ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМИ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
27. 01. 2010.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ

1. Доказати да међу бројевима који имају особину да се завршавају двема истим цифрама којима се завршавају њихови квадрати, има и оних који су дељиви са 4.

2. а) Наћи остатак при дељењу квадрата непарног природног броја са 8.

б) Нека су b и a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 цели бројеви, такви да важи

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2.$$

Доказати да је бар један од ових бројева паран.

3. Доказати да Фермаови бројеви задовољавају рекурентну релацију

$$f_{n+1} = f_0 f_1 f_2 \cdots f_n + 2.$$

4. Доказати да за сваки природан број n важи $\varphi(n)\sigma(n) < n^2$, где је φ Ојлерова функција, а $\sigma(n)$ збир природних делилаца броја n.

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ

1. Одредити, ако постоји, прост број p такав да је $5^{p^2} + 1$ дељиво са p^2.

2. а) У скупу природних бројева решити $2x^2 - xy - y^2 + 2x + 7y = 84$.

б) Доказати да једначина $3x^2 + 5y^2 = 9324$ нема решења у скупу целих бројева.

3. Одредити најмањи природан број за који је

$$x \equiv 5 \ \ (\bmod 7),$$

$$x \equiv 7 \ \ (\text{мод } 11),$$

$$x \equiv 3 \ \ (\text{мод } 13).$$

4. Испитати колико решења у скупу целих бројева има конгруенција

$$x^2 \equiv 5 \ \ (\text{мод } 17).$$