ELEMENTARNA MATEMATIKA - DOMAĆI

1. Postoje li prosti brojevi p i q takvi da je $p^2 + q^2 = 2015$?

2. Dokazati da jednačina $x^2y - xy^2 = 2015$ nema rešenja u skupu celih brojeva.

3. Odrediti sve proste brojeve p, q i r koji zadovoljavaju jednačinu $p^q + q^p = r$.

4. Proizvod jednog dvocifrenog i jednog trocifrenog prirodnog broja zapisuje se u dekadnom zapisu samo pomoću nekoliko cifara 2. Odrediti i kojim brojevima je reč.

5. Postoji li dvocifren prirodan broj čiji je kvadrat jednak kubu zbira njegovih cifara?

6. Odrediti cifre a, b i c i prirodan broj n tako da je $a + \overline{bb} + \overline{ccc} = n^4$. Koliko ima rešenja?

7. Odrediti nepoznate cifre a i b tako da je $3 \cdot \overline{3a} = 2 \cdot \overline{5b}$. Koliko ima rešenja?

8. Odrediti cifre a i b i izračunati prirodan broj n ako je $\overline{a71b} : 36 = n$.

9. Odrediti međusobno različite cifre a, b i c i prirodan broj n tako da važi jednakost $a + \overline{ab} + \overline{abc} = n^3$. Koliko ima rešenja?

10. Dat je broj $\overline{aa \cdots aaa} + \overline{bb \cdots bbb}$ u kome je 2000 cifara a i 1000 cifara b (a i b su cifre različite od nule). Odrediti a i b tako da dati broj bude deljiv sa 36.

11. Odrediti rešenja jednačine $p^q + q^p = 57$ ako su p i q prosti brojevi.

12. Koliko rešenja ima jednačina $pq + qr = 40$ ako su p, q i r prosti brojevi?

13. Odrediti sve proste brojeve p i q tako da je $p^2 + 2^p = q$.

14. Odrediti sve uređene parove (x, y) celih brojeva x i y tako da je $x^2 + \frac{4}{y^2} = 5$.

15. Odrediti sve prirodne brojeve x i y tako da je $\frac{19}{x} + \frac{99}{y} = 109$.

16. Postoje li celi brojevi x i y takvi da je $5x + 65y = 2015$?

17. Prirodan broj n^6 zapisuje se ciframa $2, 4, 5, 8, 8, 9, 9$. Odrediti prirodan broj n.

18. Postoje li celi brojevi x, y i z takvi da jednačina $x^{24} + y^{20} = z^{16} - z^{12} + 4$ ima rešenja?

19. Da li jednačina $x^7 - x^3 + y^2 z^4 = 12345678$ ima rešenja u skupu celih brojeva?

20. Postoji li prirodan broj n takav da jednačina $5^x + 6^y + 7^z = 666 \cdots 66$ (šestica je tačno n) ima rešenje u skupu prirodnih brojeva?

21. Dokazati da broj $172^{180} + 7$ ne može biti kvadrat celog broja .

22. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $x^2 - y^2 = 31$.

23. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

24. U skupu celih brojeva rešiti jednačinu $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$.

25. Ako su x, y i z različiti prirodni brojevi, rešiti jednačinu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

26. U skupu celih brojeva rešiti jednačinu $x^2 + xy + y^2 = 1$.

27. U skupu celih brojeva rešiti jednačinu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

28. Dokazati da jednačina $2x^2 - 215y^2 = 1$ nema celobrojna rešenja.

29. Miloš je kupio dve vrste olovki. Cena prvih je 18 dinara, a drugih 19 dinara po komadu. Ukupno je platio 256 dinara. Koliko je kojih olovaka kupio Miloš?

30. Otac ima dve ćerke. Kada se zbiru njihovih godina doda proizvod, dobija se 14. Koliko godina imaju ćerke?

31. Košarkaški tim sačinjavaju 5 bekova, 4 centra i 3 krila. Na koliko načina se može sastaviti petorka ako u njoj moraju da igraju bar dva beka i bar jedan centar?

32. Po pet crvenih, plavih, belih i crnih kuglica je potrebno povezati u niz tako da ma koje četiri susedne kuglice budu različite boje. Na koliko načina je to moguće izvesti:

    a) ako kuglice nisu numerisane;

    b) ako su kuglice numerisane.

33. Unutar kocke čija je ivica dugačka $9cm$ nalazi se 1981 tačka. Dokazati da postoje dve tačke na udaljenosti manjoj od $1cm$.

34. Neka je dat skup od 1985 ne obavezno različitih prirodnih brojeva. Nijedan od tih brojeva nije deljiv sa prostim brojem većim od 23. Dokazati da među zadatim brojevim postoje četiri čiji je proizvod četvrti stepen nekog prirodnog broja.

35. Na jednoj zabavi n momaka i n devojaka su formirali parove za ples. Pri tome je razlika u visini u svakom paru manja od $10cm$. Dokazati da je razlika u visini k-tog momka po visini i k-te devojke takođe manja od $10cm$, $\forall k = \overline{1, n}$.

36. Parlament državne zajednice Srbije i Crne Gore sastoji se od n poslanika, pri čemu je svako od njih u svađi sa k poslanika. Na koliko načina se može formirati tročlana komisija tako da su svaka dva člana u svađi ili da nikoja dva nisu u svađi?

37. Na koliko načina se 12 istih svezaka, 14 istih olovaka i 16 istih knjiga mogu podeliti četvorici učenika, tako da svaki učenik dobije bar po jedan predmet od svake vrste?

38. Na koliko načina se $4n$ vojnika (različitih po visini) može rasporediti u dve vrste tako da je svaki vojnik iz prve vrste niži od vojnika iza njega?

39. U skupu od 150 tačaka ima tačno 10 četvorki kolinearnih tačaka. Koliko je najviše različitih pravih određeno ovim skupom tačaka?

40. Ukrotitelj izvodi 7 lavova i 6 tigrova. Na koliko načina ih može rasporediti u vrstu ako tigrovi ne smeju biti jedan pored drugog? (Svi tigrovi su međusobno različiti i svi lavovi su međusobno različiti)

41. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^9 u čijem zapisu se pojavljuje niz cifara 456?

42. Neka su $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$ podskupovi skupa prirodnih brojeva. Odrediti broj konstantnih preslikavanja skupa A u skup B.

43. Neka su $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$ podskupovi skupa prirodnih brojeva. Odrediti broj preslikavanja skupa A u skup B takvih da imaju 3 fiksne tačke.

44. Sve tačke prostora obojene su jednom od tri boje. Dokazati da postoji boja (od tri posmatrane) takva da za svaki pozitivan realan broj d postoje dve tačke obojene tom bojom koje su na rastojanju d.

45. Dokazati da se među 39 uzastopnih brojeva uvek može naći jedan čiji je zbir cifara deljiv sa 11.

46. Dokazati da među brojevima $574, 574574, 574574574, \ldots$ postoji bar jedan koji je deljiv sa 31.

47. Dokazati da je niz brojeva $0006, 0036, 0216, 1296, \ldots$ koji predstavljaju poslednje četiri cifre brojeva $6, 6^2, 6^3, 6^4, \ldots$ redom, počev od nekog člana periodičan.

48. Svaka stranica kvadrata podeljena je tačkama na n duži. Koliko ima trouglova čija su temena deone tačke ako se temena kvadrata ne smatraju deonim tačkama?

49. Na koliko načina se pokerašima Aci, Branku, Milanu i Dejanu može podeliti po pet karata iz standardnog špila od 52 karte?

50. Na nekoj pravoj se nalazi n tačaka, a na njoj paralelnoj pravoj m tačaka. Koliko trouglova određuju ove tačke?

51. U 10 petokrevetnih soba je potrebno razmestiti 50 ljudi. Na koliko načina se ovo može učiniti ako su sve sobe i svi gosti ravnopravni?

52. Koliko redova je potrebno da ima tablica istinitosti u iskaznom računu za iskaznu formulu sa n različitih iskaznih slova?

53. Odrediti član koji u razvijenom obliku binoma $\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right)^{11}$ ima promenljivu x na peti stepen.

54. Odrediti trinaesti član u razvijenom obliku binoma $\left(9x + \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$ ako je binomni koeficijent trećeg člana 105.

55. Zbir koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana binoma $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ je 46. Odrediti član koji ne sadrži x.

56. Odrediti x u izrazu $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$ ako je odnos sedmog člana od početka prema sedmom članu od kraja $1 : 6$.

57. Odrediti sve racionalne članove u razvijenom obliku binoma $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^{10}$.

58. Primenom matematičke indukcije dokazati:

    a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

    b) $133 | 11^{n+2} + 12^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

59. Neka je n neparan broj. Dokazati da među brojevima $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ ima neparan broj neparnih.

60. Izračunati sume:

a) $\displaystyle\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2$.

61. Izračunati sume:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i}\binom{n}{2k+1-2i}$;

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1}$.

62. Dokazati:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$, k-paran;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 5^k = \frac{6^n - (-4)^n}{2}$, k-neparan.

63. Dokazati:

a) $\displaystyle n \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k} = m \cdot (-1)^{m-1} \cdot \binom{n}{m}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{i}$.

64. Dokazati da je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k^3 = n^2(n+3)2^{n-3}$.

65. Dokazati jednakost $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \cdot \binom{2k}{k} \cdot 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$.

66. U razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{x^2} - x^{-1}\right)^{15}$ odrediti član koji ne sadrži x.

67. U razvoju polinoma $(2p-3q+4r-2s)^{12}$ odrediti koeficijent uz član $p^2q^3r^3s^4$.

68. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važi jednakost

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

69. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važi jednakost

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

70. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važi jednakost

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

Svaki student radi po tri zadatka i to po sledećem rasporedu:

1. 276/14 - 3. 37. 62.
2. 1010/11 - 10. 44. 59.
3. 03/09 - 22. 32. 63.
4. 35/10 - 5. 31. 53.
5. 1001/12 - 6. 35. 59.
6. 1017/11 - 19. 40. 67.
7. 45/09 - 17. 45. 69.
8. 26/09 - 16. 39. 66.
9. 02/08 - 15. 44. 64.
10. 1004/14 - 30. 41. 56.
11. 30/09 - 26. 36. 57.
12. 11/07 - 18. 51. 68.
13. 50/09 - 18. 42. 69.
14. 08/12 - 11. 49. 61.
15. 35/12 - 8. 35. 60.

16. 01/12 - 20. 38. 63.

17. 42/12 - 23. 48. 61.

18. 33/12 - 7. 50. 67.

19. 31/12 - 1. 49. 56.

20. 19/12 - 9. 50. 53.

21. 40/12 - 14. 43. 65.

22. 35/11 - 17. 31. 60.

23. 48/12 - 25. 37. 64.

24. 21/12 - 11. 51. 58.

25. 22/12 - 25. 40. 55.

26. 10/12 - 23. 42. 59.

27. 05/12 - 24. 47. 68.

28. 29/12 - 16. 43. 53.

29. 08/11 - 5. 42. 61.

30. 26/11 - 17. 44. 63.

31. 29/11 - 12. 31. 59.

32. 06/08 - 23. 40. 67.

33. 38/10 - 3. 52. 61.

34. 26/10 - 19. 40. 57.

35. 21/10 - 29. 51. 60.

36. 18/12 - 11. 39. 55.

37. 07/12 - 22. 48. 61.

38. 16/10 - 28. 34. 54.

39. 03/10 - 2. 39. 65.

40. 12/12 - 9. 49. 66.

41. 17/12 - 13. 48. 70.

42. 36/12 - 18. 46. 67.

43. 24/12 - 2. 45. 57.

44. 27/12 - 4. 32. 70.

45. 1004/12 - 27. 33. 56.

46. 33/11 - 21. 50. 63.

47. 13/11 - 24. 38. 69.

48. 02/07 - 7. 48. 66.

49. 31/11 - 28. 33. 54.

Radove možete predati do **petka 08.05.2015.** godine do 14h.