personalized learning, and that it will enable students to develop the skills necessary for working in a multilingual environment. The implications include curriculum improvement and the creation of tools that integrate gamification as a method for more effective learning.

Key words: *programming, syntax, gamification, application, pseudocode*

References

- [1] J. J. Ramírez Ruiz, A. D. Vargas Sanchez, O. R. Boude Figueredo, *Impact of gamification on school engagement: a systematic review*, *Frontiers in Education*, 2024.
- [2] Z. G. Celasun, S. Ü. Kaya, *Gamification in Education: Unlocking Engagement and Enhancing Learning Outcomes*, Başkent University, Ankara, 2023.
- [3] A. Miola, *Flutter Complete Reference*, Leanpub, 2019.
- [4] M. J. Price, *C# 12 and .NET 8 – Modern Cross-Platform Development Fundamentals*, Packt Publishing, Birmingham, 2023.

ВИЗУАЛИЗАЦИЈА АПСТРАКТНОГ КРОЗ ЕТНО МОТИВЕ

Даница Утјешиновић¹, Јасмина Алиловић²

¹ОШ „Душан Вукасовић Диоген“, Бечмен, Србија,

²ОШ „Матија Губец“, Чеминац, Хрватска,

danautj@gmail.com, jasminalilovic6@gmail.com

Овај рад истражује интеграцију традиционалне културне баштине и савремених методичких приступа у настави математике, са посебним фокусом на искуствено учење у основној школи. Полазећи од поставке да су етно-мотиви конкретизација апстрактних идеја, рад приказује како се артефакти попут барањског шокачког ормара и ручних радова (хеклање, ткање, вез) трансформишу у моћне едукативне моделе.

У првом плану је практична примена кроз два кључна сегмента. Први обухвата истраживање старог барањског ормара, где ученици кроз мерење, израду дигиталног модела у софтверу ГеоГебра и креирање макета, савладавају концепте површине и запремине. Други сегмент се фокусира на хеклање, ткање и вез као алате за истраживање геометрије равни – симетрије, углова и површине фигура. Овде се мануелне технике постављају као модели за разумевање алгоритамских корака и геометријских низова.

Посебан допринос рада је указивање на развој меких вештина кроз овај процес. Ученици кроз интердисциплинарни рад развијају критичко мишљење, прецизност, стрпљење и дигиталну писменост, док истовремено јачају културну свест и естетске вредности.

У завршном делу, разматра се вертикална проходност ових активности ка средњој школи, кроз истраживање фракталне геометрије, тригонометрије и различитих кривих линија које је најлакше материјализовати управо техником хеклања. Овакав приступ не само да

олакшава усвајање градива, већ и ревитализује заборављене вештине кроз призму савремене науке, припремајући ученике за комплексне изазове 21. века.

Кључне речи: *matematika, kulturna baština, etno motiv, algoritam*

VISUALIZATION OF THE ABSTRACT THROUGH ETHNOMOTIFS

Danica Utješinović¹, Jasmina Alilović²

¹Primary School "Dušan Vukasović Diogen", Bečmen, Serbia,

²Primary School "Matija Gubec", Čeminac, Croatia,
danautj@gmail.com, jasminalilovic6@gmail.com

This paper explores the integration of traditional cultural heritage and contemporary methodological approaches in mathematics teaching, with a special focus on experiential learning in primary school. Starting from the premise that ethno-motifs are the concretization of abstract ideas, the paper shows how artifacts such as the Baranja Šokac wardrobe and handicrafts (crocheting, weaving, embroidery) are transformed into powerful educational models.

The focus is on practical application through two key segments. The first includes the research of an old Baranja wardrobe, where students master the concepts of surface area and volume through measurement, creation of a digital model in GeoGebra software and creation of a model. The second segment focuses on crochet, weaving and embroidery as tools for exploring plane geometry – symmetry, angles and surface area of figures. Here, manual techniques are set as models for understanding algorithmic steps and geometric sequences.

A special contribution of the work is the indication of the development of soft skills through this process. Through interdisciplinary work, students develop critical thinking, precision, patience and digital literacy, while at the same time strengthening cultural awareness and aesthetic values.

In the final part, the vertical permeability of these activities towards high school is discussed, through the research of fractal geometry, trigonometry and various curved lines that are easiest to materialize precisely through the crochet technique. Not only does this approach facilitate the acquisition of material, it also revitalizes forgotten skills through the prism of modern science, preparing students for the complex challenges of the 21st century.

Key words: *mathematics, cultural heritage, ethno motif, algorithm*

References

- [1] M. S. K. Batibwe, *The Role of Ethnomathematics Education: A Literature Review*, Asian Journal for Mathematics Education, 3(4), 2024.
- [2] F. Favilli, S. Tintori, *Intercultural Mathematics Education: Comments about a Didactic Proposal*, Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education, 2004, 39–47.

Индекс аутора

- Сузана Алексић, 26, 97
Јасмина Алиловић, 151
Војислав Андрић, 21, 99
Данка Антић, 101
Suzana Antunović, 24
Бојана Арамбашић, 26
Ljiljana Arambašić, 27
Милош Арсић, 103
Владимир Балтић, 105
Ђорђе Баралић, 29
Славица Бeroња, 130
Радослав Божић, 30, 68
Бојана Боровићанин, 107
Мирјана Брдар, 54
Anđa Valent, 28
Мина Васковић Јовановић, 32
Ненад Вуловић, 66
Милица Вучићевић, 34, 42
Немања Вучићевић, 109, 113, 137, 139, 145
Мирјана Глишић, 111
Милица Грбовић Ћирић, 113
Милан Грујин, 135
Марко Дабић, 139
Нада Дамљановић, 36, 39
Слађана Димитријевић, 87, 115
Славица Дражовић Перошевић, 147
Ђорђе Дугошија, 37
Сузана Ђорђевић, 74
Милош Ђорић, 117
Anđela Đukić, 39
Марија Ђукић, 36, 39
Гордан Ђурић, 40
Александра Ђурић Караклић, 120
Љубица Ђуровић, 34, 42
Драган Ђурчић, 36
Милан Живановић, 118, 120
Јелена Игњатовић, 64
Слађана Игњатовић, 68
Нина Икодиновић, 82
Небојша Икодиновић, 40, 44
Снежана Илић, 48
Јелена Илић, 46
Марија Јанковић, 57
Damira Jantassova, 55
Мирослав Јовановић, 126
Босиљка Јовановић, 121
Александар Јоксимовић, 50
Милош Јоловић, 50
Марија Каплар, 52
Себастијан Каплар, 52

Јелена Кенић, 122, 124
 Миклош Ковач, 54
 Милан Ковачевић, 55, 126
 Душан Костић, 57
 Лазар Крстић, 60
 Марија Крстић Радојковић, 127
 Марија Кузелевић, 130
 Вучеља Лекић, 36, 39
 Един Лиџан, 85
 Александар Липковски, 62
 Зорана Лужанин, 13, 87, 92
 Катарина Лукић, 131
 Петар Луковац, 50
 Теодора Љујић, 139
 Јасминка Марић Глишковић, 133
 Филип Марић, 15
 Јелена Матејић, 64
 Божидар Милановић, 135
 Александар Миленковић, 83, 109, 113
 137, 139, 145
 Милан Миликић, 66
 Јасмина Милинковић, 70
 Драгица Милинковић, 68
 Дара Милојковић, 72
 Александра Милосављевић, 82
 Верица Милутиновић, 74
 Александра Михајловић, 66
 Љубица Мудрић Станишковски, 32
 Тамара Наумовић, 57
 Ивана Обрадовић, 74
 Марија Павловић, 111
 Милош Павловић, 40
 Катарина Павловић, 36
 Катарина Перовић, 76
 Невена Петровић, 139
 Виолета Пушица, 143
 Мирјана Радивојевић, 120
 Горан Радојев, 54
 Далибор Рајковић, 141
 Александар Савић, 37
 Светлана Савовић, 143
 Марина Свичевић, 90, 109, 137, 139, 145
 Милица Симић, 57
 Анђелка Симић Миливојевић, 78
 Горан Софијанић, 80
 Bharath Sriraman, 19, 29
 Марија Станић, 82
 Драгица Станковић, 147
 Ђорђе Станковић, 145
 Татјана Станковић, 85
 Ана Станковић, 32
 Марко Станковић, 83
 Јелена Стеванић, 87
 Татјана Стојановић, 149
 Ненад Стојановић, 34, 42
 Сана Стојановић Ђурђевић, 40, 44, 89
 Марија Тасић, 83
 Урош Тагомир, 149
 Татјана Томовић Младеновић, 82
 Марија Трнавац, 90
 Вељко Ћировић, 78
 Андрија Урошевић, 40
 Даница Утјешиновић, 151
 Даница Фатић, 36
 Вана Цолић, 92
 Lana Crnobrnja Perenčević, 94
 Сава Чавошки, 50



www.pmf.kg.ac.rs

a: Радоја Домановића 12, 34000 Крагујевац

t: +381 34 336 223

ф: +381 34 335 040

m: pmf.kragujevac@pmf.kg.ac.rs