

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

28.12.2009

1. Које интегралне криве диференцијалне једначине $y'' - y' + e^{2x}y = xe^{2x} - 1$ имају косу асимптоту $y = x + 2$ кад $x \rightarrow -\infty$? (смена $t = e^x$)

2. Решити диференцијалну једначину

$$(x + a)^3 y''' + 3(1 - b)(x + a)^2 y'' + (3b^2 - 3b + 1)(x + a)y' - b^3 y = c.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$x^2 y'' - xy' + y = 3x\sqrt{1 - \ln x}.$$

4. Дата је диференцијална једначина $y'' - f(x)y = 0$. Ако су y_1 и y_2 два линеарно независна решења те једначине, онда је функција $z(x) = y_1 y_2$ партикуларно решење диференцијалне једначине $z''' - 4f(x)z' - 2f'(x)z = 0$. Доказати.

5. Решити диференцијалну једначину

$$L(y) = x^2(x^2 - 1)y'' - (x^2 - 2)(xy' - y) = 0,$$

узимајући у обзир да је $|x| < 1$, а затим решити $L(y) = x^3$.

6. Доказати да диференцијална једначина $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ има решење $y = e^{\nu x}$ ако и само ако је $a(x)\nu^2 + b(x)\nu + c(x) \equiv 0$, а затим решити једначину $x(1 - x)y'' - (1 - 2x)y' + (1 - 3x + x^2)y = x(1 - x)^3$.

7. Решити диференцијалну једначину

$$(1 - x)y'' + xy' - y = (x - 1)^2 e^x.$$

8. Знајући два партикуларна решења $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$ диференцијалне једначине $x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$ решити диференцијалну једначину $x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 12(2x - 1)^2$.

9. Решити диференцијалну једначину

$$x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1 - \ln x)^2}{x}$$

ако се зна да њена хомогена има партикуларно решење $y = x$.

10. Дата је диференцијална једначина

$$y'' + 2ay' + 2a^2y = ae^{-ax} \cos ax \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

(а) Одредити опште решење ове диференцијалне једначине.

(б) Одредити њено партикуларно решење $x \rightarrow y_p(x)$ за које је

$$y_p(0) = 0, \quad y_p(1) = 1.$$

(в) Партикуларно решење $x \rightarrow y_p(x)$, нађено у (б), зависи од a . Доказати да постоји $\lim_{a \rightarrow 0} y_p(x)$ за свако x .

11. Решити диференцијалну једначину

$$y^{(4)} + 2p^2y'' + p^4y = \sin(px + \alpha), p, \alpha \in \mathbb{R}, p \neq 0.$$

12. Решити диференцијалну једначину

$$x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = 0.$$

13. Решити диференцијалну једначину

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 2(2x+1)^3e^{-x},$$

ако се зна да њена хомогена има партикуларно решење облика $y = e^{\alpha x}$.

14. Решити диференцијалну једначину

$$y^{(4)} + 2a^2y'' + a^4y = ax + \sin ax, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. Наћи опште решење система диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}2y' &= 6y - 3z + 2e^x, \\z' &= 4y - 2z - e^{2x}.\end{aligned}$$

2. Наћи опште решење система

$$\begin{aligned}y' + 3y + 4z &= 2x, \\z' - y - z &= x,\end{aligned}$$

а затим одредити оно партикуларно решење које задовољава услове $y(0) = 0, z(0) = 0$.

3. Наћи опште решење система диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}y' &= z - y, \\z' &= z + 3y + e^{3ax}, \quad a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. Наћи опште решење система

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2y - x, \\ \frac{dy}{dt} &= 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}.\end{aligned}$$

5. Наћи опште решење система диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -2y - 4z + e^x, \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= y + 3z - x.\end{aligned}$$

6. Наћи опште решење система

$$\begin{aligned}t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + x + y &= 0, \\ t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} - x - y &= 0.\end{aligned}$$

7. Наћи оно партикуларно решење система диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}2y'' - z' - 4y &= 2x, \\ 2y' + 4z' - 3z &= 0,\end{aligned}$$

које задовољава $y(0) = z(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

8. Наћи партикуларно решење система:

$$\begin{aligned}2 \frac{dy}{dx} &= 6y - 3z + 2e^x, \\ \frac{dz}{dx} &= 4y - 2z - e^{2x}, \\ y(0) &= 0, \quad z(0) = 0.\end{aligned}$$

9. Дат је систем диференцијалних једначина

$$x'' - 2x + 2y = 0,$$

$$y'' + x - 3y = 0.$$

Наћи опште решење система, а затим одредити оно партикуларно решење које задовољава услове $x(0) = 1, y(0) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} y = 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} x = 0$.

16. Наћи опште решење система диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4y - 2z - 3x, \\ \frac{dy}{dt} &= z + x, \\ \frac{dz}{dt} &= 6x - 6y + 5z.\end{aligned}$$

10. Наћи оно партикуларно решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}5 \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dy}{dt} + 4x - y &= e^{-t}, \\ \frac{dx}{dt} + 8x - 3y &= 5e^{-t},\end{aligned}$$

које задовољава почетне услове $x(0) = 1$ и $y(0) = 2$.

11. Наћи опште решење система диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}t(1 - \sin t) \frac{dx}{dt} &= (1 - 2 \sin t)x + ty, \\ t^2(1 - \sin t) \frac{dy}{dt} &= (t \cos t - \sin t)x + (1 - t \cos t)ty.\end{aligned}$$