

RAVAN

1. Date su ravni:

(a) $x + y + z = 0$, (b) $x - y + 2z = 5$, (c) $x + 2y = 0$, (d) $z = 1$, (e) $y = 0$.
Za svaku od ovih ravni naći odgovarajući vektor normale, bar jednu tačku ravni i odgovarajuće odsečke na koordinatnim osama.

2. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku $A(3, 1, -2)$ i ima za vektor normale vektor $\vec{n} = (1, -1, 4)$.

3. Ispitati da li neka od tačaka $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, -3)$, $C(4, 1, 5)$ pripada ravni $x - 2y + z = -3$.

4. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 1, 3)$, $C(3, -1, 4)$.

5. Dokazati da su ravni $2x - y + z = 0$ i $4x - 2y + 2z = 1$ paralelne.

6. Naći ugao između ravni $x + y - z = 1$ i $2x - y + z = 3$.

7. Naći rastojanja tačaka $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, -3)$ i $C(4, 1, 5)$ od ravni $x - 2y + z = -3$.

8. Naći rastojanje između ravni $2x + y - z = 1$ i $2x + y - z = 3$.

9. Odrediti jednačinu snopa ravni koji sadrži ravni $2x - y + z = -1$ i $x + y + 3z = 5$ kao i jednačinu ravni iz ovog snopa koja sadrži tačku $A(3, 1, 5)$.

10. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M(4, -3, -2)$ i normalna je na ravnima $\beta : x + 2y - 2z = 0$ i $\gamma : 2x - 3y + 4z - 5 = 0$.

11. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku $A(1, -2, 3)$ i prolazi kroz z-osu.

12. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $A(2, 3, 0)$ i sadrži presečnu pravu ravni $\pi_1 : x - 3y + 2z - 5 = 0$ i $\pi_2 : 2x + y - z + 2 = 0$.

13. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz središte duži AB i normalna je na AB ako $A(1, -2, 5)$, $B(3, -4, 1)$.

14. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke $A(4, 5, 1)$ i $B(3/2, 3, -2/3)$ i paralelna je vektoru $\vec{a} = (0, 6, -1)$.

15. Napisati jednačinu ravni koja je normalna na presečnu pravu ravni $\alpha : x + 2y = 3$ i $\beta : -2x + z = 1$ i udaljena je od koordinatnog početka za $\sqrt{21}$.

PRAVA

1. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $A(1, -1, 2)$ i paralelna je sa vektorom

(a) $\vec{p} = (2, 3, -1)$, (b) $\vec{p} = (1, 0, 1)$, (c) $\vec{p} = (0, 2, 0)$.

2. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačke

(a) $A(1, 0, -1)$, $B(2, -1, 3)$,

(b) $A(1, 0, -1)$, $B(2, -1, -1)$.

3. Ispitati međusobni položaj pravih

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}, \quad \frac{x}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{9}.$$

4. Odrediti ugao između pravih

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{\sqrt{2}}.$$

5. Ispitati da li prave

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{0}, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-7}{6}$$

pripadaju istoj ravni.

6. Dokazati da prave

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{0}, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{6}$$

ne pripadaju istoj ravni i naći rastojanje između njih.

7. Odrediti λ tako da se prave

$$p: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \text{ i } q: \frac{x-3}{\lambda} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

seku. Odrediti presečnu tačku i jednačinu ravni određene ovim pravama.

8. Napisati kanonski oblik jednačine prave ako je ona zadata sa

$$p: \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}.$$

9. Na pravoj

$$p: \frac{x-8}{8} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z}{0}$$

naći tačku čije je rastojanje od tačke $A(8, 2, 0)$ jednako 10.

10. Date su tačke $A(1, -1, 2)$, $B(-1, 3, 4)$. Naći koordinate tačke C središta duži AB i tačke D koja pripada duži AB i deli je u odnosu $AD : DB = 3 : 1$.

MEDJUSOBNI POLOŽAJ PRAVE I RAVNI

1. Naći presečnu tačku prave

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

i sledećih ravni

(a) $x - y + 2z = 3$; (b) $x - y - z = 1$; (c) $x - y - z = 0$.

2. Naći ugao između prave $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\sqrt{6}}$ i ravni $x - y + 2z = 3$.

3. Odrediti l tako da prava $\frac{x-1}{l} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ bude paralelna ravni $\alpha : x - 2y + 3z - 1 = 0$.

4. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M(-1, 2, -3)$ i normalna je na pravoj $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}$. Naći prodor date prave kroz tu ravan.

5. Naći projekciju tačke $M(-1, 0, -1)$ na ravan $\alpha : 2x + y - z + 7 = 0$.

6. Naći ortogonalnu projekciju tačke $M(-3, 7, 4)$ na pravu

$$p : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

7. Naći ortogonalnu projekciju prave $l : \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ na ravan $\alpha : x + 4y - 3z + 7 = 0$.

8. Naći tačku koja je simetrična tački $A(2, 1, 3)$ u odnosu na ravan $x + y - z = 1$.

9. Naći rastojanja tačaka $A(3, 1, 2)$ i $B(5, 2, 0)$ od prave $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$.

10. Naći najkraće rastojanje između pravih

$$a_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \text{ i } a_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

11. Naći jednačinu prave p_1 koja je simetrična pravoj $p : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{3}$ u odnosu na ravan $\alpha : x + 2y + z - 3 = 0$.

SFERA

1. Napisati jednačinu sfere čiji je centar tačka $S(2, -1, 3)$, a poluprečnik je jednak 5.

2. Dokazati da jednačina $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y = 10$ predstavlja sferu. Naći njen centar i poluprečnik.

3. Napisati jednačinu sfere čiji je centar tačka $S(2, 1, -1)$ i dodiruje ravan $x + y - z = 0$.

4. Naći prodor prave $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ kroz sferu

(a) $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 7/3$; (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

5. Dokazati da ravan $2x - 6y + 3z = 49$ dodiruje sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 49$. Naći koordinate dodirne tačke.

6. Naći centar i poluprečnik kruga koji nastaje presekom ravni $\alpha : 3x + y - z - 9 = 0$ i sfere $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 36$.
7. Napisati jednačinu sfere koja prolazi kroz tačku $M_1(0, 0, 3)$ i krug $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1, z = 0$.
8. Napisati jednačinu sfere koja prolazi kroz krugove $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ i $x^2 + y^2 = 25, z = 2$.
9. Napisati jednačinu tangentne ravni sfere $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$ u tački $A(-1, 3, 0)$.