KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI I KARAKTERISTIČNI VEKTORI LINEARNOG OPERATORA I MATRICE

Neka je $f : V \to V$ linearno preslikavanje vektorskog prostora $(V, +, \cdot, F)$. Skalar $\lambda \in F$ je karakteristična vrednost operatora f ako postoji vektor $x \neq 0$ takav da je $f(x) = \lambda x$. Vektor x se tada zove karakteristični vektor operatora f.

Skup $V_\lambda = \{x \in V | f(x) = \lambda x\}$ je potprostor prostora V i naziva se karakteristični potprostor koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ.

Skup svih karakterističnih vrednosti linearnog operatora f se naziva spektar tog linearnog operatora i obeležava $Sp(f)$.

Karakteristične vrednosti i karakteristični vektori kvadratne matrice $A \in M_n(F)$ su karakteristične vrednosti i karakteristični vektori linearnog operatora $f_A : M_{n\times 1} \to M_{n\times 1},\ f_A(X) = AX$.

Karakteristični polinom kvadratne matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ je polinom

$p_A(\lambda) := det(A - \lambda I)$. Dakle,

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Karakteristični polinom linearnog operatora $f : V \to V$ konačno dimenzionog prostora V je karakteristični polinom matrice reprezentacije operatora f u nekoj bazi prostora V. Dakle,

$$P_f(\lambda) := p_{[f]_e}(\lambda), \quad \text{gde je } e \text{ neka baza prostora } V.$$

Ako je $f : V \to V$ linearno preslikavanje konačnodimenzionog prostora V nad poljem F i $\lambda \in F$, onda važi

$$\lambda \in Sp(f) \iff p_f(\lambda) = 0.$$

Linearno preslikavanje $f : V \to V$ konačno dimenzionog prostora V je dijagonalizabilno (dopušta dijagonalizaciju) ako postoji baza s prostora V takva da je $[f]_s$ dijagonalna matrica.

Linearno preslikavanje $f : V \to V$ konačno dimenzionog prostora V je dijagonalizabilno (dopušta dijagonalizaciju) akko postoji baza s prostora V koju čine karakteristični vektori. Tada je matrica $[f]_s$ dijagonalna i na dijagonali se nalaze karakteristične vrednosti.

Matrica $A \in M_n(F)$ je dijagonalizabilna ako je slična nekoj dijagonalnoj matrici, tj. ako postoji regularna matrica $P \in M_n(F)$ takva da je matrica $B = P^{-1}AP$ dijagonalna.

Matrica $A \in M_n(F)$ je dijagonalizabilna akko je linearni operator $f_A : M_{n\times 1} \to M_{n\times 1},\ f_A(X) = AX$ dijagonalizabilan.

Neka je $f : V \to V$ linearni operator, Potprostor U vektorskog prostora V je $f-$invarijantan ako je $f(U) \subseteq U$.

Vektor $x \in V$ je karakteristični vektor linearnog preslikavanja $f : V \to V$ akko je $\mathcal{L}\{x\}$ jednodimenzioni $f-$invarijantni potprostor prostora V.

Endomorfizam f $n-$dimenzionalnog vektorskog prostora V je dijagonalizabilan akko je V direktna suma n jednodimenzionih $f-$invarijantnih potprostora.

Ako je $f : V \to V$ linearni operator konačno dimenzionog prostora V, onda važi $p_f(f) = 0$.

Ako je $A \in M_n(F)$, tada važi $p_A(A) = 0$.

ZADACI

1. Ako je $f : R^2 \to R^2$ rotacija za ugao α, $(0 < \alpha < \pi)$ dokazati da je $Sp(f) = \emptyset$.

2. Odrediti karakteristične vrednosti i njima pridružene karakteristične vektore matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Naći karakteristične vrednosti i karakteristične vektore linearnog operatora $f : M_2(R) \to M_2(R)$ definisanog sa $f(X) = X^T$.

4. Neka je $f : R^2 \to R^2$ linearni operator definisan sa $f(x, y) = (x + 4y, 2x + 3y)$.

(a) Odrediti karakteristične vrednosti i karakteristične potprostore linearnog operatora f.

(b) Odrediti matricu prelaza iz standardne baze prostora R^2 u bazu koju čine karakteristični vektori, a zatim i matricu operatora f u novoj bazi.

5. Ako je $f : R_2[x] \to R_2[x]$ definisano sa $f(p) = (x^2 - 1)p' - (2x + 1)p$ $(p \in R_2[x])$ pokazati da je f linearni operator koji dopušta dijagonalizaciju.

6. Neka su $f, g : R^3 \to R^3$ definisani sa

$f(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$,

$g(x, y, z) = (-3x + y - z, -7x + 5y - z, -6x + 6y - 4z)$.

Koji od linearnih operatora f i g dopušta dijagonalizaciju?

7. Dokazati da je matrica $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ slična nekoj dijagonalnoj matrici, pa naći A^n, za $n \in N$.

8. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 1+i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \in M_2(C)$. Naći A^{10}.

9. Prostor R^3 predstaviti kao direktan zbir svojih f invarijantnih potprostora, ako je $f : R^3 \to R^3$ definisano sa $f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$.

10. Neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(i) Naći A^{25}, (ii) Naći jednu bazu i dimenziju prostora $U = \mathcal{L}\{A^n | n \in N\}$.

11. Neka je $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. Odrediti A^n.

12. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(R)$ i potprostor $U = \mathcal{L}\{A^n | n \in N\}$. Odrediti dimenziju prostora U.