Zadaci za drugi kolokvijum iz LINEARNE ALGEBRE

1. Diskutovati po $a, b \in R$ sistem jednačina

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=a \\ x+3y-3z&=2 \\ 2x+by-6z&=1 \end{aligned} \quad .$$

2. Naći potreban i dovoljan uslov da sledeći sistem jednačina bude saglasan:

$$\begin{aligned} x+2y+3z+5u&=a \\ 2x+2y-z+u&=b \\ x+y+u&=c \\ y+2z+3u&=d \end{aligned} \quad .$$

3. Odrediti $a \in R$ tako da sistem ima netrivijalna rešenja i rešiti ga za dobijene vrednosti a

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ ax+4y+z&=0 \\ 6x+(a+2)y+2z&=0 \end{aligned} \quad .$$

4. U zavisnosti od realnih parametara a i b rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax+y+bz&=1 \\ x+ay+bz&=1 \\ x+y+abz&=b. \end{aligned}$$

5. Diskutovati po $\alpha, \beta \in R$ i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x+y+\beta z&=3 \\ x+\alpha y+z&=4 \\ x+y+2\beta z&=4. \end{aligned}$$

6. Diskutovati po realnim parametrima a i b i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax+y+bz&=1 \\ abx+y+z&=a \\ ax+by+z&=1 \end{aligned} \; .$$

7. Ispitati linearnu nezavisnost skupa vektora $\{e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}\}$ prostora R^R .

8. Za $a, b \in R$ diskutovati i rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} ax+y+az&=1 \\ x+ay+az&=0 \\ ax+ay+z&=b \\ x+y+z&=0 \end{aligned} \; .$$

9. Diskutovati po $a, b \in R$ i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax+(a^2+a-6)y+(a-2)z&=1 \\ (2a+3)x+(a^2+a-6)y+(a^2+4a-2)z&=b \\ (4a+6)x+2(a^2+a-6)y+(a^2+5a-4)z&=2 \end{aligned} \quad .$$

11. Data je matrica $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\in M_3(R)$. Naći karakteristične vrednosti i karakteristične vektore matrice *A*. Da li *A* dopušta dijagonalizaciju? Odrediti $A^k,\ k\in Z$.

12. Neka je preslikavanje $\langle,\rangle : M_2(R)\times M_2(R)\to R$ definisano sa $\langle A,B\rangle = tr\left(A^T\cdot\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\cdot B\right)$

(a) Dokazati da je $\langle,\rangle$ skalarni proizvod na $M_2(R)$.

(b) Odrediti jednu ortonormiranu bazu potprostora $U=\{A\in M_2(R)\mid A^T=A\}$.

13. Dokazati da postoji jedinstven realni broj *c* za koji matrica $A=\begin{bmatrix}2&2&1\\-2c&c+2&2c\\-1&2&4\end{bmatrix}\in M_3(R)$ dopušta dijagonalizaciju i za tu vrednost *c* odrediti $A^n, n\in N$.

14. Neka je $W=L\{(0,1,0,1),(2,0,-3,-1)\}$ potprostor unitarnog prostora R^4 sa standardnim skalarnim proizvodom. Odrediti po jednu ortonormiranu bazu prostora *W* i $W^\perp$ i naći ortogonalne projekcije vektora $x=(1,1,1,1)$ na *W* i $W^\perp$.

15. Neka $f: R_2[x]\to R_2[x],\ f(p)=-2p+(3x-1)p'$.

(a) Pokazati da je *f* linearno.

(b) Odrediti sve jednodimenzione *f*-invarijantne potprostore prostora $R_2[x]$.

(c) Odrediti jezgro i sliku operatora *f.*

16. Data je matrica *A*=$\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}\in M_2(R)$ i linearni operator

$f: M_2(R)\to M_2(R),\ f(X)=AX-XA$.

(a) Naći jezgro i sliku operatora *f.*

(b) Ispitati da li *f* dopušta dijagonalizaciju.

17. Dato je preslikavanje $\langle .,.\rangle : R_2[x]\times R_2[x]\to R$ na sledeći način

$\left\langle a+bx+cx^2,\alpha+\beta x+\gamma x^2\right\rangle = a\alpha+2b\beta+2c\gamma-a\beta-b\alpha-b\gamma-c\beta$.

(a) Dokazati da je $\langle .,.\rangle$ skalarni proizvod prostora $R_2[x]$.

(b) Naći $W^\perp$ ako je $W=\{p\in R_2[x]\mid p(1)=0\}$.

18.. Data je matrica *A*=$\begin{bmatrix}3&1&1\\-5&-3&-5\\3&3&5\end{bmatrix}$. Ispitati da li postoje regularna matrica *P* i dijagonalna matrica *B* tako da je $A=P^{-1}BP$ i ako postoje naći ih.

19. Dokazati da je u vektorskom prostoru $R_2[x]$ sa $\langle p,q\rangle = p(-2)q(-2)+p(-1)q(-1)+p(0)q(0)$ definisan skalarni proizvod. Naći ortogonalnu projekciju vektora $(x-1)^2$ na potrostor $U=\{p\in R_2[x]\ |p(-1)=0\}$.

20. Data je matrica *A*=$\begin{bmatrix}0&-1&1&1\\-1&0&0&0\\0&-1&1&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$. Ispitati da li je matrica A dijagonalizabilna.

21. Dato je preslikavanje $\langle .,.\rangle : R_2[x]\times R_2[x]\to R$ na sledeći način

$\left\langle a+bx+cx^2,\alpha+\beta x+\gamma x^2\right\rangle = a\alpha+2b\beta+2c\gamma-a\beta-b\alpha-b\gamma-c\beta$

(a) Dokazati da je $\langle .,. \rangle$ skalarni proizvod prostora $R_2[x]$.

(b) Naći jednu ortonormiranu bazu prostora $R_2[x]$.

22. Naći karakteristične vrednosti i karakteristične vektore matrice $A \cdot A^{\perp}$, ako je A=[1 2 …n].

23. Neka je $W = L\{(0,1,0,1),(2,0,-3,-1)\}$ potprostor unitarnog prostora R^4 sa standardnim skalarnim proizvodom. Odrediti po jednu ortonormiranu bazu prostora W i $W^{\perp}$ i naći ortogonalne projekcije vektora $x = (1,1,1,1)$ na W i $W^{\perp}$.

24. Ispitati da li linearni operator $f : R_2[x] \to R_2[x]$ dat sa $f(p) = (x^2 - 1)p(0) + 2xp'(0) + (x^2 + 2x)p''(0)$ dopušta dijagonalizaciju.

25. Neka je $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 | x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Naći ortonormiranu bazu ortogonalnog komplementa od V s obzirom na skalarni proizvod $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + x_4 y_4$.

26. Data je matrica $A=\begin{bmatrix} -5 & 5 & 14 \\ 6 & 4 & -6 \\ -6 & 5 & 15 \end{bmatrix}$.

(a) Ispitati da li je matrica A slična nekoj dijagonalnoj matrici i, u slučaju da jeste, odrediti bar jednu regularnu matricu P i dijagonalnu B tako da važi $B=P^{-1}AP$

(b) Naći A^n za $n \in N$.

(c) Naći jednu bazu prostora $L\{A^n \mid n \in N\}$.

27. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & p \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $p \in R$. Odrediti dimenziju i jednu bazu prostora $V = L\{A^n | n \in N \cup \{0\}\}$.