INVERZNA MATRICA

DEFINICIJA. Matrica $A \in M_n(F)$ je regularna akko postoji matrica $B \in M_n(F)$ takva da je $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Matrica B je jedinstvena, naziva se inverzna matrica matrice A i obeležava sa A^{-1}. Dakle,

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

DEFINICIJA. Ako je $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$, $n \geq 2$, matrica $adjA = [A_{ij}]^T$, gde je A_{ij} algebarski kofaktor elementa a_{ij} $(i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\})$, se zove adjungovana matrica matrice A.

STAV. Za svaku matricu $A \in M_n(F)$, $n \geq 2$, važi $A \cdot adjA = detA\, I_n$.

STAV. Matrica $A \in M_n(F)$ je regularna akko $detA \neq 0$. Tada važi

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA.$$

Elementarne operacije na vrstama (kolonama) matrice A su:

v_{ij} (k_{ij}) - zamena mesta i-te i j-te vrste (kolone),

v_i^α (k_i^α) $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, - množenje i-te vrste (kolone) nenula skalarom α,

v_{ij}^α (k_{ij}^α) - dodavanje i-toj vrsti (koloni) i-te vrste (kolone) pomnožene skalarom α.

Matrica A tipa $m \times n$ je $v(k)-$ekvivalentna matrici B istog tipa (pišemo $A \sim B$) akko se B dobija iz A primenom konačnog niza elementarnih operacija vrsta (kolona). Matrica A je ekvivalentna matrici B ako se B dobija iz A primenom konačnog niza elementarnih operacija vrsta ili kolona.

STAV. Svaka nenula matrica A tipa $m \times n$ je ekvivalentna nekoj blok matrici oblika $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, gde je I_r jedinična matrica reda r $(r \leq m, n)$.

Blok matrica iz prethodnog stava se zove normalna (kanonična) forma matrice A.

Matrice koje se dobijaju primenom elementarnih operacija na vrstama (kolonama) jedinične matrice nazivaju se elementarne $v(k)-$ matrice. Zajedno, ove matrice se zovu elementarne matrice. Pokazuje se da $v(k)-$ operacija na nekoj matrici ima isti efekat kao množenje te matrice sa leve (desne) strane elementarnom matricom dobijenom iz jedinične tom $v(k)-$ operacijom.

STAV. Neka su A i B matrice tipa $m \times n$. Tada $A \sim B$ akko postoje regularne matrice P i Q takve da je $A = PBQ$.

STAV. Matrica $A \in M_n(F)$ je regularna akko je $v(k)-$ ekvivalentna matrici I_n .

Matrica $A \in M_n(F)$ je regularna akko postoje elementarne $v-$ matrice $E_1, \ldots, E_k$ takve da je $I = E_k \ldots E_1 A$, odakle je $A^{-1} = E_k \ldots E_1 I$, pa se inverzna matrica dobija iz I primenom istih elementarnih operacija i istim redom kao kada se od A

dobija I. Iz ove činjenice sledi postupak za dobijanje inverzne matrice: na blok matrici $[A|I]$ vršimo operacije na vrstama sve dok ne dobijemo blok matricu $[B|C]$ gde je B oblika $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r \leq n$. Ako je $B = I_n$ (tj. nema nula vrstu) onda je $A^{-1} = C$. Ako $B \neq I_n$ (tj. ima bar jednu nula vrstu) onda je matrica A singularna.

ZADACI

1. Odrediti A^{-1} ako je: (a) $A = \begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ rešiti matričnu jednačinu $AX - I = 2X + A$.

3. Za matricu $A = [a_{ij}] \in M_n(R)$, gde je $a_{ij} = \min\{i, j\}$, odrediti A^{-1}.

4. Ako je A regularna matrica za koju je $A^n + A^{n-1} + \ldots + A + I = 0$, za neko $n \in N$, dokazati da je $A^{-1} = A^n$.

5. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica oblika

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (t \in R).$$

   (a) Ako $p, q \in R$ ispitati da li $A(p)A(q) \in \mathcal{M}$.

   (b) Naći inverznu matricu matrice $A(t)$, $t \in R$.

   (c) Odrediti $(A(t))^k$, $k \in Z$.

RANG MATRICE

Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(F)$. Tada se potprostor

$$A_{1\times n} = \mathcal{L}\{[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}], \ldots, [a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}]\}$$

prostora $M_{1\times n}(F)$ zove prostor vrsta matrice A. Potprostor

$$A_{m\times 1} = \mathcal{L}\{[a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}], \ldots, [a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}]\}$$

prostora $M_{m\times 1}(F)$ se zove prostor kolona matrice A.

Stav. Za svaku matricu $A \in M_{m\times n}(F)$ važi:

$$dim(A_{1\times n}) = dim(A_{m\times 1}),$$

tj. dimenzija prostora vrsta jednaka je dimenziji prostora kolona.

Definicija. Rang matrice A je dimenzija prostora vrsta, odnosno prostora kolona matrice A i obeležava se sa $rang(A)$. Dakle,

$$rang(A) := dim(A_{1\times n}) = dim(A_{m\times 1}).$$

Opisno rečeno, matrica je stepenasta po vrstama ako je broj nula na početku svake vrste (pre prvog nenula elementa) bar za jedan veći od broja nula na početku prethodne vrste, odnosno, broj nula koje prethode prvom nenula elementu raste po vrstama. Iz prethodne definicije sledi da je rang matrice stepenaste po vrstama (kolonama) jednak broju nenula vrsta (kolona).

Stav. Za matrice $A, B \in M_{m\times n}$ važi

$$A \sim B \Longleftrightarrow rang(A) = rang(B).$$

Stav. Za kvadratnu matricu $A \in M_n(F)$ važi:

$$rang(A) = n \Longleftrightarrow A \text{ je } v - \text{ekvivalentna sa } I_n.$$

Posledica. $A \in M_n(F)$ je regularna akko $rang(A) = n$.

ZADACI

1. Odrediti rang matrice (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

2. U zavisnosti od $\lambda \in R$ odrediti rang matrice: (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2\lambda & 1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}$, (c) $C = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & \dots & n-1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{bmatrix}$.

3. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$. Pokazati da je $A \sim I_3$. Naći regularne matrice P i Q tako da važi $I_3 = PAQ$. Odrediti A^{-1}.

4. Ispitati da li je skup $\{a_1 = (1, 2, -1, -2), a_2 = (2, 3, 0, -1), a_3 = (1, 2, 1, 4), a_4 = (1, 3, -1, 0)\}$ baza prostora R^4.

5. Odrediti po jednu bazu i dimenziju prostora $U + V$ i $U \cap V$ ako je $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3-1)\}$ i $V = \mathcal{L}\{(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)\}$.