Algebarske strukture - II kolokvijum

1. Ispitati da li su polja $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ i $Q(\sqrt{7}) = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in Q\}$ izomorfna. Operacije na ovim poljima su restrikcije operacija sabiranja i množenja realnih brojeva.
2. Naći sve neizomorfne homomorfne slike prstena celih brojeva $(Z, +, \cdot)$.
3. Dokazati da prsten $(P, +, \cdot)$ nema nulapotentnih elemenata akko iz $x^2 = 0$ sledi $x = 0$.
4. Neka je $(P, +_P, \cdot_P)$ prsten sa jedinicom takav da jntegralni domen takav da važi $(\exists a \in R)(\exists n \in N)(a \neq 0 \wedge na = 0)$. Pokazati da je karakteristika domena R prirodan broj *d* koji je delilac broja *n*.
5. U polju $(Z_p, +_p, \cdot_p)$ naći sva rešenja jednačine $x^p = x$.
6. Pokazati da ne postoji polje koje ima 20 elemenata.
7. Odrediti karakteristiku polja F koje sadrzi 27 elemenata.
8. Naći sve homomorfizme aditivne grupe polja $(Z_p, +_p, *_p, 0, 1)$ u multiplikativnu grupu ovog polja.
9. Neka je $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in Z \right\}$.
   a. Dokazati da je R prsten u odnosu na sabiranje i množenje matrica.
   b. Dokazati da je $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in Z \right\}$ ideal prstena R.
10. Neka su na skupu $A = \{a, b, c, d, e\}$ operacije $+$ i $\cdot$ date tablicama:

$+$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

,

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	a	b	b	a	b
b	b	b	b	b	b
c	c	b	b	c	b
d	d	b	b	d	b
e	e	b	b	e	b

.

    Ispitati da li je $(A, +, \cdot)$ prsten.
11. Neka je $(Q, +, \cdot)$ polje racionalnih brojeva, $*$ i $\circ$ binarne operacije na Q definisane sa $p * q = p + q - 3$, $p \circ q = 3 + \frac{1}{2} \cdot (p - 3) \cdot (q - 3)$, $p, q \in Q$. Pokazati da je $(Q, *, \circ)$ polje izomorfno polju $(Q, +, \cdot)$.
12. Neka je $(F, +, \cdot, 0, 1)$ polje sa $q > 2$ elemenata. Pokazati:
    (a) $x^q = x$, za svako $x \in F$.
    (b) $\sum_{x \in F} x = 0$.
13. U polju $(F, +, \cdot, 0, 1)$ rešiti po x jednačinu $nx = a$, gde je $a \in F$, $n \in N$.
14. Neka su *p* i *q* racionalni brojevi takvi da $q^2 + 4p$ nije kvadrat ni jednog racionalnog broja i neka je $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & bp \\ b & a + qb \end{bmatrix} \middle| a, b \in Q \right\}$. Pokazati da je $(F, +, \cdot)$ polje, gde su $+$ i $\cdot$ sabiranje i množenje matrica.
15. Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten bez delilaca nule u kome postoji idempotent $a \neq 0$. Dokazati da ovaj prsten ima jedinicu.

16. Pokazati da element n prstena $(Z_k,+_k \cdot_k)$ nije delilac nule akko su n i k uzajamno prosti brojevi.
17. Neka je $(P,+,\cdot)$ komutativan prsten bez nulapotentnih elemenata i neka za elemente $x, y \in P$ važi $x^3 = y^3$ i $x^2 = y^2$. Dokazati da je $x = y$.
18. Neka je $(P,+,\cdot)$ prsten u kome postoji element c sa osobinom $(\forall a,b \in P)(c \cdot a = c \cdot b \Rightarrow a = b)$. Pokazati da u ovakvom prstenu aksioma $a + b = b + a, a,b \in P$, je posledica ostalih aksioma prstena.
19. Ako je $(F,+,\cdot,0,1)$ konačno polje karakteristike p , pokazati da jednačina $x^p = a$ ima jedinstveno rešenje (po x) u F , za svako $a \in F$.