SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA, GAUSOV METOD

Neka je F polje (čije ćemo elemente zvati skalari) i m, n prirodni brojevi. Konjunkcija jednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned} \tag{1}
$$

gde su x_j $(j = 1, \ldots, n)$ nepoznate, a a_{ij} i b_i $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ dati elementi polja F, se naziva sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih nad poljem F. Skalari a_{ij} se zovu koeficijenti, a b_i slobodni članovi sistema. Sistem je homogen ako su svi slobodni članovi jednaki nuli, inače je nehomogen.

Uredjena n-torka $(c_1, \ldots, c_n)$ je rešenje sistema (1) ako važe jednakosti

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots a_{in}c_n = b_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Rešiti sistem (1) znači odrediti skup $\mathcal{R}$ svih njegovih rešenja. Ako je $\mathcal{R} = \emptyset$ onda kažemo da je sistem nesaglasan ili nemoguć. Ako je $\mathcal{R} \neq \emptyset$ onda je sistem saglasan. Sistem koji je saglasan može imati jedinstveno rešenje ili može imati beskonačno mnogo rešenja.

Očigledno, homogen sistem je uvek saglasan, jer ima bar jedno rešenje $(0, \ldots, 0)$. Ovo rešenje se zove trivijalno. Ostala rešenja, ako postoje, nazivaju se netrivijalna.

Dva sistema linearnih jednačina nad istim poljem i sa istim brojem nepoznatih su ekvivalentna ako imaju isti skup rešenja.

Sledećim transformacijama se od polaznog sistema dobija ekvivalentan sistem:
(i) razmenom $i-$te i j-te jednačine,
(ii) množenjem i-te jednačine skalarom $c \neq 0$,
(iii) dodavanjem i-toj jednačini j-te jednačine pomnožene nekim skalarom d .
(iv) izostavljanjem jednačine oblika $0x_1 + \ldots 0x_n = 0$.

Teorema (Gaus). *Svaki sistem linearnih jednačina ekvivalentan je nekom stepenastom sistemu, tj. sistemu oblika*

$$
\begin{aligned}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
a'_{22}x_2 + \ldots a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
a'_{kk}x_l + \ldots a'_{kn}x_n &= b'_k, \\
0 &= b'_{k+1}, \\
&\vdots \\
0 &= b'_m,
\end{aligned}
$$

gde je $a'_{11}a'_{22}\ldots a'_{kk} \neq 0$.

Rešavanje stepenastog sistema:

(1) Akoje $(b'_k, \dots, b'_m) \neq (0, \dots, 0)$ onda sistem nije saglasan, tj. $\mathcal{R} = \emptyset$.

(2) Ako je $(b'_k, \dots, b'_m) = (0, \dots, 0)$ onda je sistem saglasan i poslednjih $m-k$ jednačina se može izostaviti.

(i) ako je $n = k$ sistem ima oblik

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{nn}x_n &= b'_n, \end{aligned}$$

i ima jedinstveno rešenje. Iz poslednje jednačine je jedinstveno odredjeno $x_n = b'_n/a'_{nn}$. Zamenimo dobijeno x_n u pretposlednjoj jednačini i iz nje odredimo jedinstveno x_{n-1}. Nastavljaju ci postupak odredimo i preostale nepoznate.

(ii) ako je $k < n$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja, tj. postoji bar jedna slobodna nepoznata. Izaberimo nepoznate $x_{k+1}, \dots, x_n$ za slobodne i rešimo sistem po nepoznatim $x_1, \dots, x_k$ (glavne nepoznate) kao u (i).

ZADACI

1. Rešiti sisteme linearnih jednačina:

(a) $\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ 3x + 7y &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ 4x - 6y &= 10 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 4x + 5y &= 2 \\ 8x + 10y &= 4 \end{aligned}$

2. Rešiti sisteme linearnih jednačina:

(a) $\begin{aligned} 2x - 3y + z + 1 &= 0 \\ x + y + z &= 6 \\ 3x + y - 2z &= -1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ 3x - 5y + 5z &= 3 \\ 5x - 8y + 6z &= 5 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 3x - y + 3z &= 4 \\ 6x - 2y + 6z &= 1 \\ 5x + 4y &= 2 \end{aligned}$

3. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x - y + z - t &= 1 \\ 3x + y - 3z + 4t &= -1 \\ x + 3y - 3z + 4t &= -3. \end{aligned}$$

4. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x + y + z + 2s + 3t &= 13 \\ 3x + 3y \ \ + s + 5t &= 10 \\ x + y + 2z - s + 9t &= 18 \\ -2x - 2y + z + 3s - 4t &= 5. \end{aligned}$$

5. Odrediti parametar a tako da sistem ima resenje

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ ax + y &= 2 \\ 2x - y &= a. \end{aligned}$$

6. Diskutovati po $a \in R$ i rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + (1+a)y + z &= 2a \\ x + y + (1+z)a &= 0 \end{aligned}$$

7. Rešiti za razne vrednosti a sledeći sistem jednačina nad poljem R:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 1 \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

8. Diskutovati po $a \in R$ i rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x - 2y + z - 3u &= 0 \\ 2x + 3y - 2z + au &= 0 \\ 3x + y - z - 2u &= 0 \end{aligned}$$

9. Odrediti $p \in R$ tako da sistem jednačina ima netrivijalna rešenja i rešiti ga za dobijene vrednosti p

$$\begin{aligned} 4x + py + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ (p+2)x + 6y + 2z &= 0. \end{aligned}$$