

AUTOMORFIZMI GRUPA

Skup svih automorfizama grupe $(G, *)$ obeležavaćemo sa $Aut(G)$. Dakle,

$$Aut(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ je izomorfizam}\}.$$

Za $a \in G$ preslikavanje $f_a : G \rightarrow G$ definisano sa $f_a(x) = a * x * a^{-1}$ ($x \in G$) ćemo zvati unutrašnji automorfizam.

Skup svih unutrašnjih automorfizama ćemo označavati sa $Inn(G)$. Dakle,

$$Inn(G) = \{f_a \mid a \in G\}.$$

1. Neka je $(G, *)$ grupa. Pokazati: (a) $(Aut(G), \circ)$ je grupa.
 (b) Za svako $a \in G$ preslikavanje $f_a : G \rightarrow G$, $f_a(x) = a * x * a^{-1}$ je automorfizam.
 (c) $(Inn(G), \circ)$ je normalna podgrupa grupe $(Aut(G), \circ)$.
2. Ako je $(G, *)$ grupa i $F : G \rightarrow Inn(G)$ dato sa $F(a) = f_a$, pokazati da je F homomorfizam i naći $ker F$.
3. Ako je $(G, *)$ grupa i $H < C(G)$ pokazati:
 - (a) $H \triangleleft G$;
 - (b) Ako je G/H ciklična grupa, onda je G Abelova grupa.
4. Pokazati: (a) Ako je $(G, *)$ Abelova grupa, onda je $Inn(G) = \{1_G\}$.
 (b) Ako grupa $(G, *)$ nije Abelova, onda $r(Inn(G)) \geq 4$.
5. Odrediti grupe automorfizama grupa: (a) $(Z, +)$, (b) $(Z_5, +_5)$, (c) $(Z_6, +_6)$,
 (d) $(K_4, *)$, (e) (S_3, \circ) , (f) (D_4, \circ) .
6. Odrediti grupe unutrašnjih automorfizama za grupe: (a) (S_3, \circ) , (b) (D_4, \circ) ,
 (c) (Q_8, \cdot) .