KRAMEROVA TEOREMA

Neka je dat kvadratni sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n, \end{array},$$

gde su x_i $(i = 1, \ldots, n)$ nepoznate, a a_{ij} i b_i $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$ dati elementi polja F. Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ matrica sistema, $D = det(A)$ njena determinanta i za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je D_{x_i} determinanta dobijena iz D zamenom $i-$te kolone kolonom slobodnih članova, tj.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Tada:

(i) Ako je $D \neq 0$, onda sistem ima jedinstveno rešenje $(x_1, \ldots, x_n) = (D_{x_1}/D, \ldots, D_{x_n}/D)$.

(ii) Ako je $D = 0$ i $D_{x_i} \neq 0$ za bar jedno $i \in \{1, \ldots, n\}$, onda sistem nije saglasan.

(iii) Ako je $D = D_{x_1} = \ldots = D_{x_n} = 0$, onda je sistem neodređen (ili je nemoguć ili ima beskonačno mnogo rešenja, što treba dodatno ispitati).

Posledica. Kvadratni homogen sistem ima netrivijalna rešenja akko $D = 0$.

ZADACI

1. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ll} x + y + 2z & = -1 \\ 2x - y + 2z & = -4 \\ 4x + y + 4z & = -2 \end{array}.$$

2. U zavisnosti od realnih parametara ispitati saglasnost sledećih sistema linearnih jednačina i rešiti ih:

(a) $$\begin{array}{rl} x + ay + z & = -1 \\ 2x - ay + 2z & = -4 \\ bx + y + 4z & = -2 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rrrcl} a^2x & +3y & +2z & = & 0 \\ ax & -y & +z & = & 0 \\ & y & +4z & = & 0 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rrrcl} ax & +by & & = & c \\ & cy & +az & = & b \\ cx & & +bz & = & a \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rl} ax + y + z + u & = 0 \\ x + ay + z + u & = 0 \\ x + y + az + u & = 0 \\ x + y + z + au & = 0 \end{array}.$$