1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови: Rel={R, S}, Fun={F, G}, Const={e}, при чему је ar(R)=ar(F)=2, ar(S)=ar(G)=1.

1.1. На предвиђена места уписати *израз*, *формула* или × у зависности од тога да ли је одговарајући низ симбола датог језика <u>израз</u>, <u>формула</u> или <u>ни једно ни друго</u>.

1) F(G(x),G(y)) ________________; **2)** S(F(x,G(e))) ________________;
3) R(x,S(y)) ________________; **4)** R(e,e) ________________;
5) $\forall$x (R(x,G(y)) $\Rightarrow$F(x,y)) ________________; **6)** $\forall$x$\exists$yR(x,y) ________________.

1.2. Одредити слободне промењљиве следећих формула датог језика.

1) $\forall$x(R(x,y)$\wedge\exists$y(R(x,y)$\Rightarrow$S(x))); слободне промењљиве су: ____________________________.
2) $\forall$x(R(x,y)$\wedge\exists$yR(z,y))$\vee$R(x,y); слободне промењљиве су: ____________________________.
3) $\forall$z(R(z,z)$\wedge\exists$y(R(x,y)$\Rightarrow$S(y)); слободне промењљиве су: ____________________________.

1.3. Дати језик је интерпретиран на следећим скуповима.

1) На скупу целих бројева $\mathbb{Z}=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ дата је следећа интерпретација:
$\mathcal{J}_1$(R)=$\leq$ (*уређење целих бројева*), $\mathcal{J}_1$(S)=„*бити позитиван број*“
$\mathcal{J}_1$(F)= +, $\mathcal{J}_1$(G)= g, при чему је g: $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $g(n)=-n$, $n\in\mathbb{Z}$,
$\mathcal{J}_1$(e)=0.

2) На скупу природних бројева $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ дата је следећа интерпретација:
$\mathcal{J}_2$(R)=| (*релација дељивости*) , $\mathcal{J}_2$(S)=„*бити прост број*“={2, 3, 5, 7, 11, 13, …},
$\mathcal{J}_2$(F)= $\cdot$, $\mathcal{J}_2$(G)= g, при чему је g: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $g(n)=2n+1$, $n\in\mathbb{N}$,
$\mathcal{J}_2$(e)=3.

3) На партитивном скупу $\wp(\mathbb{N})$ дата је следећа интерпретација:
$\mathcal{J}_3$(R)=$\subseteq$ (*бити подскуп*), $\mathcal{J}_3$(S)=„*бити коначан скуп*“,
$\mathcal{J}_3$(F)=$\cap$, $\mathcal{J}_3$(G)= $'$, при чему је $A' = \wp(\mathbb{N}) \setminus A$,
$\mathcal{J}_3$(e)=$\varnothing$.

4) На скупу $X=\{a, b, c\}$ дата је следећа интерпретација:
$\mathcal{J}_4$(R)={(a,c), (b, c), (c, c), (a, b)} , $\mathcal{J}_4$(S)= {a, c},
$\mathcal{J}_4$(F)= $*$, при чему је

$*$	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	c
c	c	b	b

$\mathcal{J}_4$(G)= g, при чему је g: $X\to X$, $g(a)=a$, $g(b)=a$, $g(c)=a$,
$\mathcal{J}_4$(e)=c.

A) Одредити вредности израза F(F(x,e),G(y)), G(F(x,x)) и F(G(x),G(x)) у моделу:

1) ($\mathbb{Z}$, $\mathcal{J}_1$) при валуацији промењљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & z & \ldots \\ -2 & 1 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$;

2) ($\mathbb{N}$, $\mathcal{J}_2$) при валуацији промењљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & z & \ldots \\ 2 & 3 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$;

3) ($\wp(\mathbb{N})$, $\mathcal{J}_3$) при валуацији промењљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & z & \ldots \\ \{1,2\} & \{0\} & \{5,7,9\} & \ldots \end{pmatrix}$;

4) (X, $\mathcal{J}_4$) при валуацији променљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & z & \dots \\ a & b & a & \dots \end{pmatrix}$.

Б) Испитати тачност формула $R(F(x,e),G(y))$, $\neg S(F(x,x))\lor R(G(x),G(x))$ у моделу:

1) ($\mathbb{Z}$, $\mathcal{J}_1$) при валуацији променљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & z & \dots \\ -2 & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix}$;

2) ($\mathbb{N}$, $\mathcal{J}_2$) при валуацији променљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & z & \dots \\ 2 & 3 & 0 & \dots \end{pmatrix}$;

3) ($\wp(\mathbb{N})$, $\mathcal{J}_3$) при валуацији променљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & z & \dots \\ \{1,2\} & \{0\} & \{5,7,9\} & \dots \end{pmatrix}$;

4) (X, $\mathcal{J}_4$) при валуацији променљивих $\mu=\begin{pmatrix} x & y & z & \dots \\ a & b & a & \dots \end{pmatrix}$.

В) Испитати тачност реченица $\exists x\forall y R(x,y)$, $\forall x S(x)\lor\forall x\neg S(x)$, $\exists x(\neg S(x)\land\neg S(G(x)))$, $\forall x\forall y(S(x)\land S(y)\Rightarrow S(F(x,y)))$, $\forall x(S(x)\Rightarrow S(G(x)))$, $\exists x(S(x)\land S(G(x)))$, $\forall x\forall y(R(x,y)\Rightarrow R(G(y),G(x)))$, $\forall x(S(x)\Rightarrow\exists y R(x,F(x,y)))$, $\forall x\forall y(R(x,y)\lor R(y,x))$, у моделу**:**
1) ($\mathbb{Z}$, $\mathcal{J}_1$); **2)** ($\mathbb{N}$, $\mathcal{J}_1$); **3)** ($\wp(\mathbb{N})$, $\mathcal{J}_2$); **4)** (X, $\mathcal{J}_3$).

Г) Реченицама датог језика изразити следећа својства модела ($\wp(\mathbb{N})$, $\mathcal{J}_3$):

1) *Комплемент празног скупа није коначан скуп.*
2) *Комплемент коначног скупа није коначан скуп.*
3) *Пресек два коначна скупа је коначан скуп.*
4) *Постоји скуп који није коначан и чији комплемент није коначан.*

Д) Реченицама датог језика изразити следећа својства модела ($\mathbb{N}$, $\mathcal{J}_2$):

1) *Производ два проста броја није прост број.*
2) *Сваки прост број већи од 2 је непаран.*

1.4. Одредити бар једну интерпретацију датог језика на неком скупу тако да следеће реченице буду тачне:

а) $\forall x R(x,x)$, $\forall x\forall y(R(x,y)\Rightarrow R(y,x))$, $\forall x\forall y\forall z(R(x,y)\land R(y,z)\Rightarrow R(x,z))$, $\neg\forall x S(x)$, $\exists x S(x)$;

б) $\neg\forall x S(x)\land\forall x\forall y(R(x,y)\Rightarrow R(G(x),G(y)))$.

1.5 Заокружити слово испред формуле датог језика која је ваљана.

а) $\forall x S(x)\land\forall x R(x,x)\Rightarrow\forall x(S(x)\land R(x,x))$;

б) $\exists x S(x)\lor\exists x R(x,x)\Rightarrow\exists x(S(x)\lor R(x,x))$;

в) $\forall x\neg\exists y(S(x)\lor S(y))\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg S(x)\land\neg S(y))$;

г) $\forall x\neg R(x,x)\lor\forall x R(x,x)$;

д) $\forall x(\neg R(x,x)\lor R(x,x))$.

2. Ако су α,β и γ произвољне предикатске формуле, доказати:

а) $\vdash (\alpha\Rightarrow(\beta\Rightarrow\gamma))\Rightarrow((\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow(\alpha\Rightarrow\gamma))$;

б) $\vdash (\gamma\Rightarrow\alpha)\lor(\gamma\Rightarrow\beta)\Rightarrow(\gamma\Rightarrow\alpha\lor\beta)$;

в) $\vdash (\neg\beta\Rightarrow\neg\alpha)\Rightarrow(\alpha\Rightarrow\beta)$;

г) $\vdash \forall x(\alpha\Rightarrow\beta)\Leftrightarrow(\alpha\Rightarrow\forall x\beta)$, ако x није слободна променљива у формули α;

д) $\vdash \exists x(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow(\forall x\alpha\Rightarrow\exists x\beta)$.

3. Наћи конјунктивну и дисјунктивну нормалну форму формула.
а) $((p\Leftrightarrow q)\wedge(q\vee r))\vee(\neg(p\Rightarrow q)\vee(q\wedge r))$;
б) $p_1\wedge p_4\Rightarrow(\neg p_2\Rightarrow p_1)\wedge(p_4\Rightarrow p_3)$.

4. Дата је истинитосна таблица формуле $\alpha(p,q,r)$.

p	q	r	$\alpha(p,q,r)$
T	T	T	$\perp$
T	T	$\perp$	T
T	$\perp$	T	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T	T
$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

Канонска конјунктивна нормална форма формуле $\alpha(p,q,r)$ је:

____.

Канонска дисјунктивна нормална форма формуле $\alpha(p,q,r)$ је:

____.

5. Испитати, методом резолуције, да ли је скуп формула

$$\{q,\ p\wedge q\Rightarrow r,\ r\wedge q\Rightarrow p,\ \neg r\Rightarrow p,\ \neg r\ \}$$

задовољив.

6. Доказати методом резолуције да је формула $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\ \Rightarrow\ (p\Rightarrow r)$ таутологија.