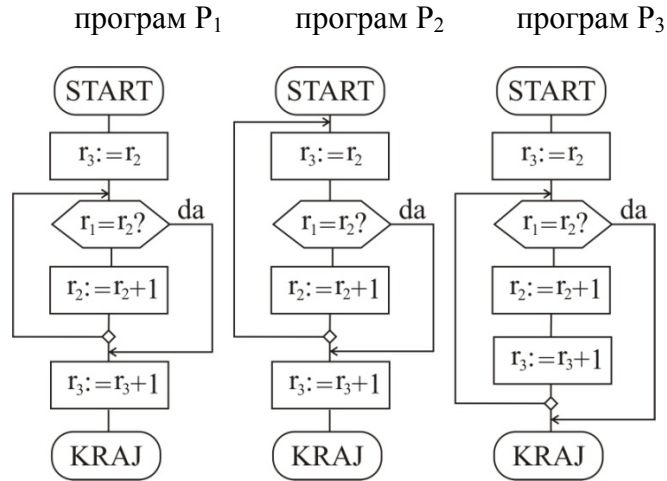


Идеални рачунар

1. Дате су три блок–шеме редом програма P_1 , P_2 , P_3 .



Одредити завршну конфигурацију, уколико постоји, након израчунавања по програму P_i ($i=1,2,3$) за почетну конфигурацију

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	...
5	2	0	0	0	0

Уколико се израчунавање по неком програму никада не завршава за задату почетну конфигурацију, у одговарајућа поља уписати знак \times .

Одговори.

Завршна конфигурација израчунавања по програму P_1 је

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	...

Завршна конфигурација израчунавања по програму P_2 је

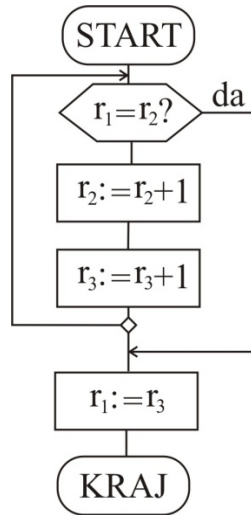
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	...

Завршна конфигурација израчунавања по програму P_3 је

R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	...

2. а) Написати програм P (за идеални рачунар) коме одговара следећи дијаграм – блок шема.

Одговор. Програм P је следећи низ инструкција:



б) Утврдите да се израчунавање на идеалном рачунару по програму P завршава за почетну конфигурацију:

R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	...
5	2	0	0	0	0

и одредити садржај регистра R₁ у завршној конфигурацији.

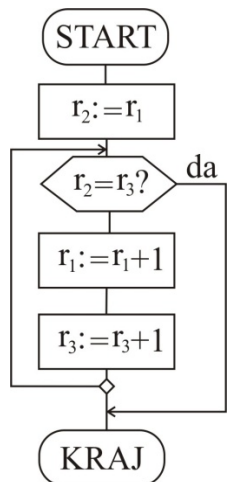
Одговор. Садржај регистра R₁ је ____.

в) Навести, уколико постоји, бар једну почетну конфигурацију за коју се израчунавање на идеалном рачунару по програму P не завршава. (Уколико не постоји оваква почетна конфигурација у празна поља табеле уписати знак ×.)

Одговор.

R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	...

3. а) Написати програм P (за идеални рачунар) коме одговара следећи дијаграм – блок шема.



Одговор. Програм P је следећи низ инструкција:

б) Нека је f функција која природном броју x додељује природан број који је садржај регистра R_1 у завршној конфигурацији израчунавања по програму P на идеалном рачунару за почетну конфигурацију $(x, 0, 0, 0, 0, \dots)$.

Одредити $f(1), f(2), f(3), f(4), f(71)$.

Одговори. $f(1)=$ ____, $f(2)=$ ____, $f(3)=$ ____, $f(4)=$ ____, $f(71)=$ ____.

в) Одредити садржај регистра R_1 у завршној конфигурацији при израчунавању на идеалном рачунару по програму F за дате почетне конфигурације. Уколико се одговарајуће израчунавање не завршава на место предвиђено за одговор уписати знак \times .

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	...
5	2	0	0	0	0

Одговор. Садржај регистра R_1 је ____.

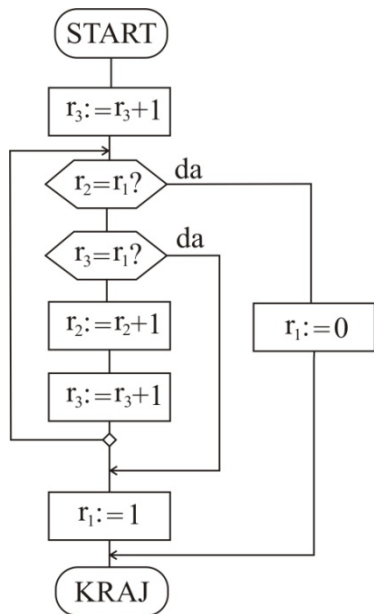
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	...
5	2	3	0	0	0

Одговор. Садржај регистра R_1 је ____.

г) Навести, уколико постоји, бар једну почетну конфигурацију за коју се израчунавање на идеалном рачунару по програму P не завршава. (Уколико не постоји оваква почетна конфигурација у празна поља табеле уписати знак \times .)

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	...

4. а) Написати програм P (за идеални рачунар) коме одговара следећи дијаграм – блок шема.



Одговор. Програм P је следећи низ инструкција:

б) Нека је f функција која природном броју x додељује природан број који је садржај регистра R_1 у завршној конфигурацији израчунавања по програму P на идеалном рачунару за почетну конфигурацију $(x, 0, 0, 0, 0, \dots)$.

Одредити $f(1), f(2), f(3), f(4), f(47), f(74)$

Одговори. $f(1)=$ ____, $f(2)=$ ____, $f(3)=$ ____, $f(4)=$ ____, $f(47)=$ ____, $f(74)=$ ____.

5. Саставити блок-шему и написати програм за израчунавање вредности датих функција на идеалном рачунару.

а) $f(x,y,z)=\min\{x,y,z\}$;

д) $f(x,y,z)=|x-y|$;

б) $f(x,y)=\begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & x > y \end{cases}$;

ђ) $f(x,y)=\begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$;

в) $f(x,y)=\begin{cases} x-y, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$;

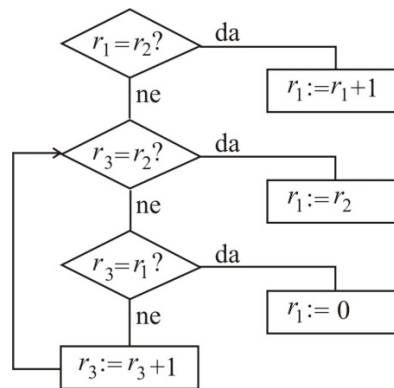
е) $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ је паран} \\ \text{недефинисано}, & x \text{ је непаран} \end{cases}$;

г) $f(x,y)=\begin{cases} x-y, & x \geq y \\ \text{недефинисано}, & x < y \end{cases}$;

ж) $f(x)=\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$;

Супституција

6. Нека је f функција која пару природних бројева (x, y) додељује природан број који је садржај регистра R_1 у завршној конфигурацији израчунавања при почетној конфигурацији $(x, y, 0, 0, 0, \dots)$ по програму датом блок-шемом са десне стране.



Написати програм који израчунава вредности следећих функција

а) $g(x, y) = 2f(x, y)$;

в) $k(x, y, z) = f(x, y) + f(y, z)$;

б) $h(x, y) = \begin{cases} 1, & f(x, y) = 3 \\ 0, & f(x, y) \neq 3 \end{cases}$;

г) $l(x, y, z) = f(y, x) + f(y, z)$.

7. Написати програм за израчунавање вредности датих функција на идеалном рачунару.

а) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y = 3 \\ 0, & x + y \neq 3 \end{cases}$;

в) $f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor$;

б) $f(x) = 2^{\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$;

г) $f(x, y) = \left\lfloor \frac{x + y}{2} \right\rfloor$.

Рекурзија

8. Написати програм за израчунавање вредности следећих функција дефинисаних рекурзијом.

а) $f(0) = 3, f(x+1) = 2f(x) + 1$;

б) $f(x, 0) = x + 1, f(x, y+1) = f(x, y) + 1$.

9. Доказати да су израчунљиве следеће функције:

а) $r(x, y) = \begin{cases} \text{остатак при дељењу уса } x, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$;

в) $\text{div}(x, y) = \begin{cases} 1, & y \mid x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$;

б) $q(x, y) = \begin{cases} \text{количник при дељењу уса } x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

г) $p(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ је прост број} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

10. Доказати да су израчунљиве следеће функције:

а) $D: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, D(0) = 1, D(x) = \text{„број делилаца броја } x\text{“}, x > 0$;

б) $P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, P(0) = 0, P(x) = \text{„}x\text{-ти (по величини) прост број“}, x > 0$.

11. Написати програм који израчунава вредности функције

$$f(x) = \text{„најмањи паран број који је већи од } x\text{“},$$

а затим и програм који израчунава вредности функције

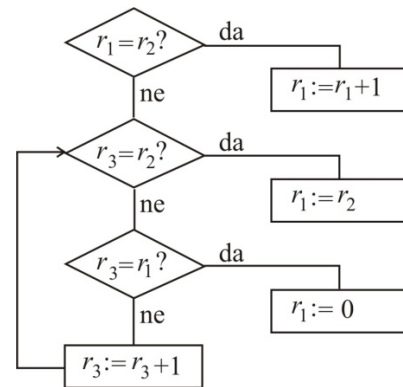
$$F(x)=f(0)+f(1)+\dots+f(x).$$

12. Прави делиоци неког броја су сви делиоци тог броја различити од њега самог. Тако, прави делиоци броја 6 су 1,2 и 3. На пример, број 6 је савршен број. Заиста, прави делиоци броја 6 су 1, 2 и 3, па је 6 савршен јер је $6=1+2+3$. Следећи савршен број је 28, зато што је $1+2+4+7+14=28$.

Доказати да је скуп савршених бројева израчунљив.

Минимизација

13. Нека је f функција која пару природних бројева (x,y) додељује природан број који је садржај регистра R_1 у завршној конфигурацији израчунавања при почетној конфигурацији $(x,y,0,0,0,\dots)$ по програму датом блок-шемом са десне стране.



Нека је $h(x)=\mu_y(f(x,y)=0)$.

а) Одреди $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$.

б) Написати програм који израчунава вредности функције h .

14. а) Написати програм који израчунава вредности функције $f(x)=\mu_y(2x - y=0)$. Да ли је $f(x)=2x$?

б) Написати програм који израчунава вредности функције $f(x)=\mu_y(x - 2y=0)$. Да ли је $f(x)=\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$?