

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА - ДРУГИ ДОМАЋИ

- Доказати да за произвољне n -торке реалних бројева $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ важи неједнакост: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}$.
- Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, важи неједнакост: $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$.
- Показати да важи неједнакост $\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq 2^n$, где су $a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, такви да је $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$.
- Доказати да за све позитивне реалне бројеве a, b, c важи неједнакост:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

- Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати да је $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$.
- Нека су x_1, x_2, \dots, x_n позитивни реални бројеви чији је збир једнак један. Доказати да за сваки позитиван број a важи неједнакост:

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1} \geq \frac{n^2}{2}.$$

- Нека су x, y, z позитивни реални бројеви, такви да је $x + y + z \geq 1$. Доказати да је:

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{x+z} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Доказати неједнакост: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
- Доказати неједнакост: $a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2$.
- Доказати да за позитивне реалне бројеве x, y, z важи неједнакост:

$$27[(x+y)(y+z)(z+x)]^2 \geq 64xyz(x+y+z)^3.$$

- Нека су a, b, c позитивни реални бројеви, такви да је $a + b + c \geq abc$. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.
- Ако за позитивне бројеве a, b, c важи $abc = 1$, доказати да је тада:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1.$$

- Нека су a, b, c, d ненегативни реални бројеви чија је сума један. Доказати неједнакост:

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176abcd}{27}.$$

- Ако је $a, b > 0$ и $a + b = 1$, доказати да је: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.
- Доказати да је за свако $n \in \mathbb{N}$ испуњено: $\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}$.

За дужине елемената троугла показати да важи (задачи 16-30)

16. $\frac{s(s-a)}{a^2} + \frac{s(s-b)}{b^2} + \frac{s(s-c)}{c^2} \geq \frac{9}{4}$.
17. $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$.
18. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$.
19. $1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$.
20. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$.
21. $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt{3}$, за $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.
22. $6r\sqrt{3} \leq a + b + c \leq 3R\sqrt{3}$.
23. $(abc)^2 \geq \left(\frac{4P}{\sqrt{3}}\right)^3$.
24. $4\sqrt{3}P \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$.
25. $\sqrt{3}P \leq (R+r)^2$.
26. $h_a h_b h_c \geq 27r^3$.
27. $2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}P$.
28. $h_a + h_b + h_c = \frac{ab+bc+ca}{2R}$.
29. $r^3 = \frac{abc}{(a+b+c)^3} h_a h_b h_c$.
30. $s = 2R^2 \frac{h_a h_b h_c}{abc}$.

Решити једначине (задачи 31-50)

31. $2 \cos^2 x + 5 \sin x = 5$.
32. $3 + \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos x = 0$.
33. $2 \cos 2x - 3 \cos^2 x - 2 \sin x = 0$.
34. $\sin 3x + \sin 7x = 2 \sin 5x$.
35. $\sin 3x = \cos 5x$.
36. $3 \cos x + 2 \sin x = 1$.
37. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$.
38. $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.
39. $6 + 6 \cos x + 5 \sin x \cos x = 0$.
40. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$.
41. $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$.

$$42. (1-x)\sqrt{3\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 2 = \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1}.$$

$$43. \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 2 - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}.$$

$$44. \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

$$45. \sqrt[3]{\frac{2x+3}{2x-3}} + \sqrt[3]{\frac{2x-3}{2x+3}} = \frac{8}{13} \cdot \frac{4x^2+9}{4x^2-9}.$$

$$46. \sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 2.$$

$$47. \sqrt[4]{(x+a)^2} + \sqrt[4]{(x-a)^2} = \sqrt[4]{x^2-a^2}, a \in \mathbb{R}.$$

$$48. \log_x 10 + \log_{x^2} 10 = 6.$$

$$49. 2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2x} a = 0, a > 0, a \neq 1.$$

$$50. \log_4(x+12) \log_x 2 = 1.$$

Решити неједначине (задаци 51-70)

$$51. \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x-4} < \frac{1}{30}.$$

$$52. \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} > 4 + \frac{x-7}{x-1}.$$

$$53. \frac{x}{x^2+7x+3} - \frac{x}{x^2-7x+3} < \frac{50}{63}.$$

$$54. |3x+2| > 4|x-1|.$$

$$55. |x^2-x| - |x| < 1.$$

$$56. \sqrt{25-x^2} - \sqrt{x^2-7x} > 3.$$

$$57. \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

$$58. \sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}.$$

$$59. \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} < 35-2x.$$

$$60. \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}.$$

$$61. \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x > 0.$$

$$62. 2 \sin^2 3x + \sin^2 6x < 2.$$

$$63. \sin 7x + \sqrt{3} \cos 5x > \sin 5x + \sqrt{3} \cos 7x.$$

$$64. \operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\sin x}{\cos \frac{3x}{2}}.$$

$$65. \cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x < \frac{3}{4}.$$

$$66. \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0.$$

$$67. \frac{-5}{2x^2-11x+12} < \frac{-5}{2x^2-9x+7}.$$

$$68. \frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1}.$$

$$69. \sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1.$$

$$70. \sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} < x^2.$$

Сваки студент ради по три задатка и то по следећем распореду:

1. 276/14 - 9. 31. 60.
2. 1010/11 - 29. 33. 68.
3. 03/09 - 6. 46. 60.
4. 35/10 - 26. 38. 55.
5. 1001/12 - 16. 41. 63.
6. 1017/11 - 4. 44. 66.
7. 45/09 - 18. 47. 63.
8. 26/09 - 27. 38. 52.
9. 02/08 - 30. 42. 66.
10. 1004/14 - 19. 31. 65.
11. 30/09 - 1. 32. 59.
12. 11/07 - 8. 50. 67.
13. 50/09 - 14. 39. 58.
14. 08/12 - 19. 33. 59.
15. 35/12 - 17. 42. 56.
16. 01/12 - 4. 35. 67.
17. 42/12 - 20. 31. 61.
18. 33/12 21. 40. 60.
19. 31/12 - 1. 38. 63.
20. 19/12 - 28. 44. 70.
21. 40/12 - 11. 42. 65.
22. 35/11 - 23. 47. 56.
23. 48/12 - 24. 36. 52.

24. 21/12 - 25. 43. 55.
25. 22/12 - 13. 49. 64.
26. 10/12 - 7. 50. 65.
27. 05/12 - 8. 33. 57.
28. 29/12 - 10. 48. 51.
29. 08/11 - 6. 34. 62.
30. 26/11 - 28. 35. 63.
31. 29/11 - 5. 34. 65.
32. 06/08 - 15. 40. 70.
33. 38/10 - 20. 45. 65.
34. 26/10 - 1. 37. 69.
35. 21/10 - 12. 46. 58.
36. 18/12 - 9. 37. 61.
37. 07/12 - 22. 50. 51.
38. 16/10 - 26. 43. 64.
39. 03/10 - 6. 46. 63.
40. 12/12 - 2. 42. 62.
41. 17/12 - 27.44. 53.
42. 36/12 - 6. 41. 70.
43. 24/12 - 29. 35. 66.
44. 27/12 - 3. 34. 59.
45. 1004/12 - 18. 36. 66.
46. 33/11 - 29. 50. 54.
47. 13/11 - 30. 38. 65.
48. 02/07 - 1. 43. 59.
49. 31/11 - 6. 31. 59.
50. 38/09 - 10. 35. 63.

Радове можете предати до **среде 10.06.2015.** године до 16 h.