ZADACI ZA PRIPREMU PRVOG KOLOKVIJUMA IZ LINEARNE ALGEBRE

Vektorski prostori

1. Naći sve vrednosti realnih parametara *a, b, c, d* za koje je skup vektora $\left\{\left(1+\frac{1}{a},1,1,1\right),\left(1,1+\frac{1}{b},1,1\right),\left(1,1,1+\frac{1}{c},1\right),\left(1,1,1,1+\frac{1}{d}\right)\right\}$ baza prostora R^4.

2. Ako je $\{x,y,z\}$ skup linearno nezavisnih vektora realnog vektorskog prostora V ispitati linearnu nezavisnost skupa vektora $\{ax+y+z, x+ay+z, x+y+az\}$, $a\in R$.

3. Neka je V skup nizova koji su rešenja diferencne jednačine $x_{n+1}=(a+3)x_n-3ax_{n-1}$, $a\in R$.
Pokazati da je V potprostor prostora svih realnih nizova R^N i odrediti jednu njegovu bazu.

4. Neka je $V_1=L\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,3,1,3)\}$, $V_2=L\{(1,2,0,2),(1,2,1,2),(3,1,3,1,)\}$. Naći po jednu bazu i dimenziju potprostora V_1, V_2, V_1+V_2 i $V_1\cap V_2$. Ispitati da li je V_1 potprostor od V_2.

5. Ako su x,y,z linearno nezavisni vektori realnog vektorskog prostora V ispitati linearnu nezavisnost skupa vektora $\{\lambda^2x+3y+2z, \lambda x-y+z, y+4z\}$, gde $\lambda\in R$.

6. Ako su x,y,z linearno nezavisni vektori realnog vektorskog prostora V ispitati linearnu nezavisnost skupa vektora $\{x-\lambda y+2z, \lambda x+y-z, x-2y+\lambda z\}$, gde $\lambda\in R$.

7. Neka su $W_1=L\{p=1+2x+3x^2+4x^3, q=2+3x+5x^2+4x^3\}$ i $W_2=L\{r=1+x+x^2+x^3, s=2+2x+3x^2+x^3\}$ potprostori prostora $R_3[x]$. Odrediti po jednu bazu i dimenziju prostora W_1+W_2 i $W_1\cap W_2$. Odrediti za koje $\alpha\in R$ vektor $4-\alpha+2x+(2+\alpha)x^2$ pripada $W_1\cap W_2$.

8. Neka je $f:R^3\to R^3$ definisano sa $f(x,y,z)=(x+2y-3z, 2x+4y-6z, -3x-6y+9z)$. Pokazati da je *f* linearno pa odrediti po jednu bazu i dimenziju prostora ker(*f*) i *Im*(*f*).

9. Ispitati linearnu nezavisnost skupa vektora $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ prostora R^R.

10. Dokazati da za svaki potprostor V_1 konacno dimenzionog prostora *V* postoji potprostor V_2 takav da je $V=V_1\oplus V_2$.

11. Dokazati da je sa $f(-1,0,1)=(2,1,2,-1)$, $f(0,1,1)=(2,6,2,2)$, $f(1,1,1)=(3,9,3,3)$ zadato jedinstveno linearno preslikavanje $f:R^3\to R^4$, pa naći $f(x,y,z)$, $\ker(f)$ I $\mathrm{Im}(f)$.

12. Dokazati da je sa $f(-1,0,1)=2+x+2x^2-x^3$, $f(0,1,1)=2+6x+2x^2+2x^3$, $f(1,1,1)=3+9x+3x^2+3x^3$ zadato jedinstveno linearno preslikavanje $f:R^3\to R^4$, pa naći $f(x,y,z)$, $\ker(f)$ I $\mathrm{Im}(f)$.

13. Neka su $U=L\{(1,0,2,1),(2,-1,5,1+\lambda)\}$ i $W=L\{(1,1,1,0),(0,-2,1+\lambda,2)\}$ vektorski potprostori prostora R^4. Za jednu vrednost parametra $\lambda\in R$ za koju je $\dim(U\cap W)\neq 0$ odreditti dimenziju i po jednu bayu prostora $U, W, U\cap W$ i $U+W$. Ispitati da li vector $(4,0,8,4)$ pripada $U+W$.

14. Neka je U skup svih polinoma sa realnim koeficijentima stepena manjeg od 5 koji su deljivi sa $x-1$. Dokazati da je $(U,+,\cdot,R)$ vektorski prostor, gde je + sabiranje polinoma, a množenje polinoma realnim brojem. Odrediti jednu bazu i dimenziju ovog prostora.

15. Skup vektora $\{x^5+x^4, x^5-2x^3, x^5+3x^2, x^5+x\}$ dopuniti (ukoliko je to moguće) do baze prostora $R_5[x]$.

16. Odrediti jednu bazu i dimenziju potprostora $W=L\{a=(1,2,-1,3), b=(4,1,0,1), c=(6,5,-3,2), d=(10,-1,2,-3)\}$ prostora R^4. Odrediti parametar λ tako da vektor $e=(4-3\lambda, 1+\lambda, -\lambda, 1+2\lambda)$ pripada W.

17. Neka su a,b,c vektori kompleksnog vektorskog prostora V i neka $u=b+c, v=c+a, w=a+b$. Dokazati (a) $L\{a,b,c\}=L\{u,v,w\}$, (b) Vektori a,b,c su linearno nezavisni akko su takvi u,v,w.

Polinomi

1. Rešiti nad poljem kompleksnih brojeva sistem jednačina

$$x+y+z=5$$
$$x^2+y^2+z^2=21.$$
$$x^3+y^3+z^3=89$$

2.U polinomu $p=x^5-8x^4+17x^3+ax^2+bx+16$ odrediti realne parametre a i b tako da zajednička nula polinoma $x^4-4x^3+5x^2-23x+12$ i x^3-3x^2-2x-8 bude dvostruka nula polinoma p..

3.Odrediti $\lambda\in R$ tako da za korene polinoma $x^3-4x^2-x+\lambda$ važi $x_1^2=x_2^2+x_3^2$.

4. U polinomu $p=x^5-5x^4+3x^3+mx^2-6x+n$ odrediti parametre $m,n\in R$ tako da zajednička nula polinoma x^3-2x^2-2x-3 i $x^4-6x^3+10x^2-6x+9$ bude dvostruka nula polinoma p.

5. Polinom $p=x^8-4x^6+16x^4-64x^2+256$ napisati po stepenima od $x-1$.

6. Naći sve nule polinoma p trećeg stepena sa realnim koeficijentima, ako je $P(-i)=-3-3i$, a $P(1-i)=-2-4i$.

7. Odrediti parametre $a,b\in R$ tako da $x=1$ bude dvostruka nula polinoma $x^5+4x^4-18x^3+ax^2+bx+6$ i za tako dobijene parametre napisati dati polinom po stepenima od $x-1$.

8. Naći sve vrednosti realnog parametra a za koje polinom x^5-5x+a ima dvostruke korene.

9. Dat je polinom x^3+px^2+qx+r. Dokazati da je

(a) zbir kvadrata njegovih korena p^2-q

(b) zbir kubova njegovih korena $-p^3+3pq-3r$.

10. Ako su a,b,c koreni polinoma $2x^3-16x^2-123x+16$ dokazati da je $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=1988.$

11. Neka je p polinom stepena n sa celim koeficijentima. Ako su a i b uzajamno prosti prirodni brojevi, takvi da $b\mid p(a)$ i $a\mid p(b)$, tada $ab\mid p(a+b)$.

12. Neka su x_1,x_2,x_3 i x_4 koreni polinoma $f=x^4+px^3+qx^2+rx+s$. Ako je $x_1+x_2=x_3+x_4$, dokayati da je $4pq=p^3+8r$.

13. Naći sve vrednosti $\lambda\in C$ za koje polinom $x^4+\lambda x+3$ ima višestruke korene u pollju C.

14. Nneka je P polinom sa realnim koeficijentima i neka su R_a i R_b ostaci pri deljenju polinoma P sa $x-a$ i $x-b$, redom. Naći ostatak pri deljenju polinoma P sa $(x-a)(x-b)$.

15. Dokazati da su koreni polinoma $f=x^3-2px^2+p^2x-q^2$ kvadrati korena polinoma $g=x^3-px+q$.

16. Rešiti sistem jednačina

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4$$
$$x_1x_2x_3x_4=-1 \qquad .$$
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=2$$

17. Neka su a,b i c koreni polinoma x^3-2x^2+x-1. Konstruisati polinom trećeg stepena čiji koreni su $(2a-3)^2,(2b-3)^2$ i $(2c-3)^2$.

Matrice

1. Neka je $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\in M_2(R)$ i $W=\{X\in M_2(R)\mid AX=XA\}$.
   (b) Pokazati da je *W* potprostor prostora $M_2(R)$.
   (c) Naći jednu bazu i dimenziju od *W*

2. Date su matrice $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 4\\ 0 & -5 & 8\\ 3 & 15 & -1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & 5 & 5\end{bmatrix}$. Dokazati

   (a) $AB=I+B^2$ (b) $A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^{n-2k}$

3. Iyračunati determinantu $D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ a^3 & 1 & a & a^2\\ x & a^3 & 1 & a\\ y & z & a^3 & 1\end{vmatrix}$.

4. Ako je $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ rešiti po X matričnu jednačinu $(A-2I)X=A+I$.

5. Neka su $x_1,x_2,...,x_n$ nenula vektori prostora $(V,+,\cdot,F)$, $f:V\to V$ linearni operator takav da je $f(x_1)=x_1$, $f(x_k)=x_k+x_{k-1}$, za $k\in\{2,3,...,n\}$. Dokazati da su vektori $x_1,x_2,...,x_n$ linearno nezavisni.

6. Izračunati determinante

   (a) $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & 8 & 16\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}0 & x & y & z\\ x & 0 & z & y\\ y & z & 0 & x\\ z & y & x & 0\end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_n\end{vmatrix}$

   (d) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5\end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix}a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 & b_1\\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 & b_2\\ b_3 & b_3 & b_3+a_3 & \dots & b_3 & b_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ b_{n-1} & b_{n-1} & b_{n-1} & \dots & a_{n-1}+b_{n-1} & b_{n-1}\\ b_n & b_n & b_n & \dots & b_n & b_n+a_n\end{vmatrix}$.

7. . Data je matrica $A=\begin{bmatrix}a & 0 & b\\ 0 & c & 0\\ b & 0 & a\end{bmatrix}$.

   (a) Naći rang matriceA
   (b) Ispitati kada postoji A^{-1} i u tom slučaju je naći.

8. Neka je data matrica $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(R)$. Neka su $U=\{X\in M_2(R) \mid A\cdot X = X\cdot A\}$ i $W=\{X\in M_2(R) \mid tr(X)=0\}$.

(a) Dokazati da su U i W potprostori vektorskog prostora $M_2(R)$.

(b) Odrediti po jednu bazu i dimenziju prostora $U, W, U+W$ i $U\cap W$.

9. Dokazati da za svaku kvadratnu matricu A reda n važi $\det(adjA)=(\det A)^{n=1}$. Ako je A regularna naći $adj(adjA)$.

10. Neka je $A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & \lambda \\ -3 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(R)$.

(a) U zavisnosti od $\lambda\in R$ odrediti rang matrice.

(b) Za $\lambda=3$ odrediti A^{-1}.

(c) Za $\lambda=2$ odrediti matricu B i regularne matrice P i Q takve da je $B=PAQ$.

11. Dato je preslikavanje $f: R_2[x]\to R_2[x]$ sa $f(p)=xp'(x+1)+p''$.

(a) Dokazati da je f linearno i odrediti ker$f$ i Im f.

(b) Odrediti matricu $[f]_{e,e}$ preslikavanja f u odnosu na standardnu bazu $e=\{1,x,x^2\}$.

(c) Ako je $s_1=x-x^2$, $s_2=x$, $s_3=-1+x-x^2$ dokazati da je $s=\{s_1,s_2,s_3\}$ baza prostora $R_2[x]$, pa odrediti matrice prelaza iz baze *e* u bazu *s* i iz baze *s* u bazu *e*.

(d) Odrediti $[f]_{s,s}$.

12. U zavisnosti od parametra λ ispitati linearnu zavisnost (u $M_2(R)$) matrica

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \lambda-2 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & \lambda-1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2\lambda & 3 \end{bmatrix}.$$