RED ELEMENTA GRUPE. CIKLIČNE GRUPE.

Definicija. Red elementa a grupe $(G,*,e)$ je najmanji prirodni broj n takav da je $a^n = e$, ukoliko takvo n postoji. U suprotnom, element a je beskonačnog reda. Red elementa a obeležavamo sa $r(a)$ ili $o(a)$. Dakle,

$$r(a) = \begin{cases} \min\{n \in N | a^n = e\}, & (\exists n \in N) a^n = e \\ \infty, & (\forall n \in N) a^n \neq e \end{cases}.$$

Definicija. Grupa $(G,*)$ je ciklična ako postoji element a tako da je

$$G = < a > = \{a^k | k \in Z\}.$$

Cikličnu grupu reda n obeležavamo sa C_n, a beskonačnu cikličnu grupu sa C_∞.

ZADACI

1. Naći red elementa

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ u grupi $(S_3, \circ)$,

(b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ u grupi $(S_5, \circ)$,

(c) 2 u grupama $(Z, +)$, $(Z_5, +_5)$ i $(Z_6, +_6)$.

2. Pokazati da u svakoj grupi $(G,*)$ važi:

(a) $r(a) = r(a^{-1})$, za svako $a \in G$;

(b) $r(a) = r(b * a * b^{-1})$, za svako $a, b \in G$;

(c) $r(a * b) = r(b * a)$, za svako $a, b \in G$.

3. Ako u grupi postoji tačno jedan element reda 5, pokazati da taj element pripada centru grupe.

(Centar grupe $(G,*)$ je skup svih elemenata grupe koji komutiraju sa svakim elementom te grupe, tj. $C(G) := \{a \in G | (\forall x \in G) a * x = x * a\}$.)

4. Ako u grupi $(G,*)$ svaki element, osim neutralnog, ima red 2, pokazati da je $(G,*)$ Abelova grupa.

5. Neka je $r(a) = n$ u grupi $(G,*,e)$. Dokazati da za svako $k, l \in Z$ važi:

(a) $a^k = a^{rest_n k}$,

(b) $a^k = e \Longleftrightarrow n | k$,

(c) $a^k * a^l = a^{k +_n l}$,

(d) $(a^k)^l = a^{k \cdot_n l}$.

6. Ako je $f : (G, *) \to (H, \diamond)$ homomorfizam grupa i $a \in G$ element konačnog reda, pokazati:

(a) $r(f(a))|r(a)$; (b) Ako je f izomorfizam onda $r(f(a)) = r(a)$.

7. Neka je $(G, *, e)$ grupa i $a \neq e$ proizvoljan eelement konačnog reda. Dokazati da je $r(a) = r(< a >)$.

8. Konačna grupa reda n je ciklična akko sadrži element reda n.

9. Red svakog elementa grupe deli red te grupe.

10. Ako je red grupe prost broj onda je ona ciklična i svaki njen element, osim neutralnog, je generator.

11. Neka je $(G, *)$ grupa i $a \in G$ element reda n. Odrediti red elementa $a^k,\ k \in N$.

12. Naći sve elemente reda m u cikličnoj grupi C_n ako je

(a) $n = 24,\ m = 6,$ (b) $n = 100,\ m = 20.$

13. U cikličnoj grupi $C_n =< a >$ element a^m je generator akko su m i n uzajamno prosti brojevi. Dokazati.

14. Neka je $(G, *)$ ciklična grupa. Pokazati da je preslikavanje $f : G \to G$ endomorfizam akko $f(x) = x^k$, za svako $x \in G$, gde je k fiksiran ceo broj.

15. Odrediti sve neizomorfne grupe reda 4.

16. (a) Pokazati da je svaka ciklična grupa reda n izomorfna grupi $(Z_n, +_n)$.

(b) Dokazati da je svaka beskonačna ciklična grupa izomorfna grupi $(Z, +)$.

17. Ako su u konačnoj grupi svi elementi osim neutralnog reda 2, dokazati da je red te grupe stepen broja 2.

18. Dokazati da svaka beskonačna grupa ima beskonačno mnogo cikličnih podgrupa.

19. Svaka podgrupa ciklične grupe je ciklična. Dokazati.

20. Odrediti sve podgrupe grupe $(Z, +)$.

21. Dokazati da za svaki delilac $d \in N$ broja n ciklična grupa C_n ima jedinstvenu podgrupu reda d.

22. Ako su $C_2 = \{a, a^2 = e_1\}$ i $C_3 = \{b, b^2, b^3 = e_2\}$ ciklične grupe reda 2 i 3 naći $C_2 \times C_3$.