GRUPE

Definicija. Monoid u kome su svi elementi inverzibilni se zove grupa.

Ili, imajući u vudu definiciju monoida:

Definicija. Algebra $(G, *, ^{-1}, e)$, gde $* : G^2 \to G$, $^{-1} : G \to G$, $e \in G$, je grupa akko važi:

(G_1) $(x * y) * z = x * (y * z)$,

(G_2) $x * e = x$,

(G_3) $x * x^{-1} = e$, $(x, y, z \in G)$.

Definicija. Grupa $(G, *, ^{-1}, e)$ je Abelova akko je operacija $*$ komutativna.

U grupi $(G, *, ^{-1}, e)$ važi:

- $e * x = x$,
- $x^{-1} * x = e$,
- neutralni element e je jedinstven,
- za svako $x \in G$ inverzni x^{-1} je jedinstven,
- $(x^{-1})^{-1} = x$,
- $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

Definicija. Za svako $a \in G$ i svako $n \in N$ definišemo

$$a^0 := e, \;\; a^{-n} := (a^{-1})^n.$$

Dakle, u grupi je definisano a^k za svako $a \in G$ i svako $k \in Z$.

Definicija. Neprazan podskup H skupa G je podgrupa grupe $(G, *, ^{-1}, e)$ (oznaka $H < G$) akko važi:

1. $(\forall x, y \in H)\ x * y \in H$,
2. $e \in H$,
3. $(\forall x \in H)\ x^{-1} \in H$.

Svaka grupa $(G, *, e)$ ima bar dve podgrupe - $\{e\}$ i G koje se nazivaju trivijalnim podgrupama.

Definicija. Red grupe G, u oznaci $r(G)$ ili $o(G)$, je broj elemenata skupa G. Dakle, $r(G) := |G|$.

Teorema (Lagrange) Red svake podgrupe konačne grupe deli red te grupe.

DEFINICIJA. Preslikavanje $f : G \to H$ je homomorfizam grupe $(G, *, e_G)$ u grupu $(H, \diamond, e_H)$ akko važi $f(x * y) = f(x) \diamond f(y)$, za svako $x, y \in G$.

U tom slučaju važi :

$f(e_G) = e_H$,

$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, za svako $x \in G$.

DEFINICIJA. Ako je $f : G \to H$ homomorfizam grupe G u grupu H onda se skup $kerf = \{x \in G | f(x) = e_H\}$ se zove jezgro homomorfizma f, a skup $Imf = \{f(x) | x \in G\}$ slika homomorfizma f.

Primeri:

- $(Z, +, 0)$, $(Q, +, 0)$ $(R, +, 0)$ - aditivne grupe,
- $(Q \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$,
- $(nZ, +, 0)$, gde je $nZ = \{0, \pm n, \pm 2n, \ldots\}$ za dato $n \in N$,
- $(Z_n, +_n, 0)$,
- $(Z_n \setminus \{0\}, \cdot_n)$ je grupa akko je n prost broj,
- $(M_n(R), +)$,
- $(G, \cdot)$ gde je $G = \{A \in M_n(R) | det(A) \neq 0\}$,
- $(Sim(S), \circ)$. Specijalno, za $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, skup $Sim(S)$ označavamo sa S_n i grupu $(S_n, \circ)$ zovemo simetričnom grupom stepena n.

  $$S_3 = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \right.$$
  $$\left. \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

  $$\begin{array}{c|cccccc} \circ & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \hline \sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \sigma_2 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_1 \\ \sigma_3 & \sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_2 & \tau_3 & \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_1 & \tau_1 & \tau_3 & \tau_2 & \sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_2 \\ \tau_2 & \tau_2 & \tau_1 & \tau_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_3 \\ \tau_3 & \tau_3 & \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{array}.$$

- Neka je P_n pravilni $n-$tougao u ravni E i D_n skup svih izometrija $\mathcal{I}$ ravni E takvih da je $\mathcal{I}(P_n) = P_n$, tada $(D_n, \circ)$ je grupa. Ova grupa se zove diedarska grupa stepena n. $D_3 = \{1_E, \mathcal{R}_{120^\circ}, \mathcal{R}_{240^\circ}, \mathcal{S}_p, \mathcal{S}_q, \mathcal{S}_r\}$, gde je $\mathcal{R}_\alpha$ rotacija oko centra trougla za ugao α, a $\mathcal{S}_p, \mathcal{S}_q, \mathcal{S}_r$ osne simetrije u odnosu na simetrale p, q i r stranica AB, BC i AC trougla ABC. Tablica grupe D_3:

$\circ$	1_E	$\mathcal{R}_{120^\circ}$	$\mathcal{R}_{240^\circ}$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_r$
1_E	1_E	$\mathcal{R}_{120^\circ}$	$\mathcal{R}_{240^\circ}$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_r$
$\mathcal{R}_{120^\circ}$	$\mathcal{R}_{120^\circ}$	$\mathcal{R}_{240^\circ}$	1_E	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_p$
$\mathcal{R}_{240^\circ}$	$\mathcal{R}_{240^\circ}$	1_E	$\mathcal{R}_{120^\circ}$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_q$
$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_q$	1_E	$\mathcal{R}_{240^\circ}$	$\mathcal{R}_{120^\circ}$
$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{R}_{120^\circ}$	1_E	$\mathcal{R}_{240^\circ}$
$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{R}_{240^\circ}$	$\mathcal{R}_{120^\circ}$	1_E

.

- $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ i operacija $\cdot$ je zadata tablicom

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Grupa $(Q_8, \cdot)$ se zove grupa kvaterniona.

ZADACI

1. Date su funkcije $f_1, f_2, f_3, f_4 : R \setminus \{0\} \to R$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$. Dokazati da je $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ grupa.

2. Da li je skup $G = \{f_{a,b} | a, b \in R\}$, gde je $f_{a,b} : R \to R$, $f_{a,b}(x) = ax + b$, grupa u odnosu na operaciju $\circ$?

3. Ako je $G' = \{f_{a,b} | a \neq 0\}$ ($f_{a,b}$ kao u prethodnom zadatku) i $F : G' \to G'$, $F(f_{a,b}) = f_{a,0}$, pokazati da je F homomorfizam i odrediti $kerF$.

4. Pokazati da je $(G, *)$ grupa akko je semigrupa i kvazigrupa.

5. Neka je $(G, *)$ konačna semigrupa. Pokazati da je $(G, *)$ grupa akko važe zakoni kancelacije.

6. Dokazati da za proizvoljne elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ grupe $(G, *)$ važi $(a_1 * a_2 * \ldots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \ldots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$.

7. Neka je $(G, *)$ grupa, $a, b \in G$, $m, n \in Z$. Tada važi:

(1) $a^m * a^n = a^{m+n}$,

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$,

(3) $(a * b * a^{-1})^n = a * b^n * a^{-1}$,

(4) $a * b = b * a \Longrightarrow (a * b)^n = a^n * b^n$.

8. Pokazati da je grupa $(G, *)$ Abelova akko $(a * b)^2 = a^2 * b^2,\ a, b \in G$.

9. Pokazati da je grupa $(G, *)$ Abelova akko je preslikavanje $f : G \to G$, dato sa $f(x) = x^{-1}$ automorfizam.

10. Pokazati:

(a) Presek familije podgrupa grupe $(G, *)$ je takođe podgrupa grupe $(G, *)$.

(b) Unija dve podgrupe grupe $(G, *)$ je podgrupa grupe $(G, *)$ akko je jedna od njih sadržana u drugoj.

(c) Ako su H i K podgrupe grupe $(G, *)$ tada važi: $H * K$ je podgrupa grupe G akko $H * K = K * H$.

11. Neka je $(G, *)$ grupa i preslikavanje $f : G \to G$ dato sa $f(x) = x^3$ monomorfizam. Pokazati da je grupa G Abelova.

12. Neka je $(G, *, e)$ grupa i H neprazan konačan podskup od G. Pokazati da je H podgrupa grupe G akko $H * H = H$.

GENERATORI GRUPE

Neka je $(G, *, e)$ grupa i $X \subset G$. Presek svih podgrupa grupe G koje sadrže skup X je takođe podgrupa grupe G i to najmanja (u smislu inkluzije) koja sadrži X. Ova podgrupa se zove podgrupa generisana skupom X i obeležava $< X >$. Dakle,

Definicija. Podgrupa

$$< X > := \bigcap \{H | H < G, X \subset H\}$$

grupe $(G, *)$ se zove podgrupa generisana skupom X. Skup X se zove skup generatora grupe $< X >$. Ako je $G =< X >$ kažemo da skup X generiše grupu G.

Specijalno je $< \emptyset >= \{e\}$ i $< G >= G$.

Teorema. Neka je $(G, *, e)$ grupa i $\emptyset \neq X \subset G$. Tada

$$< X >= \{x_1^{\alpha_1} * \ldots * x_n^{\alpha_n} | n \in N, x_1, \ldots, x_n \in X, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Z\}.$$

Specijalno, za $X = \{a\}$ je $< a >= \{a^k | k \in Z\}$.

Definicija. Podgrupa $< a >$ grupe $(G, *)$ se zove ciklična podgrupa generisana elementom $a \in G$.

Primeri: $(Z, +) =< 1 >=< -1 >$, $(Z_n, +_n) =< 1 >$.

ZADACI

1. Dokazati da je (a) $(Z_5, +_5) =< 1 >=< 2 >=< 3 >=< 4 >$,

(b) $(Z_6, +_6) =< 1 >=< 5 >$.

2. Dokazati da je $S_3 =< \sigma_2, \tau_1 >$.

3. Ako je $\rho = \mathcal{R}_{120^\circ}$ i $\sigma = \mathcal{S}_p$ dokazati da je $D_3 =< \rho, \sigma >$.

4. Ako je $\rho = \mathcal{R}_{90^\circ}$ (rotacija oko centra kvadrata za 90°) i $\sigma = \mathcal{S}_p$ (osna simetrija u odnosu na simetralu jedne stranice), pokazati da je $D_4 =< \rho, \sigma >$.

5. Neka su $f, g : A \to B$ homomorfizmi grupe $(A, *)$ u grupu $(B, \diamond)$ i neka je $A =< X >$. Ako je $f(x) = g(x)$ za svako $x \in X$, dokazati da je $f(a) = g(a)$ za svako $a \in G$.

6. Neka je $(G, *, e)$ konačno generisana Abelova grupa sa skupom generatora $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dokazati da je $G = \{x_1^{\alpha_1} * \ldots * x_n^{\alpha_n} | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Z\}$.