SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Neka je dat sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} ,$$

gde su x_j $(j = 1, \ldots, n)$ nepoznate, a a_{ij} i b_i $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ dati elementi polja F. Ako uvedemo oznake $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $X = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$ i $B = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_m]^T$, onda se gornji sistem može zapisati u matričnom obliku

$$AX = B.$$

Teorema (Cronecker-Capelli). Sistem jednačina $AX = B$ je saglasan akko je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema, tj. $rang(A) = rang([A|B])$. U tom slučaju broj slobodnih nepoznatih je $n - rang(A)$.

Primenom ove teoreme na homogen sistem $AX = 0$ dobijamo:

Posledica. Homogen sistem jednačina $AX = 0$ ima netrivijalna rešenja akko je rang matrice sistema manji od broja nepoznatih, tj. $rang(A) < n$.

Specijalno, ako se radi o kvadratnom homogenom sistemu uslov $rang(A) < n$ je ekvivalentan uslovu $det(A) = 0$, pa prethodno tvrđenje glasi:

Kvadratni homogen sistem $AX = 0$ ima netrivijalna rešenja akko $det(A) = 0$.

ZADACI

1. Odrediti jednu bazu i dimenziju prostora rešenja sistema jednačina

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z - s + 3t &= 0 \\ x + 2y + 3z + s + t &= 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t &= 0 \end{aligned} .$$

2. Pokazati da polinom $p \in R_{2n}[x]$ za koji važi $p(a_i) = p(-a_i),\ i = 1, \ldots n$, gde su $a_1^2, \ldots, a_n^2$ različiti nenula realni brojevi, predstavlja parnu funkcije.

3. Dokazati linearnu nezavisnost skupova vektora:

(a) $\{1, \sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x\} \subset R^R$,

(b) $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$, gde su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ različiti realni brojevi.

4. U zavisnosti od realnih parametara ispitati saglasnost sledećih sistema linearnih jednačina i rešiti ih:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + px_5 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + (q+4)x_5 &= q \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 - px_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + qx_4 - x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x - y - 2z &= 3 \\ 4x + y + pz &= 5 \\ x + 4y + z &= q \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} \alpha x + y + z &= m \\ x + \alpha y + z &= n \\ x + y + \alpha z &= p \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} x + (1+a)y + 2z &= 0 \\ 2x - y + (1+a)z &= 0 \\ 3x - 5y + 4z &= 0 \\ x + (11+a)y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 &= 0 \\ (\lambda - 1)x_1 + (2-2\lambda)x_2 - 2\lambda x_3 - 2\lambda x_4 &= 0 \\ (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 + (2+\lambda)x_3 + (1+2\lambda)x_4 &= 0 \\ (\lambda - 1)x_1 - \lambda x_2 - 2\lambda x_3 + (2-3\lambda)x_4 &= 0 \end{aligned}.$$