NORMALNE PODGRUPE

Ako je H podgrupa grupe $(G,*)$ i $x \in G$ onda se skup $x*H$ $(H*x)$ zove levi (desni) koset podgrupe H koji sadrži element x.

Definicija. Podgrupa H grupe $(G,*)$ je normalna (oznaka $H \triangleleft G$) akko

$$(\forall x \in G)\ x*H = H*x.$$

Očigledno, sve podgrupe Abelove grupe su normalne. Takođe, trivijalne podgrupe bilo koje grupe su normalne podgrupe.

Definicija. Relacija ekvivalencije $\sim$ skupa G je kongruencija grupe $(G,*,^{-1},e)$ akko važi:

(1) $(\forall a,b,c,d \in G)(a \sim c \wedge b \sim d \Longrightarrow a*b \sim c*d)$,

(2) $(\forall a,b \in G)(a \sim b \Longrightarrow a^{-1} \sim b^{-1})$.

Teorema. Ako je H normalna podgrupa grupe $(G,*)$ onda je $(G/H,\diamond)$ grupa, gde je

$G/H = \{x*H | x \in G\}$ (skup levih koseta podgrupe H),

a operacija $\diamond$ definisana sa

$x*H \diamond y*H = (x*y)*H.$

Neutralni element ove grupe je $H = e*H$, a inverzni element koseta $x*H$ je koset $x^{-1}*H$. Ova grupa se zove količnička ili faktor grupa grupe G po podgrupi H.

ZADACI

1. Ako je $H < G$ dokazati da su sledeće relacije skupa G relacije ekvivalencije i naći klase ekvivalencije:

(a) $x \sim_D y \Longleftrightarrow x*y^{-1} \in H$, (b) $x \sim_L y \Longleftrightarrow x^{-1}*y \in H$ $(x,y \in G)$.

2. Neka je $(G,*)$ grupa i $H < G$. Dokazati da važi:

(a) $H*x = H \Longleftrightarrow x \in H \Longleftrightarrow H*x = H.$

(b) $|H| = |H*x| = |x*H|,\ x \in G.$

(c) Broj levih koseta podgrupe H u grupi G jednak je broju desnih koseta podgrupe H u grupi G, tj. $|\{x*H|x \in G\}| = |\{H*x|x \in G\}|$.

(d) Ako je G konačna grupa, onda $|G/\sim_D| = \frac{r(G)}{r(H)} = |G/\sim_L|$.

3. Odrediti sve kosete podgrupe $4Z$ u grupi $(Z,+)$.

4. Neka je $(G,*)$ grupa. Pokazati: $H \triangleleft G \Longleftrightarrow (\forall x \in G)\ x*H*x^{-1} \subset H$.

5. Neka je $(G, *, ^{-1}, e)$ grupa. Pokazati:

(a) Ako je $H \triangleleft G$ onda je relacija $\sim_L$ kongruencija grupe $(G, *)$.

(b) Ako je $\sim$ kongruencija grupe G, onda je $H = \{x \in G | x \sim e\} \triangleleft G$.

6. Svaka podgrupa indeksa 2 je normalna podgrupa.

7. Ako je $f : A \to B$ homomorfizam grupe $(A, *, e_A)$ u grupu $(B, \diamond, E_B)$ dokazati da je $ker f \triangleleft G$.

8. Ako je $(G, *, ^{-1}, e)$ grupa i $H \triangleleft G$ dokazati da je preslikavanje $\varphi : G \to G/H$ definisano sa $\varphi(x) = x * H,\ x \in G$, epimorfizam. Naći $ker\varphi$.

9. Neka je $f : A \to B$ homomorfizam grupe $(A, *, e_A)$ u grupu $(B, \bullet, e_B)$. Dokazati da je $A/ker f \cong Im f$.

10. Dokazati da je $Q^*/Q^+ \cong Z_2$, gde je $Q^* = Q \setminus \{0\},\ Q^+ = \{x \in Q | x > 0\}$, a operacija na Q^* je množenje.

11. Dokazati da je faktor grupa ciklične grupe po bilo kojoj njenoj podgrupi takođe ciklična grupa.

12. Odrediti sve neizomorfne grupe reda $n \in \{1, 2, \ldots 7\}$.

13. Odrediti sve podgrupe date grupe, ispitati koje od njih su normalne i za one koje jesu odrediti faktor grupe: (a) $(K_4, *)$, (b) $(S_3, \circ)$, (c) $(D_4, \circ)$, (d) $(C_12, *)$, (e) $(Z, +)$, (f) $(Q_8, \cdot)$.