ALGEBARSKE STRUKTURE

Neka je $A \neq \emptyset$ i $n \in N$. Preslikavanje $f : A^n \to A$ se zove n-arna operacija na A. Broj n se zove dužina ili arnost operacije f (oznaka $n = ar(f)$). Specijalno, za $n = 1$ f je unarna operacija, a za $n = 2$ f je binarna operacija. Ova definicija se može proširiti i za $n = 0$. Funkcija $c : A^0 \to A$ koja izdvaja element $c \in A$ se zove nularna operacija ili konstanta.

Za binarne operacije uobičajeno je da umesto $f(x, y)$ pišemo xfy ili, još češće, $x * y$. Binarna operacija na konačnom skupu se često zadaje tablicom (Kejlijeva tablica).

Uredjeni par $(A, \mathcal{F})$, gde je A neprazan skup (zove se nosač), a $\mathcal{F}$ familija operacija na A se zove algebra ili algebarska struktura. Ako je skup $\mathcal{F}$ konačan, recimo $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$, pišemo $(A, f_1, \ldots, f_m)$. Uobičajeno je da se operacije navode po opadajućoj arnosti.

Podrazumeva se da se na svakoj algebri posmatra relacija jednakosti i ona se eksplicitno ne navodi u oznaci strukture.

U zavisnosti od broja operacija i njihovih osobina algebarske strukture imaju različite nazive.

GRUPOID

Definicija 1 *Neka je $G \neq \emptyset$ i $* : G \times G \to G$. Uredjeni par $(G, *)$ se zove grupoid.*

Ako je jasno o kojoj operaciji je reč, često ćemo umesto „grupoid $(G, *)$“ pisati samo „grupoid G“.

Primeri: (1) $(N, +)$, $(Z, +)$, $(R, +)$ -aditivni grupoidi,

(2) $(N, \cdot)$, $(Z, \cdot)$, $(R, \cdot)$ -multiplikativni grupoidi,

(3) $(\mathcal{P}(S), \cup)$, $(\mathcal{P}(S), \cap)$

(4) Neka je preslikavanje $\mathrm{rest_n} : \mathrm{Z} \to \{0, 1, \ldots, \mathrm{n} - 1\}$ definisano sa

$$\mathrm{rest_n(x) = ostatak\ od\ x\ pri\ deljenju\ sa\ n}$$

i neka su $+_n$ (sabiranje po modulu n) i $\cdot_n$ (množenje po modulu n) operacije na Z definisane sa

$$x +_n y = \mathrm{rest_n(x + y)}, \qquad \mathrm{x \cdot_n y = rest_n(x \cdot y)}.$$

Tada $(Z, +_n)$ i $(Z, \cdot_n)$ su grupoidi.

Takođe, ako je $Z_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ onda su i $(Z_n, +_n)$ i $(Z_n, \cdot_n)$ grupoidi.

(5) $(M_2(R),+)$ i $(M_2(R),\cdot)$, gde je $M_2(R)=\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a,b,c,d\in R\}$,

(6) $(S^S,\circ)$,

(7) $(Z^2,*)$, $(a,b)*(c,d)=(ac+bd,ad-bc)$,

(8) $(2N+1,+)$, $(R^-,\cdot)$, $(\{1,-1,i,-i\},+)$ nisu grupoidi.

Definicija 2 *Neka su $(G,*)$ i $(H,\diamond)$ grupoidi i neka je na $G\times H$ definisana operacija $\triangleright$ na sledeći način*

$$(g_1,h_1)\triangleright(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\diamond h_2),\ \ g_1,g_2\in G,h_1,h_2\in H.$$

Tada se grupoid $(G\times H,\triangleright)$ zove direktni proizvod grupoida G i H.

Definicija 3 *Neprazni podskup H skupa G je podgrupoid grupoida $(G,*)$ ako je „zatvoren“ za operaciju $*$, tj. ako za svako $x,y\in H$ važi $x*y\in H$. U tom slučaju pisaćemo $(H,*)<(G,*)$.*

Primeri: $(N,+)<(Z,+)<(Q,+)<(R,+)$, $(Z_n,+_n)<(Z,+_n)$, ali $(Z_n,+_n)\not<(Z,+)$.

Definicija 4 *Preslikavanje $f:G\to H$ je homomorfizam grupoida $(G,*)$ u grupoid $(H,\diamond)$ ako važi*

$$(\forall x,y\in G)\ f(x*y)=f(x)\diamond f(y).$$

homomorfizam + „1-1“= monomorfizam

homomorfizam + „na“= epimorfizam,

homomorfizam + bijekcija = izomorfizam,

$f:G\to G$ homomorfizam = endomorfizam,

endomorfizam + bijekcija = automorfizam,

$\ker f=\{(x_1,x_2)|f(x_1)=f(x_2),x_1,x_2\in G\}$ se zove jezgro homomorfizma f,

$\mathrm{Im} f=\{f(x)|x\in G\}$ se zove slika homomorfizma f.

Definicija 5 *Relacija ekvivalencije $\sim$ skupa G je kongruencija grupoida $(G,*)$ ako važi*

$$(\forall a,b,c,d\in G)\ (a\sim c\wedge b\sim d\Longrightarrow a*b\sim c*d),$$

tj. ako je saglasna sa operacijom $*$.

ZADACI

1. Odrediti sve podgrupoide grupoida $(G,*)$, ako je $G=\{a,b,c,d\}$, a operacija $*$ data tablicom:

$*$	a	b	c	d
a	a	a	b	c
b	a	b	b	c
c	a	d	c	b
d	c	c	d	c

.

2. Na skupu R^2 definisana je operacija $+$ na sledeći način $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$. Ispitati da li je $P=\{(x,y)|3x-5y=0\}$ podgrupoid grupoida $(R^2,+)$.

3. Da li je $Sim(S)=\{f|f:S\to S,\ f$ je bijekcija$\}$ podgrupoid grupoida $(S^S,\circ)$?

4. Dokazati da je $f:R\to R$, $f(x)=2^x$, homomorfizam grupoida $(R,+)$ u $(R,\cdot)$. Da li je ovo preslikavanje i izomorfizam?

5. Dokazati da je preslikavanje $f:R^2\to R^2$ dato sa $f(x,y)=(2x-3y,5x+7y)$, $x,y\in R$, endomorfizam grupoida $(R^2,+)$.

6. Pokazati da su grupoidi $(\mathcal{P}(S),\cup)$ i $(\mathcal{P}(S),\cap)$ izomorfni.

7. Neka je $n>1$ fiksiran prirodni broj. Dokazati da je preslikavanje $\mathrm{rest_n}:\mathrm{Z}\to\mathrm{Z_n}$ epimorfizam grupoida

(a) $(Z,+)$ u $(Z_n,+_n)$, (b) $(Z,\cdot)$ u $(Z_n,\cdot_n)$.

8. Ako je $f:A\to B$ homomorfizam grupoida $(A,*)$ u grupoid $(B,\diamond)$ i $g:B\to C$ homomorfizam grupoida $(B,\diamond)$ u grupoid $(C,\triangleright)$ dokazati da je $g\circ f:A\to C$ homomorfizam grupoida $(A,*)$ u grupoid $(C,\triangleright)$.

9. Ako je $f:G\to H$ izomorfizam grupoida $(G,*)$ na grupoid $(H,\diamond)$ onda je $f^{-1}:H\to G$ izomorfizam grupoida $(H,\diamond)$ na grupoid $(G,*)$. Dokazati

10 Ako je $f:G\to H$ homomorfizam grupoida $(G,*)$ na grupoid $(H,\diamond)$ pokazati da je $(Im(f),\diamond)<(H,\diamond)$.

11. Neka je $M_2(R)=\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}|a,b,c,d\in R\}$ i $\mathrm{det}:\mathrm{M_2(R)}\to\mathrm{R}$, $\mathrm{det}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right)=\mathrm{ad-bc}$. Dokazati da je preslikavanje det homomorfizam grupoida $(M_2(R),\cdot)$ u grupoid $(R,\cdot)$.

12. Na skupu Z definisane su operacije $*$ i $\bullet$ na sledeći način $x*y=x+y+xy$ i $x\bullet y=x+y-xy$. Pokazati da je $(Z,*)\cong(Z,\bullet)$.

13. Neka je $n>1$ fiksiran prirodni broj. Dokazati da je $\equiv_n$ kongruencija grupoida $(Z,+)$, kao i grupoida $(Z,\cdot)$.

14. Ako je $f : A \to B$ homomorfizam grupoida $(A, *)$ u grupoid $(B, \diamond)$ dokazati da je kerf kongruencija grupoida $(A, *)$.

15. Ako je $\sim$ kongruencija grupoida $(G, *)$ onda je $(G/_\sim, \diamond)$ grupoid, gde je $\diamond : G/_\sim \times G/_\sim \to G/_\sim$ definisano sa $C_a \diamond C_b = C_{a*b}$, za $C_a, C_b \in G/_\sim$.

16. Naći sve kongruencije i količničke grupoide grupoida $(G, *)$ zadatog tablicom

$*$	a	b	c
a	b	a	b
b	b	b	b
c	b	b	b

.

17. Odrediti sve podgrupoide i kongruencije grupoida zadatih sledećim tablicama

(a)

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b	b	b	c
c	a	b	c

(b)

$*$	a	b	c	d
a	b	b	c	d
b	b	b	d	c
c	c	c	d	d
d	d	d	d	d

.

18. Neka je $\sim$ kongruencija grupoida $(G, *)$. Pokazati da je količnički grupoid $G/_\sim$ homomorfna slika grupoida $(G, *)$.

19. Neka je $f : G \to H$ homomorfizam grupoida $(G, *)$ u grupoid $(H, \triangleright)$. Pokazati da je $(G/_{kerf}, \diamond) \cong (Imf, \triangleright)$.