KOMUTATIVNI I ASOCIJATIVNI GRUPOIDI. NEUTRALNI ELEMENT GRUPOIDA.

Grupoid $(G, *)$ je asocijativan akko važi $(\forall x, y, z \in G)\ x * (y * z) = (x * y) * z$.

Grupoid $(G, *)$ je komutativan akko važi $(\forall x, y \in G)\ x * y = y * x$.

Asocijativan grupoid se zove semigrupa.

Primeri:

- $(N, +),\ (Z, +),\ (R, +)$ su komutativni i asocijativni,
- $(N, \cdot),\ (Z, \cdot),\ (R, \cdot)$ su komutativni i asocijativni,
- $(\mathcal{P}(S), \cup),\ (\mathcal{P}(S), \cap)$ su komutativni i asocijativni,
- $(M_n(R), +)$ komutativan i asocijativan, $(M_n(R), \cdot)$ asocijativan i nekomutativan (gde je $M_n(R)$ skup kvadratnih matrica reda n nad poljem realnih brojeva),
- $(S^S, \circ)$ asocijativan i nekomutativan.

Element e_L grupoida $(G, *)$ je levi neutralni (jedinični) akko važi $(\forall x \in G)\ e_L * x = x$.

Element e_D grupoida $(G, *)$ je desni neutralni (jedinični) akko važi $(\forall x \in G)\ x * e_D = x$.

Element e grupoida $(G, *)$ je neutralni (jedinični) akko je levi i desni neutralni, tj. akko važi $(\forall x \in G)\ x * e = x,\ e * x = x$.

Primeri:

- $(N, +)$, nema; $(Z, +),\ e = 0$; $(Z_n, +_n),\ e = 0$;
- $(Q, \cdot),\ e = 1$; $(Z_n, \cdot_n),\ e = 1$;
- $(\mathcal{P}(S), \cup),\ e = \emptyset$; $(\mathcal{P}(S), \cap),\ e = S$;
- $(S^S, \circ),\ e = 1_S$, gde $1_S : S \to S,\ 1_S(x) = x$ (identičko preslikavanje skupa S);
- $\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & c & a & b \\ b & a & b & c \\ c & a & a & b \end{array}$, $e_L = b,\ e_D$ nema; $\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & c & b & a & b \\ b & a & d & b & c \\ c & a & b & c & d \\ d & b & c & d & b \end{array}$, $e = c$.

Neka je $(G, *)$ grupoid i $a \in G$. Preslikavanje $L_a : G \to G$ definisano sa $L_a(x) = a * x,\ x \in G$, se zove leva translacija grupoida G za element a.

ZADACI

1. Na skupu R definisane su operacije $*$ i $\diamond$ na sledeći način $x * y = x^3 + y^3,\ x \diamond y = x$. Ispitati komutativnost i asocijativnost ovih operacija.

2. Na skupu $S = \{(a,b)|a,b \in Z\}$ definisana je operacija $(a,b) * (c,d) = (ac, bc + d)$. Ispitati komutativnost i asocijativnost ove operacije.

3. Dokazati da su grupoidi $(Z, +_n)$, $(Z_n, +_n)$, $(Z, \cdot_n)$, $(Z_n, \cdot_n)$ komutativni i asocijativni.

4. Ispitati da li su sledeći grupoidi komutativni i asocijativni:

(a) $\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & c & a \\ c & c & a & b \end{array}$, (b) $\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & b & c & d & b \\ b & c & d & b & c \\ c & d & b & c & d \\ d & b & c & d & b \end{array}$, (c) $\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & d & b & c \\ b & c & b & d & a \\ c & d & a & c & b \\ d & b & c & a & d \end{array}$.

5. Neka je $(G, *)$ komutativan (asocijativan) grupoid. Dokazati:

(a) Svaki podgrupoid datog grupoida je komutativan (asocijativan).

(b) Ako je $\sim$ kongruencija grupoida $(G, *)$ onda je grupoid $(G/_\sim, \diamond)$ takođe komutativan (asocijativan) (operacija $\diamond$ je definisana sa $C_a \diamond C_b = C_{a*b}$).

(c) Homomorfna slika datog grupoida je takođe komutativan (asocijativan) grupoid.

6. Ako neki grupoid ima levi i desni neutralni onda su oni jednaki. Dokazati.

7. Grupoid može imati najviše jedan neutralni element. Dokazati.

8. Ako grupoid $(G, *)$ ima neutralni e i ako je $\sim$ kongruencija grupoida G onda je C_e neutralni grupoida $(G/_\sim, \diamond)$.

9. Neka je $(H, \triangleleft)$ homomorfna slika grupoida $(G, *)$. Ako grupoid G ima neutralni onda ga ima i grupoid H. Dokazati.

KVAZIGRUPA

Grupoid $(G, *)$ je kvazigrupa ako i samo ako za svako $a, b \in G$ jednačine $a * x = b$ i $y * a = b$ imaju jedinstvena rešenja (po x i po y), tj. važi

$$(\forall a, b \in G)(\exists_1 x \in G)(\exists_1 y \in G)\ (a * x = b,\ y * a = b).$$

Primeri:

- $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$ su kvazigrupe,
-) $(N, +)$ nije kvazigrupa (na primer $3 + x = 1$ nema rešenje),
- $(Z, \cdot)$ nije kvazigrupa (na primer $2 \cdot x = 1$ nema rešenje),
- $(Q, \cdot)$ nije kvazigrupa ($0 \cdot x = 1$ nema rešenje), $(Q \setminus \{0\}, \cdot)$ je kvazigrupa.

ZADACI

1. Ispitati da li je $(R, *)$ kvazigrupa, ako je R skup realnih brojeva, a operacija $*$ definisana na sledeći način:

(a) $x * y = ax + by + c,\ a, b, c \in R,\ ab \neq 0$

(b) $x * y = x^3 + 3^y$,

(c) $x * y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$,

(d) $x * y = x^2 + y^2$,

(e) $x * y = x^3 + x + 3y$.

2. Koji od sledećih grupoida su kvazigrupe:

(a) $\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b \\ c & c & c & c & c \\ d & d & d & d & d \end{array}$, (b) $\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & a & c & b & d \\ c & b & d & a & c \\ d & c & a & d & a \end{array}$, (c) $\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & d & b & c \\ b & c & b & d & a \\ c & d & a & c & b \\ d & b & c & a & d \end{array}$?

3. Pokazati da u svakoj kvazigrupi važe zakoni kancelacije (skraćivanja). Primerom pokazati da obrnuto ne mora da važi, tj. da grupoid u kome važe zakoni kancelacije ne mora biti kvazigrupa.

4. Dokazati da u $(Z_6, \cdot_6)$ ne važe zakoni kancelacije.

5. Neka je $(G, *)$ konačna komutativna kvazigrupa. Pokazati da jednačina $x * x = a$ ima rešenje za svako $a \in G$ ako i samo ako je broj elemenata skupa G neparan.

SEMIGRUPA

Asocijativan grupoid se zove semigrupa.

Za $a_1, \ldots, a_n \in G$ definišemo $a_1 * \ldots * a_n$ induktivno (po n):

za $n = 1$: $a_1 = a_1$,

za $n+1$: $a_1 * \ldots * a_{n+1} = (a_1 * \ldots * a_n) * a_{n+1}$,(pod pretpostavkom da je definisano $a_1 * \ldots * a_n$).

Specijalno, za $a_1 = \ldots = a_n = a$ proizvod $\underbrace{a * \ldots * a}_{n}$ se zove n-ti stepen elementa a i označava sa a^n.

Napomena: Ako je semigrupa aditivna–$(G, +)$, onda se n-ti stepen elementa $a \in G$ obeležava sa $na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n}$.

Teorema (uopšteni asocijativni zakon). *Neka je $(G, *)$ semigrupa, $n \in N$ i $a_1, \ldots, a_n \in G$. Tada za svako $k < n$ važi*

$$a_1 * \ldots a_n = (a_1 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * \ldots a_n).$$

Posledica. *Neka je* $(G,*)$ *semigrupa,* $m, n \in N$ *i* $a \in G$. *Tada važi:*

(1) $a^m * a^n = a^{m+n}$, (2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(*u aditivnoj notaciji:* (1) $ma + na = (m+n)a$, (2) $n(ma) = (nm)a$).

Semigrupa $(G,*)$ je ciklična sa generatorom a ako je svaki njen element stepen elementa a, tj. važi $G = \{a^n | n \in N\}$. Tada pišemo $G = \langle a \rangle$.

Primeri:

- $(N,+) = \langle 1 \rangle = \{1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 1+1+1, \ldots\}$;
- $(Z_n,+_n) = \langle 1 \rangle = \{1,\ 2 = 1 +_n 1, \ldots, n-1 = \underbrace{1 +_n \ldots +_n 1}_{n-1},\ 0 = \underbrace{1 +_n \ldots +_n 1}_{n}\}$.

ZADACI

1. Neka je $f : G \to H$ homomorfizam semigrupe $(G,*)$ u semigrupu $(H,\diamond)$. Dokazati da za svako $a \in G$ i svako $n \in N$ važi $f(a^n) = (f(a))^n$.

2. Neka je $n \in N$ i $(G,*)$ komutativna semigrupa. Dokazati da je preslikavanje $f : G \to G,\ f(x) = x^n$ endomorfizam semigrupe G.

3. Pokazati da su dve beskonačne ciklične semigrupe izomorfne.

4. Ako je semigrupa $(S,*)$ bez jedinice, proširiti S i $*$ tako da novi grupoid bude semigrupa sa jedinicom (monoid).

5. Neka je $(G,*)$ semigrupa i $\mathcal{L} = \{L_a | a \in G\}$ skup levih translacija grupoida G. Pokazati:

(1) $(\mathcal{L},\circ)$ je semigrupa,

(2) Preslikavanje $\phi : G \to \mathcal{L}$, dato sa $\phi(a) = L_a$ je homomorfizam semigrupe $(G,*)$ u semigrupu $(\mathcal{L},\circ)$.

6. Svaka semigrupa je izomorfna nekoj semigrupi preslikavanja.

7. Odrediti semigrupe preslikavanja izomorfne sledećim semigrupama

$$\text{(a)}\ \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array}\ ,\quad \text{(b)}\ \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & a & b & c & d \\ c & a & b & c & d \\ d & a & b & c & d \end{array}\ ,\quad \text{(c)}\ \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b \\ c & c & c & c & c \\ d & d & d & d & d \end{array}\ .$$

8. Koristeći Kejlijevu teoremu za semigrupe ispitati da li su sledeći grupoidi semigrupe:

$$\text{(a)}\ \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array}\ ,\quad \text{(b)}\ \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & d & b & c \\ b & c & b & d & a \\ c & d & a & c & b \\ d & b & c & a & d \end{array}\ .$$

9. (a) Pokazati da u svakoj konačnoj semigrupi postoji idempotentan element.
   (b) Ciklična semigrupa je konačna akko sadrži idempotentan element.

MONOID

Semigrupa sa neutralnim elementom se zove monoid.

Element a monoida $(G, *, e)$ je inverzibilan sleva akko jednačina $x * a = e$ ima bar jedno rešenje u skupu G. Svako takvo rešenje se zove levi inverz od a.

Element a monoida $(G, *, e)$ je inverzibilan zdesna akko jednačina $a * y = e$ ima bar jedno rešenje u skupu G. Svako takvo rešenje se zove desni inverz od a.

Element a monoida $(G, *, e)$ je inverzibilan akko je inverzibilan sleva i zdesna. Tada su njegov levi i desni inverz jedinstveni i jednaki i taj element se obeležava sa a^{-1} i zove inverz od a. Dakle, to je jedini element za koji važi $a * a^{-1} = e,\ a^{-1} * a = e$.

ZADACI

1. Ako je element a monoida $(G, *, e)$ inverzibilan sleva i zdesna tada su njegov levi i desni inverzni jedinstveni i jednaki. Dokazati.

2. Ako su elementi a i b monoida $(G, *, e)$ inverzibilni, onda su inverzibilni i a^{-1}, b^{-1} i $a * b$ i važi $(a^{-1})^{-1} = a$ i $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

3. Odrediti inverzibilne elemente u monoidima

(a) $(Z, +, 0),\ (Q, +, 0),\ (R, +, 0)$;

(b) $(N, \cdot, 1)$, $(Z, \cdot, 1)$, $(Q, \cdot, 1)$;

(c) $(Z_n, +_n, 0)$, $(Z_n, \cdot_n, 1)$;

(d) $(M_n(R), +, 0)$, $(M_n(R), \cdot, I_n)$;

(e) $(\mathcal{P}(S), \cup, \emptyset)$, $(\mathcal{P}(S), \cap, S)$;

(f) $(S^S, \circ, 1_S)$.