Predikatski račun prvog reda

Preneks forme i Skolemova forma

- **Definicija**. Formula oblika $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\ldots(Q_n x_n)A$, gde je svaki od Q_i bilo znak $\forall$, bilo $\exists$, a u formuli A nema kvantifikatora, je u *preneks normalnoj* formi.

Preneks forme i Skolemova forma

```
Procedure PrekeksForma
Begin
```

1. Eliminisati veznike $\leftrightarrow$ i $\rightarrow$ koristeći ekvivalnecije
   $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ i $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
2. Dok god je moguće ponavljati primenu DeMorganovih zakona
   $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$,
   $\neg(\forall x)A \equiv (\exists x)\neg A$ i $\neg(\exists x)A \equiv (\forall x)\neg A$
3. Dok god je moguće ponavljati primenu zakona dvojne negacije $\neg\neg A \equiv A$
4. Ako je potrebno primeniti zakone o preimenovanju promenljivih
5. Dok god je moguće ponavljati primenu sledećih ekvivalnecija
   $(\forall x)A \wedge B \equiv (\forall x)(A \wedge B)$, $(\forall x)A \vee B \equiv (\forall x)(A \vee B)$,
   $B \wedge (\forall x)A \equiv (\forall x)(B \wedge A)$, $B \vee (\forall x)A \equiv (\forall x)(B \vee A)$,
   $(\exists x)A \wedge B \equiv (\exists x)(A \wedge B)$, $(\exists x)A \vee B \equiv (\exists x)(A \vee B)$,
   $B \wedge (\exists x)A \equiv (\exists x)(B \wedge A)$, $B \vee (\exists x)A \equiv (\exists x)(B \vee A)$

```
End.
```

Preneks forme i Skolemova forma

- Neka je data predikatska formula A u preneks formi $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\ldots(Q_n x_n)B$ i neka je Q_r (za $1 \le r \le n$) prvi po redu egzistencijalni kvantifikator. Ako su $Q_{s_1}, Q_{s_2}, \ldots, Q_{s_m}$ svi univerzalni kvantifikatori levo od Q_r u prefiksu, i $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$, tada se promenljiva x_r u formuli A zamenjuje termom $f\left(x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_m}\right)$, pri čemu se simbol f ne pojavljuje u A. Ovakav funkcijski simbol se naziva *Skolemova funkcija*.
- Potom se iz prefiksa briše $Q_r x_r$, a postupak se ponavlja dok god se ne eliminišu svi egzistencijalni kvantifikatori iz formule. Skolemizacijom se od formule A u preneks formi dobija formula A_s koja je takođe u preneks formi, ali u čijem prefiksu nema egzistencijalnih kvantifikatora. Ta forma se naziva *Skolemova standardna forma*.
- **Teorema**. Formula A je zadovoljiva ako i samo ako je zadovoljiva i njena Skolemova standardna forma A_s.

Unifikacija

- Unifikacija je jedan vid zamene koja je do sada često spominjana. U zamenama, a time i unifikacijama, se uvek zamenjuje promenljiva nekim termom, što se može shvatiti i kao dodeljivanje vrednosti promenljivoj ili, u programerskoj terminologiji, kao prenos argumenata. Zamena terma koji nije promenljiva nekim termom nije dozvoljena.
- **Definicija**. *Zamena* je svaki konačan skup oblika $\theta = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ gde su za svaki i, x_i promenljiva i term t_i različit od x_i, a sve promenljive x_i su međusobno različite. Svaki element t_i/x_i ovog skup je komponenta zamene i shvata se kao da je t_i zamena za x_i. Primerak literala L pri zameni θ (u oznaci $L\theta$) se dobija jednovremenom zamenom svih x_i odgovarajućim t_i u literalu L.

Unifikacija

- Slično primercima literala uvode se primerci klauza, formula, njihovih skupova itd.
- U postupku unifikacije javiće se potreba za kombinacijom više zamena, odnosno, da se na objekat nad kojim je primenjena jedna primeni i druga zamena.
- Recimo, ako je L literal, a θ i ρ zamene, biće u jednom momentu potrebno konstruisati literal $L\theta$, a nešto kasnije i literal $(L\theta)\rho$, što se obično piše kao $L\theta\rho$.
- Kako je $\theta\rho$ zamena, moguće je i dalje slaganje, recimo sa zamenom λ, kada se dobija $\theta\rho\lambda$.

Unifikacija

- **Definicija**. Neka su $\theta = \{t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\}$ i $\rho = \{u_1/y_1, u_2/y_2, \ldots, u_k/y_k\}$ dve zamene. Njihova kompozicija (u oznaci $\theta\rho$) je zamena koja se dobija iz skupa $\{t_1\rho/x_1, \ldots, t_n\rho/x_n, u_1/y_1, \ldots, u_k/y_k\}$ brisanjem svih elemenata oblika:
  - $t_j\rho/x_j$, gde je $t_j\rho = x_j$ i
  - u_i/y_i, gde je y_i iz skupa $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- Kompozicija zamena je asocijativna operacija, a kompozicija zamene sa praznom zamenom je sama ta zamena.
- **Definicija**. Zamena θ je *unifikator* skupa literala $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$, ako je $L_1\theta = L_2\theta = \cdots = L_n\theta$. Skup literala je *unifikabilan* ako ima unifikator. Zamena θ je najopštiji unifikator nekog skupa literala, ako je unifikator tog skupa i za svaki drugi unifikator ρ postoji zamena λ takva da je $\rho = \theta\lambda$.

Unifikacija

- Da bi se unifikovala dva literala, recimo *P(a)* i *P(x)*, potrebno je najpre ispitati da li su jednaki, u kom slučaju je unifikacija trivijalna, tj. prazan skup.
- Međutim, pošto oni nisu jednaki, potrebno je pronači prvo mesto na kome se literali razlikuju, i pokušati razrešiti tu razliku.
- Podizrazi literala, koji počinju na tom mestima, čine *skup različitosti Raz*.
- **Teorema**. (**Teorema unifikacije**) Svaki skup literala koji ima unifikator ima i najopštiji unifikator.

Unifikacija

procedure Unifikacija(W: skup literala)
begin
  if (neki literali u skupu su negirani, a neki ne) or (nemaju svi literali isti rel. simbol)
  then
    Skup W nije unifikabilan
    return
  $k=0$
  W_0=skup literala W koji se testira
  T_0=prazna zamena, tj. prazan skup
  while (W_k nije jednočlan skup) do begin
    Raz_k je skup različitosti skupa W_k
    if Raz_k sadrži promenljivu x_k i term t_k tako da se x_k ne javlja u t_k then
      $R_k=\{t_k/x_k\}$
      $T_{k+1}=T_kR_k$
      $W_{k+1}=W_kR_k$ (tj. $W_{k+1}=WT_{k+1}$)
      $k=k+1$
    else
      Skup W nije unifikabilan
      return
  end
  Skup W je unifikabilan i T_k je najopštiji unifikator skupa W
end

Unifikacija

- **Definicija.**
  1. Promenljive i konstante su termi.
  2. Ako su t_1, t_2, …, t_n termi i ako je f operacijsko slovo dužine n, onda je reč $f(t_1,t_2,\ldots, t_n)$term;
  3. Termi se mogu obrazovati samo posle konačno mnogo primena tačaka 1 i 2 ove definicije.
- Neka su t_1 i t_2 dva terma čije su promenljive $v_1,v_2,\ldots v_n$. Kažemo da su termi t_1 i t_2 ujednačivi ako postoje termi $s_1,s_2,\ldots,s_n$ takvi da zamenama $v_1\rightarrow s_1$, $v_2\rightarrow s_2$, …, $v_n\rightarrow s_n$ svih pojavljivanja promenljivih $v_1,v_2,\ldots,v_n$ termima $s_1,s_2,\ldots,s_n$ u termima t_1 i t_2, termi t_1 i t_2 se prevode u identične terme (reči).

Unifikacija

- Algoritam kojim se ispituje da li su dva data terma ujednačiva zove se *algoritam unifikacije*. Kao ulazne argumente ovaj algoritam prihvata dva terma t_1 i t_2, a odgovori koji se mogu dobiti su:
  - termi su neujednačivi
  - termi su ujednačivi i bukvalno jednaki
  - termi su ujednačivi i spisak zamena je $v_1 \rightarrow term_1(s_1,\ldots,s_r),\ldots, v_n \rightarrow term_n(s_1,\ldots,s_r)$ gde su $v_1,\ldots,v_n$, promenljive termova t_1 i t_2 i nijedna v_i nije jednaka sa nekom s_i. Promenljive $s_1,\ldots,s_r$ su sve promenljive koje učestvuju u desnim stranama zamena i za njih se kaže da su slobodne promenljive

Unifikacija

- Postoje razni algoritmi unifikacije, a ovde će biti izložen *algoritam prvog nesklada*. Pretpostavimo da su zadata dva terma t_1 i t_2.
  1. Idući sleva na desno po osnovnim sastojcima termova t_1 i t_2 traži se prvi nesklad, tj. prva razlika u termima t_1 i t_2. Ukoliko se na nesklad ne naiđe ide se na korak (2), a ukoliko se naiđe razlikuju se dva slučaja:
     a) Nesklad ima oblik $\frac{s}{\sigma}$ gde su *s* i σ slova u tim rečima. Ako ni *s* ni σ nisu promenljive tada je nesklad neotklonjiv i algoritam staje sa zaključkom da polazni termi nisu ujednačivi.
     b) Nesklad ima oblik $\frac{s}{x}$ ili $\frac{x}{s}$ gde je *x* neka promenljiva. Tada je nesklad otklonjiv i spisak zamena se dopunjuje još jednom zamenom oblika *x*→*vrednost* gde je *vrednost* term koji počinje sa *s*. Promenljiva *x* se zameni sa *vrednost* u termima t_1 i t_2. Termi t_1 i t_2 pređu u druga dva terma t'_1 i t'_2. Stavlja se da je $t_1=t'_1$ i $t_2 = t'_2$ i ide na (1)
  2. Ako nesklad nije pronađen na samom početku algoritma, algoritam se završava sa zaključkom da su polazni termi ujednačivi i bukvalno jednaki, a inače algoritam se završava sa zaključkom da su polazni termi ujednačivi, a proizvedene zamene određuju traženo ujednačavanje.

Unifikacija

- **Teorema**. Neka su termi t_1 i t_2 ujednačivi i neka im prema algoritmu prvog neskladа odgovaraju zamene oblika

  $$v_1 \to term_1(s_1,\ldots,s_r),\ldots,\ v_n \to term_n(s_1,\ldots,s_r)$$

  Dalje, neka se termi t_1 i t_2 ujednačuju za izvesne posebne vrednosti svojih promenljivih. Tada postoje vrednosti slobodnih promenljivih $s_1,\ldots,s_r$ tako da se pretpostavljeno ujednačavanje termova t_1 i t_2 može dobiti pomoću navedenih zamena upravo za te vrednosti $s_1,\ldots,s_r$.

Metod rezolucije

- **Definicija. (Binarna rezolucija)** Neka su C_1 i C_2 dve klauze koje nemaju zajedničke promenljive, L_1 literal iz C_1 i L_2 literal iz C_2. Ako L_1 i $\neg L_2$ imaju najopštiji zajednički unifikator θ, binarna rezolventa klauza C_1 i C_2 po literalima L_1 i L_2 je klauza

$$Res(C_1, C_2, L_1, L_2) = (C_1\theta - \{L_1\theta\}) \cup (C_2\theta - \{L_2\theta\})$$

  dobijena tako što je najpre iz $C_1\theta$ izbrisan $L_1\theta$, zatim $L_2\theta$ iz $C_2\theta$, nakon čega su preostali literali povezani disjunkcijom.
- **Teorema**. Neka je A rečenica u Skolemovoj standardnoj formi takva da je njena matrica A^* u konjunktivnoj normalnoj formi. Neka je $Cla(A^*)$ skup klauza iz A^*. Formula A^* je nezadovoljiva ako i samo ako je $\varnothing \in Res^*(Cla(A^*))$.

Metod rezolucije

```
procedure PredikatskaRezolucija
begin
```
Prevesti negaciju formule u Skolemovu standardnu formu u kojoj je matrica u konjuktivnoj normalnoj formi $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_n$

```
  F={D1,D2,…,Dn}
  Res0(F)=F
  Res1(F)=R(Res0(F))
  i=1
  while ((Resi(F)<>Resi-1(F)) and (Ø ∉ Resi(F)) do
  begin
    i=i+1
    Resi(F)=R(Resi-1(F))
  end
  if (Resi(F))
  then Formula je valjana
  else Formula nije valjana
end
```

Modalne logike

Modalne logike

- Jedan od zadataka modalnih logika je da opišu načine rezonovanja sa običnim i kvalifikovanim, recimo nužnim ili mogućim, istinama.
- Primeri pitanja sa kojima se modalne logike susreću su: ako je nešto nužno tačno, da li je nužno da je to nužno tačno, ili da li postoji mogućnost da neki iskaz bude tačan i sl.
- Jezik modalnih logika nastaje proširivanjem jezika klasične logike unarnim operatorom $\Box$ (koji ćemo zvati “nužno”), dok se operator (koji ćemo zvati “moguće”), definiše sa $\Diamond\alpha =_{def} \neg\Box\neg\alpha$.

Modalne logike

- **Definicija**. Neka je Φ skup iskaznih slova. Uređena trojka <*W*,*R*,*v*> je iskazni Kripkeov model, ako je ispunjeno:
  - *W* je neprazan skup čije se elementi nazivaju (modalni) svetovi ili stanja,
  - *R* je binarna relacija nad $W \left(R \subset W \times W \right)$ koja se naziva relacija dostižnosti ili relacija vidljivosti i
  - *v* je valuacija, funkcija $v : W \times \Phi \mapsto \left\{ \top, \bot \right\}$ koja svakom svetu i svakom iskaznom slovu pridružuje jednu od istinitosnih vrednosti $\top$ i $\bot$.
- Umesto iskazni Kripkeov model koristi se i nazivi iskazni modalni model, modalni model ili samo model.

Modalne logike

- Za svaki svet *w* nekog modela, *v(w)* je klasična iskazna interpretacija, jer za svako iskazno slovo $p \in \Phi$, $v(w)(p) \in \{\top, \bot\}$.
- Ako za dva sveta *w* i *u* nekog iskaznog Kripkeovog modela $<W,R,v>$ važi da je *wRu*, kažemo da je svet *u* dostižan (ili vidljiv) iz sveta *w*.
- Takođe, uočimo i da se u klasičnom slučaju reč model koristila u smislu interpretacije pri kojoj formula važi što se značajno razlikuje od značenja iz prethodne definicije u kojoj je model semantička struktura u kojoj formule dobijaju značenje u skladu sa sledečom definicijom.

Modalne logike

- **Definicija**. Neka je $M=<W,R,v>$ iskazni Kripkeov model. Relacija (modalne) zadovoljivosti (u oznaci $\models$) je binarna relacija između svetova modela i formula takva da za svaki svet $w \in W$ važi:
  - ako je $p \in \Phi$, $w \models p$ ako i samo ako $v(w)(p)=\top$,
  - $w \models \neg\alpha$ ako i samo ako nije $w \models \alpha$,
  - $w \models (\alpha \wedge \beta)$ ako i samo ako $w \models \alpha$ i $w \models \beta$
  - $w \models \Box\alpha$ ako i samo ako za svaki svet u koji je dostižan iz w važi u $u \models \alpha$.
- Ako je $w \models \alpha$, formula α je *zadovoljena* u svetu w.

Modalne logike

- Prva tri uslova za relaciju zadovoljivosti su u skladu sa odgovarajućom relacijom u klasičnoj logici, dok je poslednji zahtev karakterističan.
- Da bi formula $\Box\alpha$ bila zadovoljena u svetu *w*, tražimo da formula mora biti zadovoljena u svakom od svetova dostižnih iz sveta *w*.
- Ako je $w \models \alpha$, kaže se i α važi u svetu *w* ili α je tačno u svetu *w*.
- Oznaka $w \not\models \alpha$ se koristi ako α ne važi u svetu *w*.
- **Definicija**. Formula α je zadovoljiva ako postoji neki svet *w* nekog iskaznog Kripkeovog modela za koji je $w \models \alpha$. Ako takav svet ne postoji, formula je nezadovoljiva. Formula α je valjana u nekom iskaznom Kripkeovom modelu ako je zadovoljena u svakom svetu tog modela.

Modalne logike

- **Definicija**. Formula α je valjana u klasi iskaznih Kripkeovih modela *C* ili *C*-valjana ako je valjana u svakom modelu iz te klase.

Naziv klase modela	Uslovi za relaciju dostižnosti
K	bez uslova
T	refleksivnost
K4	tranzitivnost
KB	simetričnost
S4	refleksivnost i tranzitivnost
B	refleksivnost i simetričnost
S5	refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost
D	idealizacija
D4	idealizacija i tranzitivnost
DB	idealizacija i simetričnost

Metod tabloa

- **Definicija**. *Prefiks* je konačan niz prirodnih brojeva. Prefiks σ' je *prosto proširenje* prefiksa σ ako je $\sigma'=\sigma,n$ za neki prirodan broj *n*. Ako je σ prefiks i *X* označena modalna formula, tada je σX *prefiksirana označena modalna formula*.
- Slično kao i u klasičnom iskaznom slučaju, izgradnja tabloa započinje postavljanjem formule 1*FA* u koren drveta, nakon čega se primenjuju pravila konstrukcije.
- Grana tabloa je *zatvorena* ako se na njoj nađu formule oblika σ*FA* i σTA.
- Tablo je *zatvoren* ako mu je zatvorena svaka grana.
- Zatvoreni tablo za formulu 1F*A* je dokaz za formulu *A*.

Metod tabloa

- Prefiks σ se koristi na grani tabloa ako se na grani nalazi bar jedna prefiksirana formula oblika σX, za neku označenu formulu X.
- Prefiks σ je bez restrikcija na nekoj grani tabloa ako nije početni deo bilo kog prefiksa na toj grani.
- Između prefiksa definisačemo binarnu relaciju dostižnosti. Ova relacija zadovoljava:
  - opšti uslov, ako je σ,n dostižno iz σ, za svaki prirodan broj n i svaki prefiks σ,
  - refleksivnost, ako je σ dostižno iz σ za svaki prefiks σ,
  - inverznost, ako je σ dostižno iz σ,n za svaki svaki prirodan broj n i svaki prefiks σ i
  - tranzitivnost, ako je σ,σ‘ dostižno iz σ za svaki konačan neprazan niz prirodnih brojeva σ‘ i svaki prefiks σ.

Metod tabloa

- Pravila za konstrukciju tabloa se uvode na sledeči način. Neka je čvor *Y* kraj neke grane do tog momenta konstruisanog drveta. Zavisno od formula na grani koja sadrži *Y*, nastavak konstrukcije je moguče izvesti nekim od pravila:
  - α-pravilo: ako je neka $\sigma\alpha$ formula na grani, tada se grana produžava sa dva nova čvora od kojih jedan sadrži formulu $\sigma\alpha_1$, a drugi formulu $\sigma\alpha_2$,
  - β-pravilo: ako je neka $\sigma\beta$ formula na grani, tada se grana u čvoru *Y* grana, pri čemu levi naslednik sadrži $\sigma\beta_1$, a desni $\sigma\beta_2$ formulu.
  - ν-pravilo: ako je neka $\sigma\nu$ formula na grani, tada se grana produžava čvorom $\sigma'\nu_0$, gde je σ' dostižno iz σ i dodatno zadovoljava:
    - za *K*, *KB* i *K4*, σ' je več korišten na grani i
    - za *D*, *T*, *DB*, *D4*, *S4* i *S5*, σ' je korišten na grani ili je prosto proširenje prefiksa σ
  - π-pravilo: ako je neka $\sigma\pi$ formula na grani, tada se grana produžava čvorom $\sigma'\pi_0$, gde je σ' prosto proširenje bez restrikcija prefiksa σ.

Metod tabloa

α	α_1	α_2
$TA \wedge B$	TA	TB
$FA \vee B$	FA	FB
$FA \to B$	TA	FB
$T\neg A$	FA	TA
$F\neg A$	TA	FA

β	β_2	β_1
$FA \wedge B$	FA	FB
$TA \vee B$	TA	TB
$TA \to B$	FA	TB

ν	ν_0
$T\Box A$	TA
$F\Diamond A$	FA

π	π_0
$T\Diamond A$	TA
$F\Box A$	FA

$$\begin{array}{c} \sigma\ \alpha \\ | \\ \sigma\ \alpha_1 \\ | \\ \sigma\ \alpha_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\sigma\ \beta} \\ / & \backslash \\ \sigma\ \beta_1 & \sigma\ \beta_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sigma\ \nu \\ | \\ \sigma'\ \nu_0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sigma\ \pi \\ | \\ \sigma'\ \pi_0 \end{array}$$