Тест из МАТЕМАТИКЕ
1. јул 2005. године
Време за рад је 180 минута. Тест има 12 задатака. Задаци вреде по 5 поена. Погрешан одговор не доноси ни позитивне ни негативне поене. У случају заокруживања више од једног одговора, као и у случају незаокруживања одговора, добија се -1 поен.

ПРЕЗИМЕ И ИМЕ: ______________________________

БРОЈ ОСВОЈЕНИХ ПОЕНА: ________________________

1. Ако је $a = (1+\sqrt{2})^{-1}$ и $b = (1-\sqrt{2})^{-1}$, онда је вредност израза $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ једнака:

1. ☐

А) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$; **Б)** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$; **В)** $2\sqrt{2}$; **Г)** 1; **Д)** 0.

2. Производ свих реалних решења једначине $\dfrac{(x^2-64)(2^x-64)}{\sqrt{-x^2+20x-64}} = 0$ је:

2. ☐

А) -64; **Б)** 8; **В)** 48; **Г)** -384; **Д)** 24576.

3. Скуп свих решења неједначине $\sqrt{1-4x^2} > 1-3x$ је:

3. ☐

А) $\left(0, \dfrac{3}{16}\right)$; **Б)** $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$; **В)** $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$; **Г)** $\left(\dfrac{3}{16}, \dfrac{1}{3}\right)$; **Д)** $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$.

4. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 + (a-1)x + a + 1 = 0$. Вредност реалног параметра a за коју је збир $x_1^2 + x_2^2$ минималан је:

4. ☐

А) 1; **Б)** 2; **В)** 0; **Г)** -1; **Д)** -2.

5. Страница ромба је $a = 9$ cm, а $d_1 + d_2 = 24$ cm је збир дијагонала. Површина датог ромба (у cm^2) је:

5. ☐

А) 126; **Б)** 252; **В)** 63; **Г)** 150; **Д)** 75.

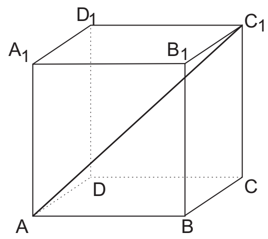
6. Осни пресек праве кружне купе, полупречника основе r, је једнакостраничан троугао. Однос површина дате купе и лопте уписане у њу је:

6. ☐

А) $3:1$; **Б)** $4:3$; **В)** $3:2$; **Г)** $9:2$; **Д)** $9:4$.

7. Ако је φ угао који главна дијагонала AC_1, коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$, заклапа са страном $ABCD$, тада важи:

А) $0^\circ < \varphi \leqslant 15^\circ$; **Б)** $15^\circ < \varphi \leqslant 30^\circ$;
В) $30^\circ < \varphi \leqslant 45^\circ$; **Г)** $45^\circ < \varphi \leqslant 60^\circ$;
Д) $60^\circ < \varphi < 90^\circ$.



7.

8. Збир квадрата највећег негативног и најмањег позитивног решења једначине

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$$

је: **8.**

А) $\frac{\pi^2}{4}$; **Б)** $\frac{\pi^2}{8}$; **В)** $\frac{5\pi^2}{8}$; **Г)** $\frac{9\pi^2}{8}$; **Д)** $\frac{\pi^2}{2}$.

9. Остатак при дељењу неког полинома $P(x)$ са $x^2 + 7x + 10$ је $-2x + 3$. Тада је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x + 5$ једнак: **9.**

А) -7; **Б)** 13; **В)** 0; **Г)** 70; **Д)** 67.

10. Област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt[3]{\log_3 \dfrac{3x-1}{x+3}}$ је: **10.**

А) $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$; **Б)** $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$; **В)** $(-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$;
Г) $(-\infty, -3) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$; **Д)** $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

11. Геометријско место тачака подједнако удаљених од $y-$осе, координатног система xOy, и од криве $x^2 - 6x + y^2 = -8$ је: **11.**

А) хипербола; **Б)** елипса; **В)** парабола; **Г)** права; **Д)** дуж.

12. Дат је низ $\sqrt{0,1}, \sqrt{0,1^2}, \sqrt{0,1^3}, \ldots, \sqrt{0,1^n}, \ldots$ Најмањи природан број n такав да је производ првих n чланова датог низа мањи од $0,00001$ је: **12.**

А) мањи од 4; **Б)** 4; **В)** 5; **Г)** 6; **Д)** већи од 6.

Р Е Ш Е Њ А

1. Ако је $a = (1+\sqrt{2})^{-1}$ и $b = (1-\sqrt{2})^{-1}$, онда је вредност израза $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ једнака:

А) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$; **Б)** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$; **В)** $2\sqrt{2}$; **Г)** 1; **Д)** 0✓.

Решење. Како је

$$a+1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + 1 = \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

и

$$b+1 = \frac{1}{1-\sqrt{2}} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$

имамо да је $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.$ □

2. Производ свих реалних решења једначине $\dfrac{\left(x^2-64\right)\left(2^x-64\right)}{\sqrt{-x^2+20x-64}} = 0$ је:

А) -64; **Б)** 8; **В)** 48✓; **Г)** -384; **Д)** 24576.

Решење. Пошто је $-x^2+20x-64 > 0 \Leftrightarrow x \in (4,16)$, дату једначину решавамо у скупу $(4,16)$. Како је $x^2 = 64 \Leftrightarrow x = -8 \vee x = 8$ и $2^x = 64 = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$, закључујемо да су 6 и 8 једина решења дате једначине, тј. да је производ свих решења једначине 48. □

3. Скуп свих решења неједначине $\sqrt{1-4x^2} > 1-3x$ је:

А) $\left(0, \dfrac{3}{16}\right)$; **Б)** $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$; **В)** $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$✓; **Г)** $\left(\dfrac{3}{16}, \dfrac{1}{3}\right)$; **Д)** $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Решење. Реални бројеви x за које важи: $1-3x < 0$ и $1-4x^2 \geqslant 0$, тј. $x \in \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right) \cap \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$ решења су дате неједначине. Такође, решења система $1-3x \geqslant 0$, $1-4x^2 > (1-3x)^2$ су решења и дате неједначине. Из еквиваленција

$$1-3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$$

$$1-4x^2 > (1-3x)^2 \Leftrightarrow 1-4x^2-1+6x-9x^2 > 0 \Leftrightarrow -13x^2+6x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{6}{13}\right)$$

закључујемо да су решења система, тј. дате неједначине и елементи скупа $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right] \cap \left(0, \dfrac{6}{13}\right) = \left(0, \dfrac{6}{13}\right)$.

Дакле, скуп решења дате неједначине је $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left(0, \dfrac{6}{13}\right) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. □

4. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+(a-1)x+a+1=0$. Вредност реалног параметра a за коју је збир $x_1^2+x_2^2$ минималан је:

А) 1; **Б)** 2✓; **В)** 0; **Г)** -1; **Д)** -2.

Решење. Према Виетовим формулама важи: $x_1+x_2 = 1-a$ и $x_1x_2 = a+1$. Како је $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$, имамо да је $x_1^2+x_2^2 = (1-a)^2-2a-2 = a^2-4a-1$. Трином a^2-4a-1 достиже своју минималну вредност за $a_{\min} = 2$. □

5. Страница ромба је $a = 9\,\mathrm{cm}$, а $d_1+d_2 = 24\,\mathrm{cm}$ је збир дијагонала. Површина датог ромба (у cm^2) је:

А) 126; **Б)** 252; **В)** 63✓; **Г)** 150; **Д)** 75.

Решење. Пошто су дијагонале ромба међусобно нормалне и полове се, према Питагориној теореми следи да је $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, тј. $d_1^2 + d_2^2 = 324$. Сада имамо да је $324 = (d_1 + d_2)^2 - 2d_1d_2 = 576 - 2d_1d_2$, одакле је $d_1d_2 = 126$. Површину четвороугла чије су дијагонале међусобно нормалне можемо израчунати по обрасцу $P = \frac{d_1d_2}{2}$, па је површина датог ромба $P = 63$. $\square$

6. Осни пресек праве кружне купе, полупречника основе r, је једнакостраничан троугао. Однос површина дате купе и лопте уписане у њу је:

А) $3:1$; **Б)** $4:3$; **В)** $3:2$; **Г)** $9:2$; **Д)** $9:4\checkmark$.

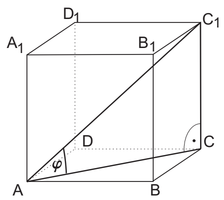
Решење. Површина дате купе је $P_k = r\pi s + r^2\pi = 3r^2\pi$, јер је $s = 2r$, где је s изводница купе. Полупречник лопте R једнак је полупречнику уписаног круга у једнакостраничан троугао странице $2r$, тј.

$$R = \frac{1}{3}\cdot\frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}},$$

па је површина лопте једнака $P_\ell = 4R^2\pi = \frac{4}{3}r^2\pi$. Дакле, $P_k : P_\ell = \frac{3r^2\pi}{\frac{4}{3}r^2\pi} = 9:4$. $\square$

7. Ако је φ угао који главна дијагонала AC_1, коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$, заклапа са страном $ABCD$, тада важи:

А) $0° < \varphi \leqslant 15°$; **Б)** $15° < \varphi \leqslant 30°$;
В) $30° < \varphi \leqslant 45°\checkmark$; **Г)** $45° < \varphi \leqslant 60°$;
Д) $60° < \varphi < 90°$.



Решење. Угао φ који главна дијагонала AC_1 дате коцке заклапа са страном $ABCD$ једнак је оштром углу између правих AC_1 и AC. Ако је a страница дате коцке, имамо да је $AC_1 = a\sqrt{3}$ и $AC = a\sqrt{2}$, па је $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Како је $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,5}{\sqrt{3}} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \cos\varphi > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$ и cos је строго опадајућа функција на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, имамо да је $30° < \varphi < 45°$. $\square$

8. Збир квадрата највећег негативног и најмањег позитивног решења једначине $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ је:

А) $\frac{\pi^2}{4}$; **Б)** $\frac{\pi^2}{8}\checkmark$; **В)** $\frac{5\pi^2}{8}$; **Г)** $\frac{9\pi^2}{8}$; **Д)** $\frac{\pi^2}{2}$.

Решење. Како је

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= \underbrace{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}_{=1}\left(\sin^4 x - \sin^2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\\ &= \underbrace{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2}_{=1} - 3\sin^2\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x,\end{aligned}$$

дата једначина је еквивалентна са $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}$, тј. са $\sin^2 2x = 1$. Решења последње једначине су $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Најмање позитивно решење је $\frac{\pi}{4}$ (добијамо га за $k = 0$), а највеће негативно је $-\frac{\pi}{4}$ (добијамо га за $k = -1$), па је $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$. $\square$

9. Остатак при дељењу неког полинома $P(x)$ са $x^2 + 7x + 10$ је $-2x + 3$. Тада је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x + 5$ једнак:

А) -7; **Б)** $13\checkmark$; **В)** 0; **Г)** 70; **Д)** 67.

Решење. Како је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x^2+7x+10$ једнак $-2x+3$, имамо да је $P(x)=Q(x)\cdot\big(x^2+7x+10\big)-2x+3$, за неки полином $Q(x)$. Према Безуовој теореми остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x+5$ је $P(-5)$. Дакле, имамо да је

$$P(-5)=Q(-5)\cdot\big((-5)^2+7\cdot(-5)+10\big)-2\cdot(-5)+3=Q(-5)\cdot 0+13=13. \qquad \square$$

10. Област дефинисаности функције $f(x)=\sqrt[3]{\log_3\dfrac{3x-1}{x+3}}$ је:

А) $(-\infty,-3)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$✓; **Б)** $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$; **В)** $(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$;

Г) $(-\infty,-3)\cup\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$; **Д)** $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

Решење. Скуп свих реалних бројева x за које је дефинисана функција f је скуп свих решења неједначине $\dfrac{3x-1}{x+3}>0$ (функција $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ дефинисана је за све реалне бројеве). Из таблице

		-3		$\frac{1}{3}$	
$x+3$	$--$	0	$+$	$\mid$	$++$
$3x-1$	$--$	$\mid$	$-$	0	$++$
$\frac{3x-1}{x+3}$	$++$	$\ast$	$-$	0	$++$

закључујемо да је скуп решења $(-\infty,-3)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$. $\square$

11. Геометријско место тачака подједнако удаљених од $y-$осе координатног система xOy и од криве $x^2-6x+y^2=-8$ је:

А) хипербола; **Б)** елипса; **В)** парабола✓; **Г)** права; **Д)** дуж.

Решење. Крива $x^2-6x+y^2=-8$, тј. $(x-3)^2+y^2=1$, је круг са центром у $O(3,0)$ полупречника $r=1$. Ако је $M(x,y)$ тачка траженог геометријског места, при чему је очигледно $x>0$, тада је $M'(0,y)$ подножје нормале из M на $y-$осу, па имамо да важи: $MM'=MO-r$, тј. $x=\sqrt{(x-3)^2+y^2}-1$. Сређивањем последње једнакости добијамо једначину параболе $y^2=8(x-1)$. $\square$

12. Дат је низ $\sqrt{0,1},\sqrt{0,1}^2,\sqrt{0,1}^3,\ldots,\sqrt{0,1}^n,\ldots$ Најмањи природан број n такав да је производ првих n чланова датог низа мањи од $0,00001$ је:

А) мањи од 4; **Б)** 4; **В)** 5✓; **Г)** 6; **Д)** већи од 6.

Решење. Производ првих n чланова датог низа је

$$\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{0,1}^2\cdot\sqrt{0,1}^3\cdots\sqrt{0,1}^n=\sqrt{0,1}^{1+2+\ldots+n}=\sqrt{0,1}^{\frac{n(n+1)}{2}}=10^{-\frac{n(n+1)}{4}},$$

па је $10^{-\frac{n(n+1)}{4}}<0,00001=10^{-5}$, ако и само ако је $-\dfrac{n(n+1)}{4}<-5$, тј. $n^2+n>20$. Даље, имамо да је $n^2+n-20>0$ ако и само ако је $n\in(-\infty,-5)\cup(4,+\infty)$, па је најмањи природан број који задовољава услове задатка $n_{\min}=5$. $\square$