# LINEARNA PRESLIKAVANJA VEKTORSKIH PROSTORA

Definicija. Preslikavanje $f : V \to U$ je linearno preslikavanje (homomorfizam) vektorskog prostora $(V, +, \cdot, F)$ u vektorski prostor $(U, \oplus, \odot, F)$ ako važi:

1. $f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \quad (x, y \in V)$,
2. $f(\alpha \cdot x) = \alpha \odot f(x) \quad (x \in V, \alpha \in F)$.

Uslovi 1. i 2. su ekvivalentni uslovu

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \odot f(x) \oplus \beta \odot f(y) \quad (x, y \in V, \alpha, \beta \in F).$$

Jezgro i slika linearnog preslikavanja $f$ se definišu na sledeći način:

$ker f := \{x \in V | f(x) = 0\}$ -jezgro, $\quad Im f := \{f(x) | x \in V\}$ -slika.

Ako je $f : V \to U$ linearno preslikavanje vektorskih prostora, onda

1. $f(0_V) = 0_U$,
2. $ker f$ je potprostor prostora $V$,
3. $Im f$ je potprostor prostora $U$,
4. $f$ je 1-1 akko $ker f = \{0_V\}$.

Teorema. Ako je $f : V \to U$ linearno preslikavanje konačno dimenzionih vektorskih prostora, onda važi $dim(ker f) + dim(Im f) = dim V$.

Linearno preslikavanje koje je bijekcija se zove izomorfizam.

Osnovna teorema linearne algebre. Ako je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza vektorskog prostora $(V, +, \cdot, F)$ i $u_1, \ldots, u_n$ proizvoljni vektori prostora $(U, +, \cdot, F)$, tada postoji jedinstveno linearno preslikavanje $f : V \to U$ sa osobinom $f(v_i) = u_i$, za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$.

## ZADACI

1. Pokazati da je preslikavanje $f : R^{n+1} \to R_n[x]$ definisano sa $f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ izomorfizam.

2. Ispitati da li su sledeća preslikavanja vektorskih prostora linearna:

(a) $f : R^3 \to R^3,\ f(x, y, z) = (x, y, 0)$,

(b) $f : R^3 \to R^2,\ f(x, y, z) = (9x - 2y + 3z, 2x - z)$,

(c) $f : R^2 \to R^2,\ f(x, y) = (1 + x, y)$,

(d) $f : R^2 \to R^2,\ f(x, y) = (x^2, y)$,

(e) $f : V \to V,\ f(x) = 0$,

(f) $f : V \to V,\ f(x) = x,$

(g) $f : R_n[x] \to R_{n-1}[x],\ f(p) = p'.$

(h) $f : R_n[x] \to R_n[x],\ f(p) = p(-x).$

3. Pokazati da je preslikavanje $f : R^2 \to R^3$ dato sa $f(x, y) = (x + y, x - y, x)$ linearno i odrediti po jednu bazu i dimenziju potprostora $kerf$ i $Imf$.

4. Ako je $f : R^4 \to R^3$ dato sa $f(x, y, z, u) = (x-y+z+u, x+2z-u, x+y+3z-3u)$ odrediti po jednu bazu i dimenziju potprostora $kerf$ i $Imf$.

5. Ako je linearno preslikavanje $f : R^2 \to R^2$ određeno sa $f(1, 2) = (3, 4),\ f(0, 1) = (3, 1)$ nači $f(x, y)$.

6.Dokazati da je sa $f(-1, 0, 2) = (1, 5, 2),\ f(0, 1, -1) = (2, 6, 8),\ f(1, 2, 0) = (-1, 3, 6)$ definisano jedinstveno linearno preslikavanje prostora $R^3$ u isti taj prostor, pa naći $f(x, y, z)$.

7. Odrediti linearno preslikavanje : $R^3 \to R^3$ za koje je $Imf = \mathcal{L}\{(1, 2, 3)\}$,

8. Odrediti linearno preslikavanje : $R^3 \to R^4$ za koje je $Imf = \mathcal{L}\{(1, 2, 0, -4), (2, 0, -4, -3)\}$.

9. Neka je $S = \{a, b, c\}$ i neka su $\chi_a, \chi_b, \chi_c : S \to R$ karakteristične funkcije. Pokazati da je sa $f(\chi_a) = x+x^2,\ f(\chi_b) = -x,\ f(\chi_c) = 1-x^2$ definisano jedinstveno linearno preslikavanje $f : R^S \to R_2[x]$, pa naći $f(\varphi)$, gde je $\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.