Теорија грешака

Марија Станић

Крагујевац, 2004.

1. Заокружити следеће бројеве на три значајне цифре и одредити апсолутне (a) и релативне (r) грешке добијених приближних бројева:

(а)	2.1514;	(б)	0.16152;	(в)	0.01204;
(г)	1.225;	(д)	-0.0015281;	(ђ)	-392.85;
(е)	0.1545;	(ж)	0.003922;	(з)	625.55;
(и)	94.525.				

Решење:

(а)	2.15,	$a = 0.14 \cdot 10^{-2}$,	$r = 0.65 \cdot 10^{-3}$;
(б)	0.162,	$a = 0.48 \cdot 10^{-3}$,	$r = 0.3 \cdot 10^{-2}$;
(в)	0.0120,	$a = 0.4 \cdot 10^{-4}$,	$r = 0.33 \cdot 10^{-2}$;
(г)	1.23,	$a = 0.5 \cdot 10^{-2}$,	$r = 0.41 \cdot 10^{-2}$;
(д)	-0.00153,	$a = 0.19 \cdot 10^{-5}$,	$r = 0.12 \cdot 10^{-2}$;
(ђ)	393,	$a = 0.15$,	$r = 0.38 \cdot 10^{-3}$;
(е)	0.154,	$a = 0.5 \cdot 10^{-3}$,	$r = 0.32 \cdot 10^{-2}$;
(ж)	0.00392,	$a = 0.2 \cdot 10^{-5}$,	$r = 0.51 \cdot 10^{-3}$;
(з)	626,	$a = 0.45$,	$r = 0.72 \cdot 10^{-3}$;
(и)	94.5,	$a = 0.25 \cdot 10^{-1}$,	$r = 0.26 \cdot 10^{-3}$.

2. Одредити шта је тачније:

(а) $\dfrac{6}{25} \cong \dfrac{1}{4}$ или $\dfrac{1}{3} \cong 0.333$;

(б) $\dfrac{1}{9} \cong 0.1$ или $\dfrac{1}{3} \cong 0.33$;

(в) $\pi \cong \dfrac{22}{7}$ или $\pi \cong 3.142$;

(г) $\sqrt{10} \cong 3.1623$ или $\dfrac{6}{7} \cong 0.86$.

Решење: (а) Нека је

$$x = \frac{6}{25}, \quad x^* = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad y^* = 0.333.$$

Како је $|x - x^*| = 0.01$,

$$\frac{|x - x^*|}{|x^*|} = 0.04,$$

и $|y - y^*| \leqslant 0.001$

$$\frac{|y - y^*|}{|y^*|} \leqslant \frac{1}{333} < 0.0031,$$

то је граница релативне грешке друге апроксимације мања, тј. друга апроксимација је тачнија од прве.

На исти начин се показује да су друге апроксимације боље и у случајевима (б) и (в), док је у примеру (г) боља прва апроксимација.

3. Одредити број сигурних цифара у ужем смислу следећих приближних бројева:

(а) 45.385 ± 0.034; (б) 1.2785 ± 0.0006; (в) 193.3 ± 0.1.

Решење: (а) Нека је $x^* = 45.385$, $A_{x^*} = 0.034$. Како је $A_{x^*} < 0.5 \cdot 10^{-1}$ то је број сигурних цифара у ужем смислу једнак 3 ($n = 1$, $n - k + 1 = -1$ па је $k = 3$).

(б) 3 ($n = 0, n - k + 1 = -2$)

(в) 3 ($n = 2, n - k + 1 = 0$).

4. Са колико сигурних цифара у ужем смислу треба узети резултате следећих операција:

(а) $x = \dfrac{1}{3}$; (б) $x = \sqrt{29}$; (в) $x = \sqrt[3]{349}$;

(г) $x = \ln 13.7$; (д) $x = 0.34^5$; (ђ) $x = \sin 1.3$;

(е) $x = e^{2.34}$; (ж) $x = \operatorname{sh} 3.14$;

тако да граница релативне грешке резултата не буде већа од 0.1%?

Решење: У свим примерима користимо везу између границе релативне грешке и броја сигурних цифара:

$$R_{x^*} \approx \frac{0.5}{\alpha_1 \cdot 10^{k-1}}.$$

(а) Приближан број броја $x = \dfrac{1}{3}$ је $x^* = 0.33\ldots \cdot 10^0$. Према томе, граница релативне грешке је

$$\frac{0.5}{3 \cdot 10^{k-1}},$$

при чему се k одређује тако да важи

$$\frac{0.5}{3 \cdot 10^{k-1}} \leqslant 0.001.$$

Најмање k које задовољава претходну једнакост је $k = 4$. Значи x^* треба узети са четири сигурне цифре, тј. $x^* = 0.3333$.

Ево решења и у осталим примерима:

(б)	$\sqrt{29} = 0.5385\ldots \cdot 10^1,$	$k = 3;$
(в)	$\sqrt[3]{349} = 0.7040\ldots \cdot 10^1,$	$k = 3;$
(г)	$\ln 13.7 = 0.2617\ldots \cdot 10^1,$	$k = 4;$
(д)	$0.34^5 = 0.4543\ldots \cdot 10^{-2},$	$k = 4;$
(ђ)	$\sin 1.3 = 0.9635\ldots \cdot 10^0,$	$k = 3;$
(е)	$e^{2.34} = 0.1038\ldots \cdot 10^2,$	$k = 4;$
(ж)	$\operatorname{sh} 3.14 = 0.1153\ldots \cdot 10^2,$	$k = 4.$

5. Нека бројеви $x^* = 1.3134$ и $y^* = 0.3761$ имају све цифре сигурне у ужем смислу. Израчунати приближне вредности за:
(а) $x\pi$; (б) ye; (в) πe,
тако да резултати имају три сигурне цифре у ужем смислу.

Решење: (а) Нека је $\pi^* = 3.1\ldots$ приближна вредност броја π. Како је $x^*\pi^* = 4.1\ldots$, да би број $x^*\pi^*$ имао три сигурне цифре треба да важи

$$|x^*\pi^* - x\pi| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{0-3+1} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}.$$

Како је

$$|x^*\pi^* - x\pi| \leqslant |x^*\pi^* - x^*\pi|| + x^*\pi - x\pi| \leqslant x^* A_{\pi^*} + \pi A_{x^*}$$

и

$$A_{x^*} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}, \qquad x^* < 1.32, \qquad \pi < 3.2,$$

добија се

$$|x^*\pi^* - x\pi| < 1.32 \cdot A_{\pi^*} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \cdot 3.2.$$

Сада границу апсолутне грешке A_{π^*} одређујемо из услова

$$1.32 \cdot A_{\pi^*} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \cdot 3.2 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-2},$$

одакле је

$$A_{\pi^*} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1 - 0.032}{1.32} < 0.37 \cdot 10^{-2} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}.$$

То значи да број π^* треба да има три сигурне цифре, тј. $\pi^* = 3.14$. Тада је тражени резултат $x^*\pi^* = 4.124076$.

(б) Поступак је аналоган делу (а).

(в) Нека је $\pi^* = 3.1\ldots$ и $e^* = 2.7\ldots$. Тада је $\pi^* e^* = 8.5\ldots$ и

$$|\pi e - \pi^* e^*| \leqslant |\pi e - \pi e^*| + |\pi e^* - \pi^* e^*| \leqslant \pi A_{e^*} + e^* A_{\pi^*}.$$

Да би резултат имао три сигурне цифре треба да важи

$$|\pi e - \pi^* e^*| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}.$$

Ако је

$$A_{e^*} \leqslant A, \qquad A_{\pi^*} \leqslant A,$$

из

$$|\pi e - \pi^* e^*| \leqslant \pi A_{e^*} + e^* A_{\pi^*} < (3.2 + 2.8)A \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

следи $A \leqslant \dfrac{5}{6} \cdot 10^{-3}$.

Значи, треба узети

$$\pi^* = 3.1416, \qquad e^* = 2.7183,$$

при чему су све цифре сигурне, јер је

$$|\pi - \pi^*| < 7.4 \cdot 10^{-6}, \qquad |e - e^*| < 1.9 \cdot 10^{-5}.$$

Тражени резултат је

$$\pi^* e^* = 8.53981128.$$

6. Одредити приближну вредност функције и проценити апсолутну и релативну грешку ако су све цифре задатих бројева сигурне у ужем смислу:

(а) $y = \ln(x_1 + x_2^2)$, $x_1 = 0.97$, $x_2 = 1.132$;

(б) $y = \dfrac{x_1 + x_2^2}{x_3}$, $x_1 = 3.28$, $x_2 = 0.932$, $x_3 = 1.132$;

(в) $y = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$, $x_1 = 2.104$, $x_2 = 1.935$, $x_3 = 0.845$.

Решење: (а) Границе апсолутних грешака приближних бројева x_1 и x_2 су $A_{x_1} \leqslant 0.5 \cdot 10^{-2}$ и $A_{x_2} \leqslant 0.5 \cdot 10^{-3}$. Нека је

$$b_1 = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| = \left|\frac{1}{x_1 + x_2^2}\right| = 0.444\ldots$$

и

$$b_2 = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| = \left|\frac{2x_2}{x_1 + x_2^2}\right| = 1.005\ldots.$$

Тада је

$$A_{y^*} \leqslant b_1 A_{x_1} + b_2 A_{x_2} \cong 0.27 \cdot 10^{-2}.$$

Тражена приближна вредност функције је $y^* = 0.81$, а граница релативне грешке

$$R_{y^*} \leqslant \frac{A_{y^*}}{|y^*|} \cong 0.33 \cdot 10^{-2}.$$

(б) $y^* = 3.66,\ A_{y^*} \leqslant 0.1 \cdot 10^{-2},\ R_{y^*} \leqslant 0.27 \cdot 10^{-2}$;
(в) $y^* = 7.48,\ A_{y^*} \leqslant 0.49 \cdot 10^{-2},\ R_{y^*} \leqslant 0.64 \cdot 10^{-3}$.

7. Решити обрнут проблем за функцију

$$y = \ln x_1 + e^{x_2 + \sqrt{x_3}}$$

да би се за $x_1 \cong 1.93$, $x_2 \cong 0.341$, $x_3 \cong 12.506$ приближна вредност функције добила са четири сигурне цифре.

Решење: Како је

$$y^* = 48.955142$$

захтева се

$$A_{y^*} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{1-4+1} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}.$$

Даље је

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = e^{x_2+\sqrt{x_3}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = \frac{1}{2\sqrt{x_3}} e^{x_2+\sqrt{x_3}}$$

и

$$\frac{\partial y(x_1^*, x_2^*, x_3^*)}{\partial x_1} = 0.518134\ldots, \quad \frac{\partial y(x_1^*, x_2^*, x_3^*)}{\partial x_2} = 48.297622\ldots,$$

$$\frac{\partial y(x_1^*, x_2^*, x_3^*)}{\partial x_3} = 6.828676\ldots.$$

(а) Принцип једнаких утицаја даје

$$A_{x_1^*} \leqslant \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 0.518134} \leqslant 3.22 \cdot 10^{-3},$$

$$A_{x_2^*} \leqslant \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 48.297622} \leqslant 3.45 \cdot 10^{-5},$$

$$A_{x_3^*} \leqslant \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 6.828676} \leqslant 2.44 \cdot 10^{-4}.$$

(б) Принцип једнаких граница апсолутних грешака даје

$$A_{x_i^*} \leqslant \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{0.518134 + 48.297622 + 6.828676} \leqslant 8.99 \cdot 10^{-5}, \quad i = 1, 2, 3.$$

(в) Принцип једнаких граница релативних грешака даје

$$A_{x_1^*} \leqslant \frac{0.5\cdot 10^{-2}\cdot 1.93}{1.93\cdot 0.518134 + 0.341\cdot 48.297622 + 12.506\cdot 6.828676} \leqslant 9.38\cdot 10^{-5},$$

$$A_{x_1^*} \leqslant \frac{0.5\cdot 10^{-2}\cdot 0.341}{1.93\cdot 0.518134 + 0.341\cdot 48.297622 + 12.506\cdot 6.828676} \leqslant 1.66\cdot 10^{-5},$$

$$A_{x_1^*} \leqslant \frac{0.5\cdot 10^{-2}\cdot 12.506}{1.93\cdot 0.518134 + 0.341\cdot 48.297622 + 12.506\cdot 6.828676} \leqslant 6.08\cdot 10^{-4}.$$

8. Потребно је израчунати

$$y = c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

за $\alpha \cong 30^\circ$, $\beta \cong 30^\circ$ и $c = 7.15$ са грешком мањом од 1%. Са каквом тачношћу треба узети α и β? Задатак решити користећи принцип једнаких граница апсолутних грешака.

Решење: Нека је $\alpha^* = 30^\circ$, $\beta^* = 30^\circ$. Тада је

$$y^* = c\cdot\frac{\sin\alpha^*}{\sin(\alpha^*+\beta^*)} = \frac{7.15}{\sqrt{3}} = 4.12805\ldots$$

и

$$\varepsilon = 0.01\cdot y^* = \frac{0.0715}{\sqrt{3}}.$$

Границе апсолутних грешака A_{α^*} и A_{β^*} одређују се из услова

$$A_{\alpha^*} = A_{\beta^*} \leqslant \frac{\varepsilon}{b_1+b_2},$$

где је

$$b_1 = \left|\frac{\partial y(\alpha^*,\beta^*)}{\partial\alpha}\right| = \left|c\frac{\cos\alpha^*\sin(\alpha^*+\beta^*) - \cos(\alpha^*+\beta^*)\sin\alpha^*}{\sin^2(\alpha^*+\beta^*)}\right| = \frac{14.3}{3},$$

$$b_2 = \left|\frac{\partial y(\alpha^*,\beta^*)}{\partial\beta}\right| = \left|c\frac{-\sin\alpha^*\cos(\alpha^*+\beta^*)}{\sin^2(\alpha^*+\beta^*)}\right| = \frac{7.15}{3}.$$

Према томе,

$$A_{\alpha^*} = A_{\beta^*} \leqslant \frac{0.0715}{7.15\sqrt{3}} = 0.0057735.$$

9. Са колико сигурних цифара у ужем смислу треба узети e и π да би се корени квадратне једначине

$$x^2 + ex - \pi = 0$$

могли израчунати са грешком мањом од 10^{-6}? Задатак решити користећи принцип једнаких утицаја.

Решење: Бројеве e и π треба узети са седам сигурних цифара.

10. Са коликом тачношћу треба одредити променљиве x, y, z да би се величина

$$f = \frac{xy + \sqrt{z}}{x + 2z}$$

одредила са тачношћу 10^{-3}, ако су приближне вредности

$$x^* = 2.16, \quad y^* = 1.12, \quad z^* = 1.44$$

и ако се усвоји принцип једнаких утицаја на грешку?

Решење: Како је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2yz - \sqrt{z}}{(x+2z)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x+2z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x - 2z - 4xy\sqrt{z}}{2(x+2z)^2\sqrt{z}},$$

имамо

$$\frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} = 0.079743\ldots, \qquad \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} = 0.4285714\ldots$$

$$\frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} = -0.2022864\ldots,$$

па је

$$A_{x^*} \leqslant \frac{10^{-3}}{3\left|\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial x}\right|} < 0.00418\ldots,$$

$$A_{y^*} \leqslant \frac{10^{-3}}{3\left|\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial y}\right|} < 0.00077\ldots,$$

$$A_{z^*} \leqslant \frac{10^{-3}}{3\left|\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial z}\right|} < 0.00164\ldots.$$

11. Са колико сигурних цифара у ужем смислу треба узети вредност аргумента x да би се при израчунавању вредности функције грешка могла оценити са 10^{-6}?

(а) $y = x^3 \sin x,\ x = \sqrt{2}$;

(б) $y = x \ln x,\ x = \pi$;

(в) $y = e^x \cos x$, $x = \sqrt{3}$.

Користити принцип једнаких утицаја.

Решење: (а) 6 цифара; (б) 6 цифара; (в) 5 цифара.

12. У једном троуглу су познате две странице, $a = 100.0 \pm 0.1$, $b = 101.0 \pm 0.1$ и угао који оне заклапају $\alpha = 1.00^\circ \pm 0.01^\circ$.

(а) Одредити дужину треће странице c и оценити апсолутну грешку.

(б) При израчунавању дужине треће странице c узима се $\cos 1^\circ \cong 0.9998$. Одредити утицај грешке израчунавања $\cos 1^\circ$ на грешку израчунавања дужине c.

(в) Изразити $\cos 1^\circ$ на неки други начин тако да се при израчунавању дужине c добија мања граница апсолутне грешке.

Решење: Дужина треће странице троугла је дата формулом

$$c = c(a, b, \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha},$$

односно

$$c \cong 2.01905.$$

Како је

$$b_1 = \left|\frac{\partial c(a^*, b^*, \alpha^*)}{\partial a}\right| = \left|\frac{a^* - b^*\cos\alpha^*}{c^*}\right| = 0.487664,$$

$$b_2 = \left|\frac{\partial c(a^*, b^*, \alpha^*)}{\partial b}\right| = \left|\frac{b^* - a^*\cos\alpha^*}{c^*}\right| = 0.502826,$$

$$b_3 = \left|\frac{\partial c(a^*, b^*, \alpha^*)}{\partial \alpha}\right| = \left|\frac{a^* b^*\sin\alpha^*}{c^*}\right| = 87.3031,$$

грешка се може оценити са

$$\begin{aligned} A_{c^*} &\leqslant b_1 A_{a^*} + b_2 A_{b^*} + b_3 A_{\alpha^*} \\ &\leqslant 0.49 \cdot 0.1 + 0.51 \cdot 0.1 + 0.88 \cdot 0.01 \cdot 0.01745 < 0.12. \end{aligned}$$

(б) Нека је $\cos\alpha = x$, $x^* = 0.9998$ и $A_{x^*} \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. Како је

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abx}$$

и

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{ab}{c},$$

грешка се може оценити са

$$A_{c^*} \leqslant \frac{100 \cdot 101}{2.01905} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \leqslant 0.25.$$

(в) Користећи идентитет

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

добија се

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ако је $t = \sin\frac{\alpha}{2}$ и $A_{t^*} \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, онда је $t^* = 0.0087$ и

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + 4abt^2}.$$

Сада је

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{4abt}{c},$$

односно

$$A_{c^*} \leqslant \left|\frac{\partial c(a^*, b^*, t^*)}{\partial t}\right| A_{t^*} < 0.009.$$

13. Ако су све цифре апроксимација

$$\operatorname{ch} 3 = \frac{e^3 + e^{-3}}{2} = 10.067 \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} 3 = \frac{e^3 - e^{-3}}{2} = 10.018$$

сигурне, одредити e^{-3} са четири сигурне цифре у ужем смислу.

Решење: Из једнакости $e^{-3} = \operatorname{ch} 3 - \operatorname{sh} 3$ добија се $e^{-3} = 0.049 \pm 0.001$, па је потребно израчунати e^{-3} на други начин.

Како је

$$e^3 = \operatorname{ch} 3 + \operatorname{sh} 3 = 20.085 \pm 0.001 \quad \text{и} \quad e^{-3} = \frac{1}{e^3},$$

то је $e^{-3} = 0.049788$. Оценимо сада грешку ове апроксимације. За функцију

$$f = \frac{1}{x}, \quad x = \operatorname{ch} 3 + \operatorname{sh} 3, \quad x^* = 20.085 \pm 0.001$$

следи

$$A_{f^*} \leqslant \frac{1}{(x^*)^2} \cdot A_{x^*} = \frac{1}{(20.085)^2} \cdot 10^{-3} \leqslant 0.3 \cdot 10^{-5},$$

па приближан број $e^{-3} \cong 0.049788$ има четири сигурне цифре у ужем смислу ($n = -2$, $n - k + 1 = -5$, па је $k = 4$).

14. Израчунава се приближна вредност $y = (\sqrt{2}-1)^6$, где се за апроксимацију $\sqrt{2}$ узима 1.4. Могуће је изабрати неки од следећих начина за израчунавање вредности y:

(а) $y_1 = \dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$; (б) $y_2 = (3 - 2\sqrt{2})^3$;

(в) $y_3 = \dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$; (г) $y_4 = 99 - 70\sqrt{2}$;

(д) $y_5 = \dfrac{1}{99 + 70\sqrt{2}}$.

Одредити најбољи поступак.

Решење: За $x = \sqrt{2}$, $x^* = 1.4$ и $A_{x^*} \leqslant 0.015$, потребно је одредити границе апсолутних грешака за $y_1, y_2, \ldots, y_5$:

$$
\begin{aligned}
&A_{y_1^*} < 2 \cdot 10^{-4}, \qquad A_{y_2^*} < 3.6 \cdot 10^{-3}, \qquad A_{y_3^*} < 8.1 \cdot 10^{-5},\\
&A_{y_4^*} < 1.05, \qquad A_{y_5^*} < 2.8 \cdot 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

Дакле, најмања апсолутна грешка се прави ако се y^* израчунава као

$$y_5^* = (99 + 70 \cdot 1.4)^{-1} = 0.00507614 \cong 0.0051.$$

15. Површина троугла са теменима $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ се израчунава као $|P|$, где је

$$P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ако су дате приближне вредности координата (x_i^*, y_i^*), $i = 1, 2, 3$ са истим границама апсолутних грешака ε, доказати да је

$$A_{P^*} \leqslant \left(\max_{i,j} |y_i^* - y_j^*| + \max_{i,j} |x_i^* - x_j^*|\right)\varepsilon.$$

Решење: Како је

$$P = \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x_1} &= \frac{1}{2}(y_2 - y_3), &\qquad \frac{\partial P}{\partial y_1} &= \frac{1}{2}(x_3 - x_2),\\
\frac{\partial P}{\partial x_2} &= \frac{1}{2}(y_3 - y_1), &\qquad \frac{\partial P}{\partial y_2} &= \frac{1}{2}(x_1 - x_3),\\
\frac{\partial P}{\partial x_3} &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2), &\qquad \frac{\partial P}{\partial y_3} &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1),
\end{aligned}$$

следи

$$\begin{aligned}
A_{P^*} &\leqslant \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial P}{\partial x_j}(x_1^*, \dots, y_3^*) A_{x_j^*} + \frac{\partial P}{\partial y_j}(x_1^*, \dots, y_3^*) A_{y_j^*} \right)\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \left(|y_2^* - y_3^*| + |y_3^* - y_1^*| + \dots + |x_2^* - x_1^*| \right).
\end{aligned}$$

Из

$$|x_1^* - x_2^*| + |x_2^* - x_3^*| + |x_3^* - x_1^*| = 2 \max_{i,j} |x_i^* - x_j^*|$$

следи

$$A_{P^*} \leqslant \varepsilon \left(\max_{i,j} |y_i^* - y_j^*| + \max_{i,j} |x_i^* - x_j^*| \right).$$

16. Функција $f \in C^2(D)$ има две нуле a и b у D. Оне се могу одредити само приближно са грешком ε_1, односно ε_2. Ако је

$$I = \int\limits_a^b f(x)\, dx, \qquad I^* = \int\limits_{a+\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_2} f(x)\, dx,$$

доказати да важи

$$|I - I^*| \leqslant \varepsilon_1^2 G(a) + \varepsilon_2^2 G(b),$$

где су

$$G(a) = \frac{1}{2}\, |f'(a)| + \frac{1}{6} F_2 |\varepsilon_1| \quad \text{и} \quad G(b) = \frac{1}{2}\, |f'(b)| + \frac{1}{6} F_2 |\varepsilon_2|,$$

а $F_2 = \max\limits_{x \in D} |f''(x)|$.

Решење: Очигледно је

$$I - I^* = \int\limits_a^{a+\varepsilon_1} f(x)\, dx - \int\limits_b^{b+\varepsilon_2} f(x)\, dx.$$

Нека је $F'(x) = f(x)$. Из $f \in C^2(D)$ следи $F \in C^3(D)$. Сада је

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_a^{a+\varepsilon_1} f(x)\,dx\right| &= |F(a+\varepsilon_1) - F(a)| \\
&= \left|\varepsilon_1 F'(a) + \frac{\varepsilon_1^2}{2}F''(a) + \frac{\varepsilon_1^3}{6}F'''(\alpha)\right| \\
&= \left|\varepsilon_1 f(a) + \frac{\varepsilon_1^2}{2}f'(a) + \frac{\varepsilon_1^3}{6}f''(\alpha)\right| \\
&\leqslant \varepsilon_1^2\left(\frac{1}{2}|f'(a)| + \frac{1}{6}F_2|\varepsilon_1|\right),
\end{aligned}$$

где је $\alpha \in (a, a+\varepsilon_1)$.

Аналогно се добија други део оцене.

17. Нека је $a = 2.100 \pm 5 \cdot 10^{-4}$, $b = 3.300 \pm 5 \cdot 10^{-4}$ и

$$\begin{aligned}
3x + ay &= 10 \\
5x + by &= 20.
\end{aligned}$$

Оценити грешку с којом се може израчунати $x + y$.

Решење: Из датог система једначина се лако добија

$$x + y = f(a, b),$$

где је

$$f(a,b) = \frac{10}{3}\left(1 + \frac{3-a}{3b-5a}\right).$$

Како је $a^* = 2.100$, $A_{a^*} = 5 \cdot 10^{-4}$, $b^* = 3.300$, $A_{b^*} = 5 \cdot 10^{-4}$, добија се

$$\begin{aligned}
A_{f^*} &\leqslant \left|\frac{\partial f(a^*, b^*)}{\partial a}\right| A_{a^*} + \left|\frac{\partial f(a^*, b^*)}{\partial b}\right| A_{b^*} \\
&= \frac{10(5-b^*)}{(3b^*-5a^*)^2}A_{a^*} + \frac{10}{3}\frac{(3-a^*)\cdot 3}{(3b^*-5a^*)^2}A_{b^*} \\
&= \frac{10}{0.6^2}(1.7+0.9)\cdot 0.5\cdot 10^{-3} = 36\cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$