REPREZENTACIJA LINEARNOG PRESLIKAVANJA MATRICOM

Neka je V vektorski prostor sa bazom $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Tada se svaki vektor x na jedinstven način može prikazati u obliku $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, gde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Matrica kolona $[\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n]^T$ se zove kordinatni vektor vektora x u bazi e i obeležava sa $[x]_e$. Skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se zovu koordinate vektora x u bazi e.

Ako je $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ baza prostora V i važi $s_i = \beta_{1i} e_1 + \ldots + \beta_{ni} e_n$, $(i = 1, \ldots, n)$ onda se regularna matrica $P = [\beta_{ij}]$ zove matrica prelaza iz baze e u bazu s. Važi

$$[x]_s = P^{-1}[x]_e.$$

Neka je $f : V \to U$, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ je baza za V, a $s = \{s_1, \ldots, s_m\}$ je baza za U. Ako je

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \alpha_{11} s_1 + \alpha_{21} s_1 + \ldots \alpha_{m1} s_m \\ f(e_2) &= \alpha_{12} s_1 + \alpha_{22} s_1 + \ldots \alpha_{m2} s_m \\ &\vdots \\ f(e_n) &= \alpha_{1n} s_1 + \alpha_{2n} s_2 + \ldots \alpha_{mn} s_n \end{aligned}$$

onda se matrica

$$[f]_{e,s} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

zove matrica linearnog preslikavanja f u bazama e i s.

Specijalno, ako $f : V \to V$ i e je baza za V, umesto $[f]_{e,e}$ pisaćemo $[f]_e$.

Stav. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $f : V \to V$ endomorfizam. Ako su e i s baze prostora V i P matrica prelaza iz baze e u bazu s, onda važi

$$[f]_s = P^{-1}[f]_e P.$$

Stav. Neka su f i g endomorfizmi konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V nad poljem F, $c \in F$ i e baza prostora V. Tada važi

(i) $[f + g]_e = [f]_e + [g]_e$,

(ii) $[cf]_e = c[f]_e$,

(iii) $[f \circ g]_e = [f]_e [g]_e$,

(iv) f je automorfizam akko je matrica $[f]_e$ regularna. U tom slučaju važi $[f^{-1}]_e = [f]_e^{-1}$.

Stav. Neka je V n-dimenzioni vektorski prostor nad poljem F i $End(V) = \{f | f : V \to V, f \text{ je linearno}\}$, tada

$$End(V) \cong M_n(F).$$

ZADACI

1. Odrediti koordinatni vektor vektora $x = (1,7,2)$ u odnosu na bazu $e' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ prostora R^3, ako je $e_1' = (1,0,0),\ e_2' = (1,1,0),\ e_3' = (1,1,1)$.

2. Odrediti koordinatne vektore polinoma $p = 3x^2 + x - 7$ u bazama $e = \{1, x, x^2\}$ i $e' = \{e_1', e_2', e_3'\}$, gde je $e_1' = x^2 + x + 1,\ e_2' = x^2 + 1,\ e_3' = x + 2$. Odrediti takođe i matricu prelaza iz standardne baze e u bazu e'.

3. Odrediti koordinatni vektor matrice $M = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$ u odnosu na bazu

$$\left\{ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \right\}$$

prostora $M_2^T(R)$ simetričnih realnih matrica reda 2.

4. Naći matricu reprezentacije linearnog preslikavanja f u odnosu na standardnu bazu prostora:

(a) $f : R^3 \to R^2,\ f(x,y,z) = (2x - 4y + 9z, 5x + 3y - 2z)$,

(b) $f : R^2 \to R^4,\ f(x,y) = (3x + 4y, 5x - 2y, x + 7y, 4x)$,

(c) $f : R^4 \to R,\ f(x,y,z,u) = 2x + 3y - 7z - u$,

(d) $f : R \to R^2,\ f(x) = (3x, 5x)$.

5. Naći matricu reprezentacije linearnog preslikavanja $T : R_1[x] \to M_2(R)$ definisanog sa $T(p) = p(S)$ gde je $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, u odnosu na standardne baze.

6. Neka linearno preslikavanje $f : V \to W$ u bazama $\{e_1, e_2, e_3\}$prostora V i $\{s_1, s_2\}$ prostora W ima matricu reprezentacije $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Naći matricu reprezentacije preslikavanja f u odnosu na baze $e' = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\} : V$ i $s' = \{s_1, s_1 + s_2\} : W$.

7. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $f : M_{2\times 1}(R) \to M_{2\times 1}(R)$ definisano sa $f(X) = AX$. Naći matrice reprezentacije f u bazama $e = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ i $e' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$, matrice prelaza iz e u e' i obrnuto, $det(f),\ tr(f)$ i $rang(f)$, kao i koordinate vektora $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ u ovim bazama.

8. Neka je $f : M_2(R) \to M_2(R)$ preslikavanje definisano sa $f(A) = AM - MA$, za $A \in M_2(R),\ M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Pokazati da je f linearni operator i naći njegovu matricu reprezentacije u standardnoj bazi prostora $M_2(R)$.

(b) Odrediti po jednu bazu i dimenziju prostora $Im(f)$ i $ker(f)$.

9. Pokazati da je operator diferenciranja $D : R^R \to R^R$

(a) singularan u prostoru $V = \mathcal{L}\{1, t, e^t, te^t\}$;

(b) regularan u prostoru $W = \mathcal{L}\{\sin t, \cos t\}$.

10. Neka je $f : R^3 \to R^3$ linearno preslikavanje dato sa $f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ Pokazati da postoji inverzni operator f^{-1} i naći formulu kojom je on određen.