PRSTEN

Neka je P neprazan skup i $+$ i $\cdot$ binarne operacije na P. Uređena trojka $(P, +, \cdot)$ je prsten akko važi:

(P1) $(P, +)$ je Abelova grupa,

(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ za svako $x, y, z \in P$,

(P3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,

$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, za svako $x, y, z \in P$.

Neutralni element za operciju $+$ obično označavamo sa 0 ili 0_P, a inverzni od $x \in P$ u odnosu na $+$ sa $-x$ i zovemo suprotni od x. Umesto $x + (-y)$ obično ćemo pisati $x - y$. Znak $\cdot$ ćemo obično izostavljati, tj. umesto $x \cdot y$ pisaćemo xy.

Prsten $(P, +, \cdot)$ je komutativan akko je druga operacija komutativna, tj. važi $(\forall x, y \in P)\ xy = yx$.

Prsten $(P, +, \cdot)$ se naziva prsten sa jedinicom akko postoji element $1 \in P$ takav da važi $(\forall x \in P) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$. Element 1 se tada zove jedinica prstena.

Komutativan prsten sa jedinicom $(P, +, \cdot, 0, 1)$ je integralni domen akko nema delioce nule, tj. akko za svako $x, y \in P$ važi $xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.

PRIMERI:

(1) $(Z, +, \cdot)$ je integralni domen,

(2) $(Z_4, +_4, \cdot_4)$ je komutativan prsten sa jedinicom, ali nije integralni domen jer $2 \cdot_4 2 = 0$,

(3) $(M_n(R), +, \cdot)$ je nekomutativan prsten sa jedinicom.

U prstenu $(P, +, \cdot)$ za svako $x, y \in P$ i svako $n \in Z$ važi

(i) $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$,

(ii) $x(-y) = -(xy) = (-x)y$,

(iii) $(-x)(-y) = xy$,

(iv) $(nx)y = x(ny) = n(xy)$, gde je $nx = \begin{cases} x + \cdots + x, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ (-n)(-x), & n < 0 \end{cases}$.

Karakteristika prstena sa jedicom $(P, +, \cdot, 0, 1)$ je najmanji prirodni broj n (ako takav broj postoji) za koji je $n1 = 0$, tj. $1 + \cdots + 1 = 0$. Ako takav broj ne postoji, kažemo da je prsten karakterisytike 0 (ili beskonačne karakteristike). Karakteristiku prstena ćemo označavati sa $Char(P)$.

Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten i S neprazan podskup od P. Kažemo da je S potprsten prstena P akko je $(S, +, \cdot)$ prsten (u odnosu na restrikcije operacija $+$ i $\cdot$ prstena P).

Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten i S neprazan podskup od P. S je potprsten prstena P akko

(i) $(\forall x, y \in S)\ x - y \in S$,

(ii) $(\forall x, y \in S)\ xy \in S$.

Potprsten I prstena $(P, +, \cdot)$ je ideal prstena P akko važi $PI \subseteq I$ i $IP \subseteq I$.

Neprazan podskup I skupa P je ideal prstena $(P, +, \cdot)$ akko važi

(i) $(\forall x, y \in I)\ x - y \in I$,

(ii) $(\forall x \in P)(\forall a \in I)\ xa \in I, ax \in I$.

Ideal generisan jednim elementom se naziva glsvni ideal. Glavni ideal generisan elementom a se obeležava sa $< a >$. U komutativnom prstenu $(P, +, \cdot)$ važi

$$I =< a >= \{ax | x \in P\}.$$

Neka je I ideal prstena $(P, +, \cdot)$. Ako su na skupu P/I definisane binarne operacije $+$ i $\cdot$ na sledeći način

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \qquad (a + I) \cdot (b + I) = ab + I,$$

onda je $(P/I, +, \cdot)$ prsten. Ovaj prsten se naziva faktor prsten prstena P po idealu I.

Prsten u kome je svaki ideal glavni se na ziva glavnoidealski prsten. Primer takvog prstena je prsten celih brojeva.

Homomorfizam prstena $(P, +, \cdot)$ u prsten $(S, \oplus, \odot)$ je preslikavanje $f : P \to S$ za koje važi:

(i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$,

(ii) $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$, za svako $x, y \in P$.

ZADACI

1. Pokazati da svi invertibilni elementi nekog prstena sa jedinicom $(P, +, \cdot, 0, 1)$ čine grupu u odnosu na operaciju $\cdot$.

2. Pokazati da je grupa automorfizama ciklične grupe C_n izomorfna grupi invertibilnih elemenata prstena Z_n.

3. Ako je $(G, *, e)$ Abelova grupa pokazati da je $(End(G), +, \cdot)$ prsten, ako je $End(G)$ skup svih endomorfizama grupe G, a operacije $+$ i $\cdot$ su definisane na sledeći način $(f + g)(x) = f(x) * g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(g(x))$.

4. Odrediti prstene endomorfizama za grupe

(a) C_∞, (b) C_n, (c) $(Q,+)$.

5. U prstenu važe zakoni kancelacije nenula elementima akko prsten nema delioce nule.

6. Pokazati da je prsten $(P,+,\cdot)$ komutativan akko za svako $a,b \in P$ važi $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

7. Ako je $(P,+,\cdot,0,1)$ prsten sa jedinicom i za svako $a,b \in P$ važi $(a+b)^2 = a^2+b^2$ pokazati da je P komutativan prsten.

8. Pokazati da je u prstenu sa jedinicom komutativnost sabiranja posledica ostalih aksioma.

9. Ako u prstenu $(P,+,\cdot)$ za svako x važi $x^2 = x$, onda je taj prsten komutativan. Dokazati.

10. Ako prsten $(P,+,\cdot)$ ima samo jednu levu jedinicu pokazati da je ta jedinica i desna.

11. Ako je element x komutativnog prstena sa jedinicom $(P,+,\cdot,0,1)$ pokazati da je $1-x$ invertibilan element.

12. Pokazati da u integralnom domenu nema nulapotentnih elemenata, osim 0.

13. Ako prsten sa jedinicom $(P,+,\cdot,0,1)$ ima bar dva elementa, pokazati da je $0 \neq 1$.

14. Neka je $(P,+,\cdot)$ prsten. Pokazati da je $C(P) = \{a \in P | (\forall x \in P) ax = xa\}$ (centar prstena P) potprsten prstena P.

15. Neka je $C[-1,1]$ skup neprekidnih realnih funkcija definisanih na intervalu [-1,1] i neka su operacije = i $\cdot$ definisane sa $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$. Pokazati da je $(C[-1,1],+,\cdot)$ prsten, ali ne i integralni domen. Takođe pokazati da je $A = \{f \in C[-1,1] | f(1) = f(-1)\}$ potprsten ovog prstena.

16. Ako je $f : (P,+,\cdot) \to (S,\oplus,\odot)$ homomorfizam prstena, pokazati da je $kerf = \{a \in P | f(a) = 0_S\}$ ideal prstena P. Takođe pokazati da je f 1-1 akko $kerf = \{0_P\}$.

17. Pokazati da je prsten $(Z,+,\cdot)$ glavnoidealski.

18. Neka je $(P,+,\cdot)$ prsten sa jedinicom, a $(S,+,\cdot)$ njegov potprsten.

(a) Da li jedinica prstena P mora pripadati S?

(b) Može li S imati jedinicu različitu od jedinice prstena P?

19. Neka je $f : (S,+,\cdot) \to (P,\oplus,\odot)$ homomorfizam prstena.

(a) Da li mora biti $f(1_S) = 1_P$?

(b) Ako je f na, da li je $f(1_S) = 1_P$?

20. Neka je $f : (P, +, \cdot) \to (S, \oplus, \odot)$ homomorfizam prstena. Primerom pokazati da ako je $(P, +, \cdot)$ integralni domen, tada $(S, \oplus, \odot)$ ne mora biti integralni domen i obratno.

21. Naći sve homomorfizme prstena

(a) $Z \to 2Z$, (b) $2Z \to 2Z$, (c) $Z \to Q$.

22. Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten i $a, b \in P$ komutiraju, pokazati da je tada

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b^n, \text{ za } n \in N, n > 1.$$

23. Ako je karakteristika integralnog domena konačan broj pokazati da je taj broj prost.

24. Ako je $(P, +, \cdot, 0, 1)$ prsten sa jedinicom karakteristike p pokazati da za svako $x \in P$ važi $px = 0$.