ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИНФОРМАТИКЕ
III КОЛОКВИЈУМ
18.01. 2008.

Име и презиме: ____Број индекса: ___________________

Укупан број поена.__________________

I група

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:
Rel={R, S}, Fun={F, G}, Const={e}, при чему је ar(R)=ar(F)=2, ar(S)=ar(G)=1.

1.1 На предвиђена места уписати *израз*, *формула* или × у зависности од тога да ли је одговарајући низ симбола датог језика израз, формула или ни једно ни друго.

1) F(x,G(y)) __________ [0.25 поена]; 2) F(S(x,e)) __________ [0.25 поена];
3) ¬R(x,G(y)) __________ [0.25 поена]; 4) ∀x(R(x,S(y)) ⇒S(R(x,y))) __________[0.25 поена].

1.2. Одредити слободне променљиве следећих формула датог језика.
а) ∀x(R(x,y)∧∃yS(y))
Слободне променљиве су: ____________________________ [0.25 поена].
б) ∀zS(z)⇒∃y(R(z,y)∧S(y))
Слободне променљиве су: ____________________________ [0.25 поена].

1.3. Дати језик је интерпретиран на скупу природних бројева ℕ={0, 1, 2, 3,…} на следећи начин:
$\mathcal{I}$(R)=≤ (*уређење природних бројева*) ,
$\mathcal{I}$(S)=„*бити прост број*“={2, 3, 5, 7, 11, 13, …},
$\mathcal{I}$(F)= + (*сабирање природних бројева*),
$\mathcal{I}$(G)= *g*, при чему је *g*: ℕ→ ℕ, *g*(*n*)=*n*+1, *n*∈ℕ,
$\mathcal{I}$(e)=1.

а) Одредити вредности израза F(F(x,G(e)),F(y,y)) у моделу (ℕ, $\mathcal{I}$) при валуацији променљивих
$\mu=\begin{pmatrix} x\,y\ldots \\ 5\,4\ldots \end{pmatrix}$ је ____________________________ [0.5 поена].

б) На предвиђена места уписати *тачно* или *нетачно* у зависности од тога да ли је одговарајућа формула датог језика тачна или нетачна у моделу **(**ℕ, $\mathcal{J}$**)** при валуацији променљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & \ldots \\ 3 & 2 & \ldots \end{pmatrix}$

¬S(x)∨R(x,y)⇒R(G(x),y): __________________________ [1 поен];
S(F(x,y))∧R(G(x),y)∧ ∃yR(x,y): __________________________ [1 поен];
S(G(e))⇒ ¬R(x,y)∧∀zS(z): __________________________ [1 поен];

в) На предвиђена места уписати *тачно* или *нетачно* у зависности од тога да ли је одговарајућа реченица датог језика тачна или нетачна у моделу **(**ℕ, $\mathcal{J}$**)**:

∃x¬S(x)∧∀yR(y,y): __________________________ [1 поен];
∀x∀y(R(x,F(x,y))∧R(y,F(x,y))): __________________________[1 поен];
∃x(S(x)∧S(G(x))): __________________________[1 поен];

1.4. Реченицама датог језика изразити следећа својства модела (ℕ, $\mathcal{J}$):
1) *Збир два проста броја не мора бити прост број.*

____[1 поен];.
2) *Сваки прост број је већи од* 1.

____[1 поен];.

1.5. Одредити бар једну интерпретацију датог језика на неком скупу тако да реченица ∃x∀y(R(x,y)⇒S(y)) буде тачна. [2 поена];

1.6 Заокружити слово испред формуле датог језика која је ваљана.
а) ∃xS(x)∨∃xR(x,x)⇒∃x(S(x)∨R(x,x));
б) ¬∃x∀y¬(R(x,x)⇒S(y))⇔ ∀x∃y(¬R(x,x)∨S(y));
в) ∃x(R(x,x)∧¬S(x));
г) ∃x¬S(x)∧∃xS(x).

[Заокруживање слова испред формуле која јесте логички еквивалентна датој формули добија се 0,5 поена; заокруживање слова испред формуле која није логички еквивалентна датој формули доноси негативне поене – 0,5; незаокруживање слова испред формуле не доноси ни позитивне нити негативне поене.]

2. Ако су α,β и γ произвољне предикатске формуле, доказати:

$$\vdash \alpha\vee\beta\Rightarrow((\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow\beta).$$

[3 поена];

ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИНФОРМАТИКЕ
III КОЛОКВИЈУМ
18.01. 2008.

Име и презиме: ____Број индекса: ____________________

Укупан број поена.___________________

II група

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:
Rel={R, S}, Fun={F, G}, Const={e}, при чему је ar(R)=ar(F)=2, ar(S)=ar(G)=1.

1.1 На предвиђена места уписати *израз*, *формула* или × у зависности од тога да ли је одговарајући низ симбола датог језика израз, формула или ни једно ни друго.

1) S(F(x,e)) __________ [0.25 поена];
2) R(F(x,e)) __________ [0.25 поена];
3) G(F(x,x)) __________ [0.25 поена];
4) $\forall x\exists y\neg(R(x,y)\wedge\exists zG(z))$ __________ [0.25 поена];.

1.2. Одредити слободне променљиве следећих формула датог језика.
1) $\forall x(S(x)\wedge\exists zR(z,x))\vee R(x,z)$
Слободне променљиве су: ___________________________ [0.25 поена].
2) $\exists zS(F(x,z))\Leftrightarrow\forall y(R(z,y)\wedge S(z))$
Слободне променљиве су: ___________________________ [0.25 поена].

1.3. Дати језик је интерпретиран на скупу природних бројева $\mathbb{N}$={0, 1, 2, 3,…} на следећи начин:
$\mathcal{I}$(R)=≤ (*уређење природних бројева*) ,
$\mathcal{I}$(S)=„*бити паран број*“={2, 4, 6, 8, 10, 12, …},
$\mathcal{I}$(F)= · (*множење природних бројева*),
$\mathcal{I}$(G)= g, при чему је g: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$, $g(n)=2n+1$, $n\in\mathbb{N}$,
$\mathcal{I}$(e)=0.

а) Одредити вредности израза F(G(F(x,x)),F(G(e),y)) у моделу ($\mathbb{N}$, $\mathcal{I}$) при валуацији променљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & \dots \\ 3 & 2 & \dots \end{pmatrix}$ је ____________________________ [0.5 поена].

б) На предвиђена места уписати *тачно* или *нетачно* у зависности од тога да ли је одговарајућа формула датог језика тачна или нетачна у моделу $(\mathbb{N}, \mathcal{I})$ при валуацији променљивих $\mu = \begin{pmatrix} x\,y\ldots \\ 5\,4\ldots \end{pmatrix}$

$R(x,G(y)) \Rightarrow R(x,y) \lor \neg S(x)$: ________________________ [1 поен];
$\forall y S(F(y,y)) \land R(x,F(x,y)) \land \neg R(x,y)$: ________________________ [1 поен];
$S(G(G(x))) \Rightarrow \exists z S(G(z))$: ________________________ [1 поен];

в) На предвиђена места уписати *тачно* или *нетачно* у зависности од тога да ли је одговарајућа реченица датог језика тачна или нетачна у моделу $(\mathbb{N}, \mathcal{I})$:

$\forall x S(x) \lor \exists y \neg R(y,y)$: ________________________ [1 поен];
$\exists x(\neg S(F(x,x)) \lor S(G(x)))$: ________________________[1 поен];
$\forall x \forall y(R(x,y) \Rightarrow R(G(x),G(y)))$: ________________________[1 поен];

1.4. Реченицама датог језика изразити следећа својства модела $(\mathbb{N}, \mathcal{I})$:
3) *Производ парног броја са било којим бројем је паран број.*
____[1 поен];.
2) *Постоји паран број већи од* 2.
____[1 поен];.

1.5. Одредити бар једну интерпретацију датог језика на неком скупу тако да реченица $\forall z S(z) \land \exists x \exists y(R(x,y) \land \neg R(y,x))$ буде тачна. [2 поена];

1.6 Заокружити слово испред формуле датог језика која је ваљана.
а) $\forall x(S(x) \land R(x,x)) \Rightarrow \forall x S(x) \land \forall x R(x,x)$;
б) $\neg \forall x \exists y(S(x) \Rightarrow S(y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y(S(x) \land \neg S(y))$;
в) $\forall x(S(x) \Rightarrow R(x,x))$;
г) $\forall x \neg S(x) \lor \forall x S(x)$.

[Заокруживање слова испред формуле која јесте логички еквивалентна датој формули добија се 0,5 поена; заокруживање слова испред формуле која није логички еквивалентна датој формули доноси негативне поене – 0,5; незаокруживање слова испред формуле не доноси ни позитивне нити негативне поене.]

2. Ако су α,β и γ произвољне исказне формуле, доказати:

$$\vdash (\alpha \land \beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)).$$

[3 поена];