Računarski sistemi

čas 3 – Aritmetičke operacije

PMF Kragujevac, 2007

Aritmetičke operacije

- u binarnom sistemu (uopšteno i delimično upotrebljivo)
- u nepokretnom zarezu, sa označenim brojevima
- sa binarno kodiranim dekadim brojevima

Sabiranje

Izračunaj u binarnom brojevnom sistemu 11+14

x	y	$x+y$	
		prenos	rezultat
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

	1	1	1	0		prenos (carry out)
		1	0	1	1	
+		1	1	1	0	
	1	1	0	0	1	

most significant bit, or MSB

least significant bit, or LSB

Oduzimanje

Izračunaj u binarnom brojevnom sistemu 83-13

x		0	0	1	1
y		0	1	0	1
x-y	pozajmica	0	1	0	0
	rezultat	0	1	1	0

			1	1				pozajmica
	1	0	1	0	0	1	1	
-				1	1	0	1	
	1	0	0	0	1	1	0	

Množenje

Izračunaj u binarnom brojevnom sistemu 13·6

x	*y*	*x·y*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \times 0\ 1\ 1\ 0 \\
\cline{5-8}
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Deljenje

Izračunaj u binarnom brojevnom sistemu 65:5

	1	0	0	0	0	0	1	:	1	0	1	=	1	1	0	1
-		1	0	1												
		0	1	1	0											
	-		1	0	1											
			0	0	1	0										
					1	0	1									
				-	1	0	1									
					0	0	0									

‘Priroda‘ operanada

- Označeni brojevi u fiksnom zarezu
- Ključno pitanje: na koji način zapisivati označene brojeve?
  - znak i apsolutna vrednost (sign/magnitude) NE
  - nepotpun komplement (one's complement) NE
  - potpun komplement (two‘s complement) DA
- BITNO:
  - Opseg brojeva koji su zapisivi zavisi od broja raspoloživih bitova (kako?). Iako je nekim brojevima potreban manji broj bitova vodeće nule se zadržavaju, a na mestu cifre (bita) najveće težine nalazi se bit za znak (sign bit) – Zašto? Zbog provere pripadanja rezulata računskih operacija opsegu i odbacivanja onih koji su van opsega

‘Priroda‘ operanada

Dakle, svi brojevi imaju istu dužinu zapisa i cifra na mestu najveće težine je znak

znak	vrednost

‘Tumačenje‘ zavisi od vrste zapisa

	Broj u dekadnom sistemu ako je		
Binarni zapis broja	zapis ZA	NK zapis	PK zapis
1010001	-17	-48	-47

Potpuni komplement (ponovni osvrt)

- Potpuni komplement broja n je:

$$m = \bar{n} + 1$$

Nepotpun komplement
(dopuna svake cifre do 1)

u binarnom sistemu

- Primeri:

Ako je	n = 0101 0100	Onda je	m = 1010 1011 + 1 = 1010 1100
	n = 0101 1111		m = 1010 0000 +1 = 1010 0001
	n = 0111 1111		n = 0111 1111 + 1 = 1000 0001
	n = 0000 0001		n = 1111 1110 + 1 = 1111 1111

Potpuni komplement (ponovni osvrt)

- Pogledajmo još jednom sta smo dobili u primerima

1)

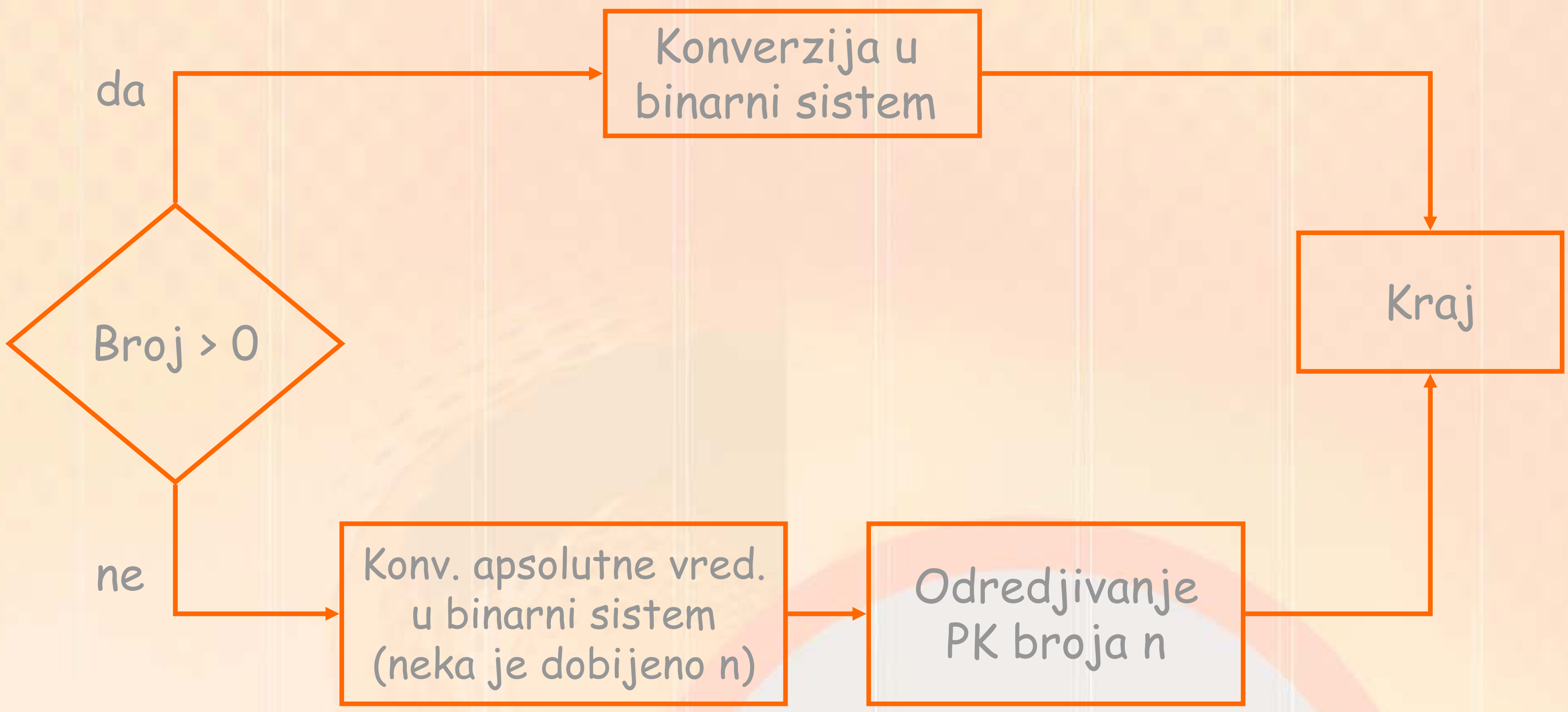
Binarno		Dekadno
0101 0100	=	84
+ 1010 1100	=	+ (-84)
1 0000 0000	=	0

2) Ako je n = 0101 0100 onda je m = 1010 1011 + 1 = 1010 1100,

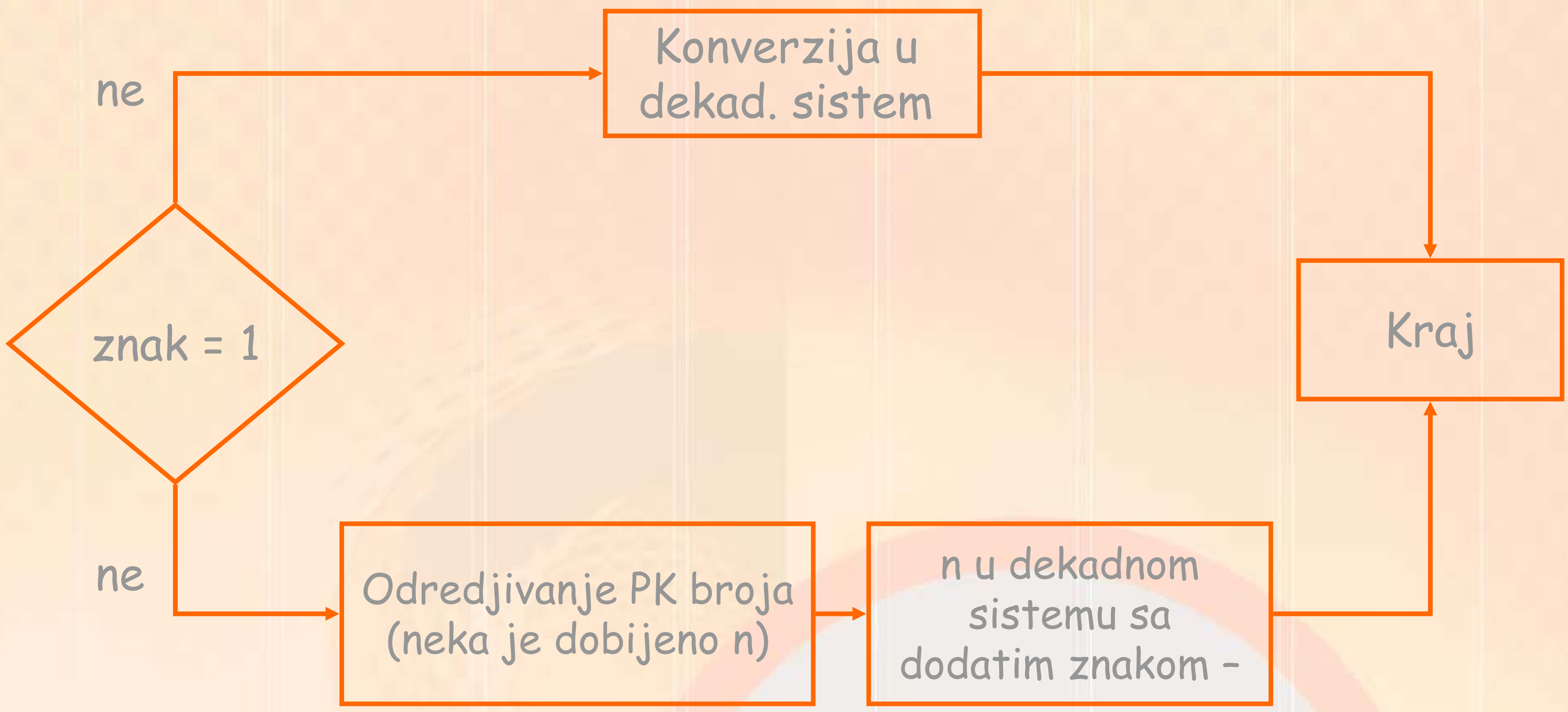
a ako je m = 1010 1100 onda je m = 0101 0011 + 1 = 0101 0100.

Dakle, PK(PK(x)) = x. Npr. -(-84))=84.

Decimalni broj u dekanom sistemu -> PK binarni zapis



PK binarni zapis -> Decimalni broj u dekanom sistemu



Za vežbu

- Odredi PK (u binarnom zapsu dužine 8) sledećih brojeva:

$(78)_{10} \rightarrow (\qquad)_{2,8}^{PK}$

$(-106)_{10} \rightarrow (\qquad)_{2,8}^{PK}$

$(1025)_{10} \rightarrow (\qquad)_{2,8}^{PK}$

$(-455)_{10} \rightarrow (\qquad)_{2,8}^{PK}$

- Dati brojevi predstavljaju PK nekih brojeva. Koji su to brojevi u dekadnom sistemu?

$(1010\ 0011)_2^{PK} \rightarrow (\qquad)_{10}$

$(1111\ 1111\ )_2^{PK} \rightarrow (\qquad)_{10}$

$(1000\ 0000)_2^{PK} \rightarrow (\qquad)_{10}$

$(1000\ 0001)_2^{PK} \rightarrow (\qquad)_{10}$

$(1100\ 0010)_2^{PK} \rightarrow (\qquad)_{10}$

$(0101\ 0101)_2^{PK} \rightarrow (\qquad)_{10}$

Sabiranje označenih brojeva

- 1. korak: uobičajeno sabiranje u binarnom sistemu

	Neoznačeni	Označeni
1011 1110	190	-66
+ 0010 1101	+ 45	+ 45
1110 1011	235	-21

- 2. korak: tumačenje dobijenog
  - Ne zaboravite:
    - da radite sa označenim brojevima, i da su oni predstavljeni u potpunom komplementu
    - da za svaku dužinu zapisa postoji opseg u kojem se mogu naći operandi i rezultat

Sabiranje označenih brojeva

- 2. korak: tumačenje dobijenog (nastavak)
  - U rezultatu se može može javiti 1 bit više od predviđene dužine na mestu najveće težine, npr.

	0111 1100 =	124
	+ 1000 1011 =	+ (-117)
odbacuje se	(1) 0000 0111 =	007

A, šta se dešava u sledećem slučaju?

0111 0011 =		115	
+ 0011 1111 =		+ 63	
1011 0010 =	!!!	~~-78~~	178

178 je van dozvoljenog opsega

(out of range overflow)

Sabiranje označenih brojeva

- Kako da znamo da je rezultat van opsega (bez provere u dekadnom zapisu)?

0111 0011 =		115		
+ 0011 1111 =		+ 63		
1011 0010 =	!!!	~~-78~~	178	

rezultat ima različit znak od sabiraka (koji su istog znaka)

- Da li može doći do prekoračenja opsega ako sabirci u PK imaju različit znak?

Oduzimanje označenih brojeva

- 1. korak: određujemo PK umanjioca

  2. korak: izračunavanje zbira umanjenika i PK umanjioca

- Na primer:

  Oduzmi 1101 1101 od 0101 1100.

1.

	1101 1101
NK	0010 0010
	+ 1
PK	0010 0011

2.

0101 1100 =		92
+ 0010 0011 =	+	35
0111 1111 =		127

Za vežbu

- Izračunaj i proveri u dekadnom zapisu:

  1100 0000 + 0110 1110,

  1000 0001 + 0111 0010,

  0111 1100 – 0111 0101,

  1111 1100 – 0101 0001.

- Izračunaj (PK, binarni zapis dužine 8) sledeće:

  23 + 45,

  132 + 183,

  32 – 15,

  32 – (-150).

Operacije sa binarno kodiranim dekadnim brojevima

- Neka su X i Y brojevi u dekadnom sistemu

$$X \equiv x_n x_{n-1} \ldots x_0, \qquad Y \equiv y_n y_{n-1} \ldots y_0,$$

a njihov zapis u binarno kodiranom sistemu

$$X_k \equiv \alpha(x_n)\alpha(x_{n-1})\ldots\alpha(x_0), \quad Y_k \equiv \alpha(y_n)\alpha(y_{n-1})\ldots\alpha(y_0).$$

- Zbir ova dva broja $Z=X+Y$ se izračunava u dva koraka

međurezultat

1. $Z_k' = X_k + Y_k,$

korekcija

rezultat

2. $Z_k = Z_k' + C_k.$

- Razlika se može svesti na sabiranje.

$$Z = X - Y = X + (-Y) = X + [Y]_{PK}$$

Sabiranje binarno kodiranih dekadnih brojeva

- Postupak

$$
\begin{array}{lccccc}
X_k \equiv & & \alpha(x_n) & \alpha(x_{n-1}) & \ldots & \alpha(x_0) \\
Y_k \equiv & & \alpha(y_n) & \alpha(y_{n-1}) & \ldots & \alpha(y_0) \\
\hline
& (b'_{n+1}) & (b'_n) & (b'_{n-1}) & (b'_1) & (b'_0=0) \\
Z_k' \equiv & & \alpha(z_n') & \alpha(z_{n-1}') & \ldots & \alpha(x_0') \\
& (b''_{n+1}) & (b''_n) & (b''_{n-1}) & (b''_1) & (b''_0=0) \\
C_k \equiv & & \alpha(c_n) & \alpha(c_{n-1}) & \ldots & \alpha(c_0) \\
\hline
Z_k \equiv & & \alpha(z_n) & \alpha(z_{n-1}) & \ldots & \alpha(x_0)
\end{array}
$$

- Kakva će korekcija $\alpha(c_i)$ biti zavisi od:
  - koda kojim su brojevi kodirani
  - $\alpha(z_i')$ i prenosa b_{i+1}',
  - $\alpha(z_i')$ i prenosa b_i'' (u kodu 8421).

Sabiranje u kodu 8421

- Postoji nekoliko slučajeva
  - $b_{i+1}' = 0$
    - $\alpha(z_i') < (1010)_2$ (manje od 10 u dek. sist.) – tada je $\alpha(c_i) = (0000)_2$,
    - $\alpha(z_i') \geq (1010)_2$ (manje od 10 u dek. sist.) – tada je $\alpha(c_i) = (0110)_2$, zapravo kako se na i-tom mestu može naći samo cifra do 10, onda moramo napraviti prenos na mesto veće težine, a samu i-tu cifru moramo smanjiti za 10 $((PK(10)_{16})_2=(16)_{10}-(10)_{10}=(6)_{10}=(0110)_2)$,
  - $b_{i+1}' = 1$ – tada je $\alpha(c_i) = (0110)_2$
  - $b_i'' = 1$ i $\alpha(z_i') \geq (1001)_2$ – tada je $\alpha(c_i) = (0110)_2$

Sabiranje u kodu 8421

- Postupak

$$\begin{array}{lccccc}
X_k \equiv & & \alpha(x_n) & \alpha(x_{n-1}) & \ldots & \alpha(x_0) \\
Y_k \equiv & & \alpha(y_n) & \alpha(y_{n-1}) & \ldots & \alpha(y_0) \\
\hline
 & (b'_{n+1}) & (b'_n) & (b'_{n-1}) & (b'_1) & (b'_0=0) \\
Z'_k \equiv & & \alpha(z_n') & \alpha(z_{n-1}') & \ldots & \alpha(x_0') \\
 & (b''_{n+1}) & (b''_n) & (b''_{n-1}) & (b''_1) & (b''_0=0) \\
C_k \equiv & & \alpha(c_n) & \alpha(c_{n-1}) & \ldots & \alpha(c_0) \\
\hline
Z_k \equiv & & \alpha(z_n) & \alpha(z_{n-1}) & \ldots & \alpha(x_0)
\end{array}$$

Prekoračenje - ako je bilo koji od njih jednak 1

Pod uslovom da su brojevi koje sabiramo NEOZNAČENI

- Odrediti zbir brojeva A i B u kodu 8421, pri čemu se podrazumeva da dekadni brojevi nemaju više od 5 cifara:
  - A=452 i B=8725
  - A=9001 i B=999

Označeni brojevi i oduzimanje u kodu 8421

- Još jednom: oduzimanje se može svesti na sabiranje.

$$Z=X-Y=X+(-Y)=X+[Y]_{PK}$$

- Kritična mesta:
  - Pri određivanju NK dopuna svake cifre se vrši do 9 (ne do 1111)
  - Prekoračenje se određuje na osnovu znaka (pravila koja važe za rad sa označenim brojevima), a ne samo na osnovu toga da li su b'_{n+1} ili b'_{n+1} jednaki 1.
- Zadaci:
  - Odrediti potpuni komplement datih brojeva u kodu 8421, pri čemu se podrazumeva da brojevi nemaju više od 5 cifara:
    - 452, -1275, -9999
  - Izračunati u kodu 8421, pri čemu se podrazumeva da dekadni brojevi nemaju više od 5 cifara:
    - 1275+(-224)
    - 345-798
    - -9901-999

Sabiranje u kodu višak 3

Aritmetičke operacije sa binarno kodiranim dekadnim brojevima

- Postupak

$$
\begin{array}{llllll}
X_k \equiv & & \alpha(x_n) & \alpha(x_{n-1}) & \dots & \alpha(x_0) \\
Y_k \equiv & & \alpha(y_n) & \alpha(y_{n-1}) & \dots & \alpha(y_0) \\
\hline
& (b'_{n+1}) & (b'_n) & (b'_{n-1}) & (b'_1) & (b'_0=0) \\
Z_k' \equiv & & \alpha(z_n') & \alpha(z_{n-1}') & \dots & \alpha(x_0') \\
C_k \equiv & & \alpha(c_n) & \alpha(c_{n-1}) & \dots & \alpha(c_0) \\
\hline
Z_k \equiv & & \alpha(z_n) & \alpha(z_{n-1}) & \dots & \alpha(x_0)
\end{array}
$$

Prekoračenje - ako je bilo koji jednak 1

Pod uslovom da su brojevi koje sabiramo NEOZNAČENI

- **Korekcije**
  - $b_{i+1}' = 0$ – tada je $\alpha(c_i) = (-3)_{10} = (-0011)_2 = (1101)_{PK}$, jer je dobijena cifra pri sabiranju za $(6)_{10}$ veća od cifre u dekadnom zapisu, a trebala bi da bude veća za $(3)_{10}$ (prema kodu višak 3).
  - $b_{i+1}' = 1$ – tada je $\alpha(c_i) = (3)_{10} = (0011)_2$; vrednost prenosa na sledeću cifru je $(16)_{10}$ a ne $(10)_{10}$, a kako je dobijena cifra već za $(6)_{10}$ veća od iste u dekadnom jedina ispravka koju treba napraviti jeste dodavanje $(3)_{10}$ opet zbog koda višak 3.

Označeni brojevi i oduzimanje u kodu višak 3

- Zbog jednostavnosti određivanja PK u kodu višak 3 oduzimanje se svodi na sabiranje u PK.

$$Z=X-Y=X+(-Y)=X+[Y]_{PK}$$

- Podsećanje:
  - kod višak 3 je komplementaran
  - $(0)_{10}=(0011)_{\text{višak 3}}$
- Zadaci:
  - Izračunati zbirove sledećih neoznačenih brojeva u kodu višak 3, pri čemu se podrazumeva da brojevi nemaju više od 5 cifara:
    - 18345 i 9567
  - Odrediti potpuni komplement datih brojeva u kodu višak 3, pri čemu se podrazumeva da brojevi nemaju više od 5 cifara:
    - 452, -1275, -9999
  - Izračunati u kodu višak 3, pri čemu se podrazumeva da dekadni brojevi nemaju više od 5 cifara:
    - 1275+(-224); 345–798; -9901-999