VEKTORSKI PROSTORI

Neka je V neprazan skup, F polje, $+ : V \times V \to V$, $\cdot : F \times V \to V$. Uredjena četvorka $(V, +, \cdot, F)$ je vektorski prostor ako za svako $x, y \in V$ i svako $\alpha, \beta \in F$ važi:

(V_1) $(V, +)$ je Abelova grupa,
(V_2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,
(V_3) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,
(V_3) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$,
(V_4) $1 \cdot x = x$.

U tom slučaju elementi skupa V se zovu vektori, a elementi polja F skalari, operacija $+$ sabiranje vektora, a funkcija $\cdot$ množenje vektora skalarom. Neutralni u grupi $(V, +)$ ćemo označavati sa 0_V ili samo 0 i zvati nula vektor, a inverzni elementa x u ovoj grupi ćemo označavati sa $-x$ i zvati suprotan vektor od x.

Ako je $F = R$ reći ćemo da je vektorski prostor V realni vektorski prostor, a ako je $F = C$ kompleksni vektorski prostor.

U vektorskom prostoru $(V, +, \cdot, F)$ za svako $x \in V$ i svako $\alpha \in F$ važi:
(1) $\alpha x = 0 \iff \alpha = 0 \vee x = 0$,
(2) $\alpha(-x) = -(\alpha x) = (-\alpha)x$.

Znak $\cdot$ ćemo često izostaviti, tj. umesto $\alpha \cdot x$ pisaćemo αx.

ZADACI

1. Neka je $n \in N$ i R polje realnih brojeva i neka su sabiranje elemenata iz R^n i množenje elemenata iz R^n realnim brojevima definisani na sledeći način:
$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$
(za svako $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$, $\alpha \in R$)
Pokazati da je $(R^n, +, \cdot, R)$ vektorski prostor.

2. Neka je $(F, +, \cdot, 0, 1)$ polje i E njegovo potpolje, tj. $E \subset F$ takav da je $(E, +, \cdot, 0, 1)$ polje. Dokazati da je $F_E = (F, +, \cdot, E)$ vektorski prostor, gde su $+$ i $\cdot$ operacije iz polja F.

3. Neka je R^N skup svih realnih nizova, Ako je sabiranje u R^N definisano sa
$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$ (za $(a_1, a_2, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots) \in R^N$),
a množenje elemenata iz R^N realnim brojevima sa
$\alpha(a_1, a_2, \ldots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$ (za $\alpha \in R$, $(a_1, a_2, \ldots) \in R^N$),
onda je $(R^N, +, \cdot, R)$ vektorski prostor.

4. Neka je $R_n[x]$ skup svih polinoma po x stepena manjeg ili jednakog n $(n \in N)$ sa realnim koeficijentima, tj. $R_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n | a_0, \ldots, a_n \in R\}$. Neka su sabiranje na $R_n[x]$ i množenje elemenata iz $R_n[x]$ realnim brojevima definisani sa
$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$,
$\alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \ldots (\alpha a_n)x^n$,
(za svako $\alpha \in R, a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n, b_0 + \cdots + b_nx^n \in R_n[x]$).
Dokazati da je $(R_n[x], +, \cdot, R)$ vektorski prostor.

5. Neka je $X \neq \emptyset$, $R^X = \{f | f : X \to R\}$ i neka su sabiranje u R^X i množenje elemenata iz R^X realnim brojevima definisani na sledeći način:
za $f, g \in R^X$ neka je $f + g : X \to R$ tako da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in X$,
za $f \in R^X$ i $\alpha \in R$ neka je $(\alpha f) : X \to R$ tako da $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in X$.
Dokazati da je $(R^X, +, \cdot, R)$ vektorski prostor.

6. Neka je $R^+ = \{x \in R | x > 0\}$. Dokazati da je $(R^+, \oplus, \odot, R)$ vektorski prostor, ako su $\oplus$ i $\odot$ definisani na sledeći način
$a \oplus b = ab$, $\quad \alpha \odot a = a^\alpha$, za $a, b \in R^+$, $\alpha \in R$.

7. Dokazati da $(R^2, +, \cdot, R)$ nije vektorski prostor, ako je $+$ i $\cdot$ definisano sa
(a) $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$, $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$,
(b) $(x, y) + (z, t) = (x, y)$, $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$,
(c) $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$, $\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$,

(d) $(x,y)+(z,t)=(x+z,y+t),\ \alpha(x,y)=(\alpha x,0)$.

8. Dokazati da je aksioma komutativnosti sabiranja vektora posledica ostalih aksioma vektorskog prostora.

VEKTORSKI POTPROSTORI

Neka je $(V,+,\cdot,F)$ vektorski prostor. Podskup U skupa V je vektorski potprostor prostora V ako je $(U,+,\cdot,F)$ vektorski prostor (gde su $+$ i $\cdot$ nasledjeni iz V).

Teorema. Neprazan podskup U skupa V je potprostor prostora $(V,+,\cdot,F)$ ako važi

$(\forall\alpha,\beta\in F)(\forall x,y\in U)\ \alpha x+\beta y\in U$.

Vektorski prostor V ima bar dva potprostora: $\{0\}$ i V. Ovi potprostori se zovu trivijalni potprostori.

ZADACI

1. Da li su sledeći podskupovi i potprostori odgovarajućih vektorskih prostora
   (a) $W=\{(a,b,0)|a,b\in R\}$, R^3,
   (b) $W=\{(a,b,c,d)|a+b=c+d\}$, R^4,
   (c) $W=\{(a,b,c)|a+b=1\}$, R^3,
   (d) $W=\{(a,b,c)|a+b+c=0,\ a,b,c\in R\}$, R^3,
   (e) $W=\{(x_1,\dots,x_n)|x_i\in Z, i=1,\dots,n\}$, R^n,
   (f) $W=\{$ konvergentnih realnih nizova $\}$, R^N,
   (g) $W=\{f\in R^R|3f(0)=2f(1)\}$, R^R,
   (h) $W=\{f\in R^R|f(-x)=-f(x), x\in R\}$, R^R.

2. Neka su U_1 i U_2 potprostori vektorskog prostora $(V,+,\cdot,F)$. Pokazati:
   (a) Presek potprostora U_1 i U_2 je potprostor prostora V.
   (b) Unija potprostora U_1 i U_2 je potprostor prostora V ako i samo ako je jedan od njih sadržan u drugom.

LINEARNI POKRIVAČ (LINEAL) SKUPA VEKTORA

Neka su $x_1,\dots x_n$ vektori vektorskog prostora $(V,+,\cdot,F)$. Kažemo da je vektor x linearna kombinacija vektora $x_1,\dots,x_n$ ako postoje skalari $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ takvi da je $x=\alpha_1x_1+\dots\alpha_nx_n$.

Neka je $(V,+,\cdot,F)$ vektorski prostor i $S\subset V$. Skup svih konačnih linearnih kombinacija vektora iz S se zove linearni omotač (lineal) skupa S i obeležava sa $L(S)$. Dakle,

$$L(S)=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n|n\in N,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F,x_1,\dots,x_n\in V\}.$$

$L(S)$ je najmanji potprostor prostora V koji sadrži skup S.

Ako je $L(S)=V$ kažemo da skup S generiše prostor V.

ZADACI

1. Ispitati da li vektor $x=(0,1,4)$ pripada $L\{a=(1,2,4),\ b=(-2,3,-1),\ c=(3,-2,4)\}$.

2. Pokazati $L\{(1,2,3),\ (0,1,2),\ (0,0,1)\}=R^3$.

3. Odrediti uslov koji zadovoljavaju $a,b,c\in R$ ako $(a,b,c)\in L\{(2,1,0),\ (1,-1,2),\ (0,3,-4)\}$.

4. Ispitati da li je $L\{p=x^2+x,\ q=x^2-1,\ r=x+1\}=R_2[x]$.

5. Ako je $(V,+,\cdot,F)$ vektorski prostor, S neprazan podskup od V i $a\in L(S)$ pokazati da je $L(S)=L(S\cup\{a\})$.

SUMA VEKTORSKIH POTPROSTORA

Neka su U_1 i U_2 potprostori vektorskog prostora V. Skup $U_1+U_2=\{x+y|x\in U_1,y\in U_2\}$ se zove suma prostora U_1 i U_2.

Teorema. Suma U_1+U_2 potprostora U_1 i U_2 je potprostor vektorskog prostora V.

Suma potprostora U_1 i U_2 je direktna ako je $U_1\cap U_2=\{0\}$, obeležava se sa $U_1\oplus U_2$.

Teorema. $V=U_1\oplus U_2$ akko se svaki element $x\in V$ može na jedinstven način prikazati kao zbir jednog vektora iz U_1 i jednog vektora iz U_2, tj.

$$(\forall x \in V)(\exists_1 y \in U_1)(\exists_1 z \in U_2)\ x = y + z.$$

U tom slučaju se y i z zovu projekcije vektora x na potprostore U_1 i U_2 i obeležavaju $y = pr_{U_1}x,\ z = pr_{U_2}x$.

Neka su $U_1, \dots, U_n$ potprostori vektorskog prostora V. Tada

$$U_1 + \cdots + U_n = \{x_1 + \cdots + x_n | x_i \in U_i, i = 1, \dots, n\}$$

se zove suma potprostora $U_1, \dots, U_n$. Suma $U_1 + \cdots + U_n$ je direktna akko važi

$$U_i \cap (U_1 + \dots U_{i-1}) = \{0\},\ 2 \leq i \leq n.$$

ZADACI

1. Neka je $W_1 = \{(a, a, a) | a \in R\}$ i $W_2 = \{(0, b, c) | b, c \in R\}$. Dokazati da je $R^3 = W_1 \oplus W_2$.

2. Ako je $W_1 = L\{(1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1)\}$, $W_2 = L\{(-1, -1, 1, -1), (2, 2, 0, 1)\}$ pokazati da je $R^4 = W_1 \oplus W_2$ i naći $pr_{W_1}(4, 2, 4, 4)$.

3. Ako je $W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ i $W_2 = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 = \cdots = x_n\}$ pokazati $R^n = W_1 \oplus W_2$ i naći projekcije jediničnih vektora $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\ \ (i = 1, \dots, n)$ na W_1 i W_2.

4. Ako je $W_1 = \{f \in R^R | f(-x) = f(x),\ x \in R\}$ i $W_2 = \{f \in R^R | f(-x) = -f(x),\ x \in R\}$ pokazati $R^R = W_1 \oplus W_2$ i naći projekcije vektora $f \in R^R,\ f(x) = e^x + \sin x$, na W_1 i W_2.