## VEKTORSKA ALGEBRA

1. U paralelogramu $ABCD$ dato je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$. Izraziti pomoću $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ vektore $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ i $\overrightarrow{MD}$ gde je $M$ presek dijagonala paralelograma.

2. Tri vektora $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$ su stranice trougla $ABC$. Izraziti vektore težišnih duži pomoú vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ i dokazati da oni obrazuju trougao.

3. Neka su $M$ i $N$ sredine stranica $AB$ i $CD$ četvorougla $ABCD$. Dokazati da je $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

4. Datje pravilni šestougao $ABCDEF$ sa centrom u tački $O$.
   (a) Izraziti vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AF}$ pomoću vektora $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$.
   (b) Pokazati da važi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = 6\overrightarrow{MO}$, gde je $M$ proizvoljna tačka prostora.

5. Ako je $T$ težište trougla $ABC$ dokazati da važi $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{0}$.

6. U jednakokrakom trapezu $OACB$ je $\angle BOA = 60°$, $OB = BC = CA = 2, M, N, P$ su središta stranica $BC, AC$ i $OA$. Izraziti vektore $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PM}$ i $\overrightarrow{NP}$ preko jediničnih vektora $\overrightarrow{m}$ i $\overrightarrow{n}$ vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.

7. Dokazati da se dijagonale paralelograma polove.

8. U paralelogramu $ABCD$ naći tačku $S$ takvu da važi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{0}$.

9. Dati su vektori $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{b}$ i tačke $M$ i $N$ takve da je $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. Naí $\overrightarrow{OX}$, gde je $X$ presek duži $MN$ sa dijagonalom $OC$ paralelograma $OBCD$ konstruisanog nad tim vektorimA.

10. Neka je tačka $E$ presek simetrale ugla $\angle BAC$ i stranice $BC$ u trouglu $ABC$. Neka je $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{AE}$. Pokazati da je $\overrightarrow{s} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{b} + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{c}$, gde je $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$.

## SKALARNI PROIZVOD VEKTORA

1. Za date jedinične vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ koji zadovoljavaju uslov $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ izračunati $S = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}$.

2. Dokazati da je svaki periferijski ugao nad prečnikom prav.

3. Izračunati dužinu $d$ dijagonale $\overrightarrow{OD}$ paralelepipeda konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$, pri čemu su dati uglovi $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ izmedju njih.

4. Odrediti ugao izmedju vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ koji zadovoljavaju uslove :
   $(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \perp (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ i $(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) \perp (2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.

5. Vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ grade ugao $\alpha = \pi/6$. Ako je $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, izračunati ugao izmedju $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ gde je $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

6. Izračunati intenzitet vektora $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ ako je $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$, $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 60°$.

7. Izračunati ugao izmedju vektora $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ ako je $|\overrightarrow{m}| = |\overrightarrow{n}| = 2$ i $\angle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = 120°$.

8. Izračunati skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ i njihove intenzitete.

9. Pokazati da su vektori $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$ normalni.

10. Izračunati ugao izmedju vektora $\overrightarrow{a} = (1, -2, 2)$ i $\overrightarrow{b} = (-2, 4, -4)$.

11. Data su temena trougla $A(0, -1, 5)$, $B(-3, -1, 1)$ i $C(4, -1, 2)$. Nači ugao $\beta$.

12. Odrediti $x$ i $y$ tako da vektor $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ bude normalan na vektorima $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 12\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - k$.

13. Nači projekciju vektora $\overrightarrow{a} = (1, 4, 8)$ na vektor $\overrightarrow{b} = (1, 2, -2)$.

14. Nači jedinični vektor $\overrightarrow{p}$ istovremeno normalan na $\overrightarrow{a} = (3, 6, 8)$ i apscisnu osu.

15. Odrediti ugao izmedju simetrala uglova $\angle xOz$ i $\angle yOz$.

## VEKTORSKI PROIZVOD VEKTORA

1. Ako je $\mid \overrightarrow{a} \mid = 3$, $\mid \overrightarrow{b} \mid = 4$ i vektor $\overrightarrow{a}$ normalan na vektoru $\overrightarrow{b}$ izračunati
   (a) $\mid (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \mid$,
   (b) $\mid (3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) \mid$.

2. Izračunati $\mid (\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}) \times (\overrightarrow{m} + 5\overrightarrow{n}) \mid$ ako je $\mid \overrightarrow{m} \mid = 4$, $\mid \overrightarrow{n} \mid = 2$ i $\angle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = \pi/6$

3. Dati su vektori $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ gde su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ jedinični uzajamno ortogonalni vektori. Izračunati dužinu težišne duži AM i dužinu visine AD trougla ABC.

4. Izračunati površinu i jednu visinu trougla koji je odredjen vektorima $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{r} + \overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{r} + 3\overrightarrow{s}$ ako je $\mid \overrightarrow{r} \mid = 1$, $\mid \overrightarrow{s} \mid = 4$ i $\angle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = 90°$.

5. Odrediti $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ ako je $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{q} = 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

6. Ispitati da li su vektori $\overrightarrow{a} = (3, -1, 2)$ i $\overrightarrow{b} = (9, -3, 6)$ kolinearni.

7. Izračunati skalare $\alpha$ i $\beta$ tako da vektori $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \beta\overrightarrow{k}$ budu kolinearni.

8. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$.

9. Izračunati površinu paralelograma ABCD i visinu $h_a$ ako je $A(6, 2, 3), B(0, -1, 5), C(3, 4, -3)$.

10. Izračunati površinu trougla i jednu njegovu visinu ako su temena $A(1, 2, 1), B(4, 3, 3)$ i $C(3, 0, 5)$.

11. Data su temena $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$ i $C(6, 2, 0)$ trougla. Izračunati površinu trougla $ABC$ i visinu $h_b$.

12. Dati su vektori $\overrightarrow{a} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{b} = (-2, -1, 2)$, $\overrightarrow{c} = (1, -1, 2)$.
   (a) Razložiti vektor $\overrightarrow{c}$ na komponente u pravcu vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{a} \times \bar{b}$.
   (b) Izračunati ugao koji zaklapa vektor $\overrightarrow{c}$ sa ravni koju odredjuju vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

## MEŠOVITI PROIZVOD TRI VEKTORA

1. Ispitati da li su vektori $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{c} = 4\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ komplanarni.

2. Dati su vektori $\overrightarrow{a} = (\alpha, 3, -1)$, $\overrightarrow{b} = (1, 2, -2)$, $\overrightarrow{c} = (2, 1, 5)$.

(a) Odrediti $\alpha$ tako da $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ budu komplanarni.

(b) Razložiti vektor $\overrightarrow{c}$ na komponente u pravcu vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

3. Pokazati da tačke $A(1, 0, 1), B(4, 4, 6), C(2, 2, 3)$ i $D(10, 14, 17)$ pripadaju istoj ravni.

4. Izračunati zapreminu i jednu visinu paralelepipeda koga odredjuju vektori $\overrightarrow{p} = (4, 5, -3)$, $\overrightarrow{q} = (1, -2, 1)$ i $\overrightarrow{r} = (1, 1, 1)$.

5. Izračunati zapreminu i jednu visinu trostrane piramide čija su temena $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$ i $D(2, 3, 8)$.

6. Zapremina tetraedra čija su temena $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$ jednaka je 5. Naći četvrto teme $D$ ako se zna da se ono nalazi na $y$-osi.

7. Dati su vektori $\overrightarrow{a} = (2\lambda, -1, -1 - \lambda)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 3, 0)$, $\overrightarrow{c} = (5, 1, 8)$.

(a) Odrediti $\lambda$ tako da $\overrightarrow{a}$ gtadi sa $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ jednake uglove.

(b) Odrediti zapreminu i jadnu visinu paralelepipeda koga odredjuju ovi vektori.

8. Odrediti vektor $\overrightarrow{c}$ normalan na $\overrightarrow{a} = (2, 1, 3)$ i $\overrightarrow{b} = (1, 2, 2)$ ako je $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}| = \sqrt{69}$ i vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ čine levi triedar.

9. Naći tačku $D$ koja se nalazi na $x$-osi, a koja je komplanarna sa tačkama $A(0, 1, 2), B(2, 3, 3)$ i $C(1, 1, 1)$.

10. Naći rastojanje tačke $M$ od ravni odredjene tačkama $A, B$ i $C$ ako je $M(3, -4, 1), A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(1, 0, -1)$.

11. Ispitati medjusobni položaj prave $p$ koja sadrži tačke $A$ i $B$ i prave $q$ koja sadrži tačke $C$ i $D$, ako je:

(a) $A(1, 2, 3), B(3, 4, 5), C(-5, 3, 8), D(-2, 6, 11)$,

(b) $A(-1, 0, 1), B(0, -1, 3), C(2, 0, 2), D(4, -2, 6)$

(c) $A(0, 0, 0), B(1, 1, 1), C(1, 2, 3), D(1, 3, 4)$.

12. Odrediti vektor $\overrightarrow{x}$ iz sledečih uslova $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a} = 3$ i $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$, gde su vektori $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{c} = (1, -1, 0)$.

13. Ako je ispunjen uslov $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, onda su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ komplanarni. Dokazati.

## TROSTRUKI PROIZVOD-VEKTOR (DVOSTRUKI VEKTORSKI PROIZVOD)

1. Izračunati: $(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}) \times (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$.

2. Ispitati komplanarnost vektora $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{m}$ i $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{m}$.

3. Koje uslove moraju da ispunjavaju vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ da bi važio uslov $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}$?

4. Dokazati : $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) + (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{d}) + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{d}) = 0$.

5. Ako su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ komplanarni onda je $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = 0$. Dokazati.

6. Dokazati: $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]\overrightarrow{b}$.