POLINOMI

1. Naći količnik i ostatak deljenja polinoma $p = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ i $q = x^2 + 2x - 3$ sa koeficijentima iz

   (a) R, (b) Z_5.

2. Odrediti NZD realnih polinoma

   (a) $f = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$ i $g = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$,

   (b) $f = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ i $g = x^5 + x^2 - x + 1$,

   (c) $f = x^4 + x^3 - 4x + 5$ i $g = 2x^3 - x^2 - 2x + 2$.

3. Ostaci pri deljenju polinoma p sa $x - 1$, $x - 2$ i $x + 1$ su, redom, 2,3 i 6. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma p sa $(x - 1)(x - 2)(x + 1)$.

4. Odrediti koeficijente a, b i c polinoma $p = x^3 + ax^2 + bx + c$ tako da polinom p bude deljiv sa $x - 1$ i $x + 2$, a da pri deljenju sa $x - 4$ daje ostatak 18.

5. Naći ostatak pri deljenju polinoma $p = x^9 + x^8 + \ldots + x + 1$ sa $x^2 - 1$.

6. Naći ostatak pri deljenju polinoma $x^{2n} + 3x^{2n-1} + 1$, $n \geq 2$, sa $x^3 + 3x^2 - x - 3$.

7. Koristeći Hornerovu šemu izračunati $p(4)$ ako je $p = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$.

8. Koristeći Hornerovu šemu razložiti polinom p po stepenima od $x - c$ ako je

   (a) $p = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $c = -1$,

   (b) $p = x^5$, $c = 1$,

   (c) $p = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 50x + 90$, $c = 2$.

9. Odrediti parametre a i b tako da $x = 1$ bude dvostruka nula polinoma $x^5 + 4x^4 - 18x^3 + ax^2 + bx + 6$. Za tako dobijene vrednosti a i b napisati dati polinom po stepenima od $x - 1$.

10. Dokazati da je polinom $nx^{n+1} - (1 + n\lambda)x^n - (\lambda - 1)(x^{n-1} + \ldots + x) + \lambda$ deljiv sa $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda$, $\lambda \in C$.

11. Dokazati da ni za jedan polinom p sa celim koeficijentima ne važi $p(7) = 5$ i $p(15) = 9$.

12. Ako je $p \in Z[x]$ polinom koji uzima vrednost 5 u pet različitih celih tačaka, pokazati da p nema celobrojnih korena.

13. Za polinom $p = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ sa celobrojnim koeficijentima, pri čemu su a_n i $1 + a_1 + \ldots + a_n$ neparni celi brojevi, pokazati da nema celobrojnih korena.

14. Naći racionalne nule polinoma:

(a) $p = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$,

(b) $p = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 + 26x + 12$,

(c) $p = 2 - 7x + 6x^2 - 3x^3 + 4x^4 + 4x^5$.

15. U polinomu $p = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + mx^2 - 6x + n$ odrediti parametre $m, n \in R$ tako da zajednička nula polinoma $q = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ i $r = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$ bude dvostruka nula polinoma p.

16. Odrediti red korena x_0 polinoma p ako je

(a) $p = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ x_0 = 2$,

(b) $p = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,\ x_0 = -2$.

17. Za koju vrednost parametra a polinom $p = x^5 - ax^2 - ax + 1$ ima koren -1 drugog reda?

18. Za koje a i b polinom $p = ax^{n+1} + bx^n + 1$ je deljiv polinomom $(x-1)^2$?

19. Odrediti sve korene polinoma $p = x^4 + 2ix^3 - 2x^2 - 2ix + 1$.

20. Pokazati da polinom $p = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$ ima samo proste korene.

21. Odrediti a i b ako je poznato da koreni polinoma $x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b$ čine aritmetički niz.

22. Ako su sve nule polinoma $x^3 + ax^2 + bx + c$ realne pokazati da je $a^2 \geq 2b$ i $b^2 \geq 2ac$. Da li su ovi uslovi i dovoljni?

23. Odrediti zbir kvadrata i proizvod kompleksnih korena polinoma

(a) $3x^5 - x^3 + x + 2$, (b) $x^n - ax^{n-1} + b,\ n \geq 3$.

24. Odrediti normirani polinom četvrtog stepena tako da su njegovi koreni kvadrati kompleksnih korena polinoma $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 4$.

25. Ako su a i b koreni polinoma $p = x^3 - x^2 + 3x + 4$ pokazati da je ab koren polinoma $q = x^3 - 3x^2 - 4x - 16$.

26. Naći ostale korene polinoma $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$ ako je jedan koren $1 + i$.

27. Rešiti nad poljem kompleksnih brojeva sistem jednačina:

$$\text{(a)}\ \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\ \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 6 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 &= -4 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= -3 \end{aligned}\ .$$