Први колоквијум из Теорије бројева
27.11.2009.

1. Ако се десет различитих цифара $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ на било који начин распореди на празна места (означена звездицама) у низу цифара

$$5 * 383 * 8 * 2 * 936 * 5 * 8 * 203 * 9 * 3 * 76$$

тако да на свако место дође једна цифра, добиће се број дељив са 396. Доказати.

2. Природан број n има само три проста делитеља 2, 5 и 7. Одредити број n ако је

$$\tau\left(\frac{n}{2}\right) = \tau(n) - 54, \qquad \tau\left(\frac{n}{5}\right) = \tau(n) - 42, \qquad \tau\left(\frac{n}{7}\right) = \tau(n) - 63.$$

3. Доказати да је паран природан број савршен ако и само ако је облика $2^{p-1}(2^p - 1)$, где је $2^p - 1$ Мерсенов прост број.

4. (а) Које остатке при дељењу са 8 дају квадрати природних бројева?

(б) Доказати да не постоје природни бројеви m и n такви да је

$$m^2 + n^2 = 2015^{2009}.$$