UNIVERZITET U KRAGUJEVCU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET

Aleksandar Čolanić

Brauerova teorema

- DIPLOMSKI RAD -

Mentor:
dr Radosav Đorđević

Kragujevac
jun,2011.

Sadržaj

1 Uvod

Brauerova teorema o fiksnoj tački, jedna je od prvih dostignuća algebarske topologije, i čini osnovu za opštije teoreme o fiksnoj tački važne u funkcionalnoj analizi. Slučaj $n = 3$, prvi je dokazao Pirs Bol[1] 1904. godine. Žak Adamar[2] je dokazao opšti slučaj 1910, a Brauer[3], po kome teorema i nosi ime, je dao drugačiji dokaz 1912. godine. Ovi prvi dokazi nisu imali konstruktivni karakter već su bili indirektni, bazirali su se na opovrgavanju suprotne pretpostavke, suprotno Brauerovim intuicionističkim idealima[4].

Brauerova teorema o fiksnoj tački predstavlja teoremu o fiksnoj tački u topologiji. Prema ovoj teoremi za bilo koju neprekidnu funkciju f koja preslikava skup sa odredjenim svojstvima postoji tačka x_0 takva da važi $f(x_0) = x_0$. Najjednostavniji slučaj te teoreme predstavlja sledeće tvrđenje: *Dat je interval* $[a, b]$ *i neprekidna funkcija* $f : [a, b] \to [a, b]$. *Tada funkcija ima barem jednu nepokretnu tačku.* Ovo tvrđenje neće važiti za otvorene intervale. Teorema ima više formulacija, zavisno od konteksta u kome se koristi. U ravni: *Svako neprekidno preslikavanje* f *zatvorenog diska na sebe ima barem jednu fiksnu tačku.* Ovu formulaciju možemo generalizovati na proizvoljne konačne dimenzije: *Svaka neprekidna funkcija zatvorene lopte u euklidskom prostoru na sebe ima fiksnu tačku.*

Jedna fina ilustracija ove teoreme je sledeća: uzmite kartu Srbije i stavite je na sto (ako ste u Srbiji, ako niste, uzmite kartu zemlje u kojoj se nalazite). Tada sigurno postoji tačka na toj karti koja se nalazi tačno iznad tačke na Zemlji koju ona predstavlja.

Među mnogobrojnim teoremama o fiksnoj tački, Brauerova je naročito poznata delom i zbog svoje višestruke primene u različitim oblastima matematike. U topologiji, kao svojoj izvornoj oblasti, Brauerova teorema je jedna od ključnih. Teorema se, takođe, koristi za dokazivanje nekih rezultata u diferencijalnim jednačinama, kao i u većini uvodnih kurseva diferencijalne geometrije. Ona se pojavljuje i u oblastima kao što je teorija igara. U ekonomiji Brauerova teorema o fiksnoj tački ima centralnu ulogu u dokazu o postojanju opšte ravnoteže u tržisnoj ekonomiji.

[1]Piers Bohl(1865 - 1921), litvanski matematičar

[2]Jacques Salomon Hadamard (1865 - 1963), francuski matematičar

[3]Luitzen Egbertus Jan Brouwer(1881 - 1966), holandski matematičar i filozof, bavio se teorijom skupova, kompleksnom analizom, teorijom mere, topologijom. Dokazao topološku invarijantnost dimenzije, a poznat je i po svojoj filozofskoj školi intuicionizma (pristup matematici kao konstruktivnoj mentalnoj aktivnosti), i, naravno, po Brauerovoj teoremi o fiksnoj tački

[4]intuicionizam naglašava da matematika ima prioritet nad logikom, da su objekti matematike konstruisani i vođeni umom matematičara, i da je nemoguće definisati osobine matematičkih objekata prostim postavljanjem nekoliko aksioma

2 Osnovni pojmovi

2.1 Topološki prostori

U metričkim prostorima mnogi pojmovi kao što su, na primer, neprekidno preslikavanje, unutrašnja tačka, granična tačka, tačka nagomilavanja, izolovana tačka, otvoreni i zatvoreni skupovi mogu se definisati pomoću okolina tačaka, ne pozivajući se na rastojanje (metriku), kojim se u tim prostorima ovi pojmovi i definišu. Zato je prirodno da se pomenuti pojmovi definišu ne pozivajući se na pojam rastojanja, polazeći od nekog aksiomatski uvedenog osnovnog pojma. Na taj način se dobija nova klasa prostora, *klasa topoloških prostora,* koja sadrži i klasu metričkih prostora.

Topološki prostor na nepraznom skupu X definiše se pomoću familije *otvorenih podskupova skupa* X na sledeći način.

Definicija 2.1. *Topološki prostor na skupu X je uređeni par $(X, \mathcal{T})$ koga čine skup X- nosilac topološkog prostora i familija $\mathcal{T}$ podskupova skupa X koja zadovoljava uslove:*

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

2) za svako $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ *važi* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$,

3) za svaku kolekciju $\{U_i : i \in I\} \subset \mathcal{T}$ *važi* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Skupovi familije $\mathcal{T}$ se zovu *otvoreni* skupovi topološkog prostora, a uslovi $1), 2), 3)$ *aksiomi otvorene topologije.*

2.2 Neprekidna preslikavanja topoloških prostora i homeomorfizmi

Neprekidnost preslikavanja topoloških prostora je osnovni pojam koji ima značajnu ulogu pri rešavanju problema ekvivalentnosti topoloških prostora i dobijanja novih prostora.

Neprekidnost preslikavanja topoloških prostora može se definisati na dva načina: lokalno u tačkama domena i globalno na čitavom domenu preslikavanja.

Neka je $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ preslikavanje topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ u prostor $(X', \mathcal{T}')$.

Teorema 2.1. *Preslikavanje f je neprekidno u tački $x \in X$, ako za svaku otvorenu okolinu V tačke $f(x) \in X'$ u prostoru $(X', \mathcal{T}')$, postoji otvorena okolina U tačke x u prostoru $(X, \mathcal{T})$ tako da je $f(U) \subseteq V$. Preslikavanje f je neprekidno na prostoru X ako je neprekidno u svakoj tački x prostora X.*

Teorema 2.2. *Neka je $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ preslikavanje topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ u prostor $(X', \mathcal{T}')$. Tada preslikavanje f je neprekidno akko $f^{-1}(V)$ je otvoren u X skup, za svaki otvoren u X' skup V.*

Neprekidno preslikavanje $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ zove se *faktorsko preslikavanje* ako važi: skup $f^{-1}(V) \subseteq X$ je otvoren (zatvoren) akko je skup $V \subseteq X'$ otvoren (zatvoren). Preslikavanje $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ je *otvoreno (zatvoreno)* ako je slika svakog otvorenog (zatvorenog) skupa, takođe, otvoreni (zatvoreni) skup.

Definicija 2.2. *Neprekidno preslikavanje $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ prostora X na prostor X' koje je $1-1$ i čije je inverzno preslikavanje f^{-1} neprekidno zove se homeomorfizam* ili *topološko preslikavanje.*

Dva prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(X', \mathcal{T}')$ su homeomorfna ako postoji homeomorfizam prostora $(X, \mathcal{T})$ na prostor $(X', \mathcal{T}')$. Ako su dva prostora homeomorfna, piše se $(X, \mathcal{T}) \approx (X', \mathcal{T}')$ ili kraće $X \approx X'$.

Lako se dokazuje da je relacija homeomorfnosti u klasi svih topoloških prostora jedna relacija ekvivalencije. Zato sledi da se klasa svih topoloških prostora razlaže na kolekciju klasa ekvivalencije za relaciju $\approx$. Ako dva prostora pripadaju jednoj istoj klasi ekvivalencije za relaciju $\approx$, reći će se da su ti prostori *topološki ekvivalentni* ili da imaju isti topološki tip. Dva homeomorfna topološka prostora se u topološkom smislu ne mogu razlikovati. Svako svojstvo prostora koje imaju svi njemu ekvivalentni prostori zove se *topološko svojstvo* ili *topološka invarijantna.*

Pošto homeomorfizam uspostavlja uzajamno jednoznačnu korespondenciju između tačaka dva prostora i između otvorenih skupova tih prostora, svako svojstvo prostora definisano pomoću otvorenih skupova je topološko svojstvo. Zato se topologija često definiše kao nauka koja proučava topološka svojstva ili topološke invarijante topoloških prostora.

Navedimo neke topološke invarijante. Svojstvo da prostor ima prebrojivu bazu okolina ili da ima prebrojivu topološku bazu su dve topološke invarijante. Postoje i numeričke topološke invarijante kao dimenzija prostora. Povezanost, kompaktnost, separabilnost topoloških prostora su takođe topološke invarijante. Kasnije ćemo upoznati još jednu topološku invarijantu, *svojstvo fiksne tačke.*

2.3 Potprostori

Neka je $(X, \mathcal{T}_X)$ topološki prostor i $E \subseteq X$.

Definicija 2.3. *Topologija $\mathcal{T}_E$ skupa E inducirana inkluzijom $i : E \hookrightarrow X$ zove se relativna topologija na E, a par $(E, \mathcal{T}_E)$ je potprostor prostora $(X, \mathcal{T})$.*

Dakle,

$$\mathcal{T}_E = \{i^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_X\} = \{E \cap V \mid V \in \mathcal{T}_X\}.$$

$i : E \hookrightarrow X$ je neprekidno preslikavanje i $\mathcal{T}_E$ je najgrublja topologija skupa E za koju je i neprekidno. Takođe, važi sledeća teorema.

Teorema 2.3. *(1) $E \in \mathcal{T}_X$ akko $i : E \hookrightarrow X$ je otvoreno preslikavanje,*

(2) $E \in \mathcal{F}_X$ akko $i : E \hookrightarrow X$ je zatvoreno preslikavanje.

Definišimo još *retrakciju* i *retrakt* prostora.

Definicija 2.4. *Neka je E potprostor prostora X. Neprekidno preslikavanje $r : X \to E$ takvo da je $r \restriction E = 1_E$ zovemo retrakcija, a potprostor E retrakt prostora X.*

2.4 Kompaktnost metričkih prostora. Lebegov broj

Kompaktnost je topološko svojstvo koje omogućava mnoge konstrukcije u matematičkoj analizi i u drugim oblastima matematike.

Definicija 2.5. *Metrički prostor (X, d) je kompaktan ako svaki niz (x_n) u X ima konvergentan podniz.*

Za $\varepsilon > 0$ i konačan skup $S \subseteq X$, kažemo S je $\varepsilon-$*mreža* ako:

$$(\forall x \in X)(\exists s \in S) d(x, s) < \varepsilon.$$

Pomoću prethodnih definicija kompaktnosti i $\varepsilon-$mreže lako dokazujemo, kontrapozicijom, sledeću teoremu.

Teorema 2.4. *Ako je metrički prostor (X, d) kompaktan, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\varepsilon-$mreža u X.*

Sada ćemo navesti nekoliko svojstava kompaktnih metričkih prostora, u vidu teorema, ali bez dokaza.

Teorema 2.5. *Kompaktan metrički prostor (X, d) je separabilan.*

Obratno ne mora da važi. Na primer, prostor (R, d) nije kompaktan, iako je separabilan ($\overline{Q} = R$). U metričkom prostoru, separabilnost i svojstvo da prostor ima prebrojivu bazu su ekvivalentni, pa otuda iz prethodne teoreme važi

Posledica 2.1. *Kompaktan metrički prostor ima prebrojivu bazu.*

Familija $\mathcal{U} = \{U_\mu \mid \mu \in M\} \subseteq \mathcal{T}$ je otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ ako $\bigcup_{\mu \in M} U_\mu = X$, gde su $U_\mu, \mu \in M$, otvoreni skupovi. Podfamilija $\mathcal{U}^* = \{U_\mu \mid \mu \in M_0\}, M_0 \subseteq M$ takva da $|\mathcal{U}^*| = \bigcup_{\mu \in M_0} U_\mu = X$ zove se podpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$. Ako je M_0 konačan skup, onda je $\mathcal{U}^*$ konačan podpokrivač. Ako je M_0 prebrojiv skup onda je $\mathcal{U}^*$ prebrojiv podpokrivač.

Teorema 2.6. *Ako metrički prostor (X, d) ima prebrojivu bazu, tada svaki otvoreni pokrivač prostora X ima najviše prebrojiv podpokrivač.*

Sledeća teorama nas vodi do pojma kompaktnosti u topološkom prostoru.

Teorema 2.7. ***(Borel-Lebegova teorema)*** *Metrički prostor (X, d) je kompaktan akko svaki otvoreni pokrivač prostora (X, d) sadrži konačan podpokrivač.*

Sada ćemo definisati *Lebegov broj*

Definicija 2.6. *Lebegov broj pokrivača $\mathcal{U}$ metričkog prostora (X, d) je svaki realan broj $\lambda > 0$ sa osobinom:*

$$(\forall A \subseteq X)(diam(A) < \lambda \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{U})A \subseteq U)$$

Očigledno, ako λ postoji, ono nije jedinstveno.

Primer 2.1. Lebegov broj zavisi isključivo od metrike, ne i od topologije. Zaista, neka je $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ i (X, d_0) diskretan metrički prostor sa metrikom

$$d_0(x, x') = \begin{cases} 1, & x \neq x' \\ 0, & x = x' \end{cases}$$

a (X, d_1) uobičajen (euklidski) metrički prostor za $X \subseteq R$. Tada su $\mathcal{T}_{d_0} = \mathcal{T}_{d_1}$ diskretne topologije jer su $\{x\}, x \in X$, otvoreni. Otvoreni pokrivač $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ u slučaju (X, d_0) ima Lebegov broj $0 < \lambda \leq 1$ jer:

$$\text{iz } diam_{d_0}(A) < \lambda \text{ sledi } A = \{x\} \text{ za neko } x \in X.$$

Uslučaju (X, d_1) pokrivač $\mathcal{U}$ nema Lebegov broj jer za svako $\lambda > 0$ postoji $A = \{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\}$ tako da je

$$diam_{d_1}(A) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \lambda \text{ i } A \nsubseteq \{x\} \text{ za sve } x \in X.$$

Navedimo još jednu teoremu bez dokaza.

Teorema 2.8. *(**Lebegova teorema**) Ako je metrički prostor(X,d) kompaktan, tada svaki otvoreni pokrivač prostora X ima Lebegov broj.*

3 Simpleksi

Neka je X topološki prostor, i neka su A, B i A', B' njegovi podskupovi. Razmotrimo sledeću ideju:

$$\text{iz } A \approx A', B \approx B' \text{ i } A \cap B \approx A' \cap B' \text{ sledi } A \cup B \approx A' \cup B'.$$

Uzmimo da je $X = \mathbb{R}^2$, a za podskupove

$$A = [-1,0] \times \{0\}, B = [0,1] \times \{0\},$$

$$A' = [-1,1] \times \{0\}, B' = \{0\} \times [-1,1],$$

vidimo da intervali $A \cup B$ i $A' \cup B'$ nisu homeomorfni, iako su im delovi, istaknuti u prethodnoj implikaciji, homeomorfni.

Posmatraćemo podprostore Euklidskih prostora, koji se sastoje od delova koji su jednostavni i koje ćemo zvati $n-$simpleksi. Za $n = 0,1,2,3$ imaćemo $n-$simplekse redom: tačka, duž, trougao, tetraedar. Delovi ovih podprostora moraće biti pravilno raspoređeni, da se jedan sa drugim seku stranama. Ovakve podprostore zovemo poliedri. Kada dva takva poliedra budu sastavljena iz istih simplekasa i budu imali iste šeme presecanja, oni će biti i homeomorfni.

3.1 Opšti položaj tačaka. $n-$ravan

Pojmove kao što su tri nekolinearne ili četiri nekomplanarne tačke možemo generisati pomoću sledeće definicije:

Definicija 3.1. *Skup $\{a_0,...,a_n\}$ tačaka u $\mathbb{R}^m$ je u opštem položaju ako za proizvoljne realne skalare $\lambda_0,...,\lambda_n$ važi:*

$$\textit{iz } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0 \textit{ i } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 \textit{ sledi da za svako } i, \lambda_i = 0.$$

Dakle, $\{a_0,...,a_n\}$ su u opštem položaju akko su vektori $a_1 - a_0,...,a_n - a_0$ linearno nezavisni.

Definišimo sada pojam $n-$*ravni:*

Definicija 3.2. *$n-$ravan određena tačkama $\{a_0, ..., a_n\}$ prostora $\mathbb{R}^m$, koje su u opštem položaju, je skup*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \ i \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Primetimo da zbog pretpostavke da je niz tačaka $\{a_0, ..., a_n\}$ u opštem položaju, za svako $x \in P$ postoji jedinstven niz (λ_i) takav da je

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \text{ i } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Tako tačka $a_i \in P$ određuje niz čiji su svi elementi nula sem što je na $i-$tom mestu jedan.

Primetimo da kada su $\{a_0, ..., a_n\}$ tačke u opštem položaju, one ne mogu pripadati nikojoj $k-$ravni, za $k < n$. Takođe, kada su tačke $\{a_0, ..., a_n\}$ u opštem položaju i $x \in \mathbb{R}^m$, tada su $\{a_0, ..., a_n, x\}$ u opštem položaju akko x ne pripada P (P je $n-$ravan određena sa $\{a_0, ..., a_n\}$).

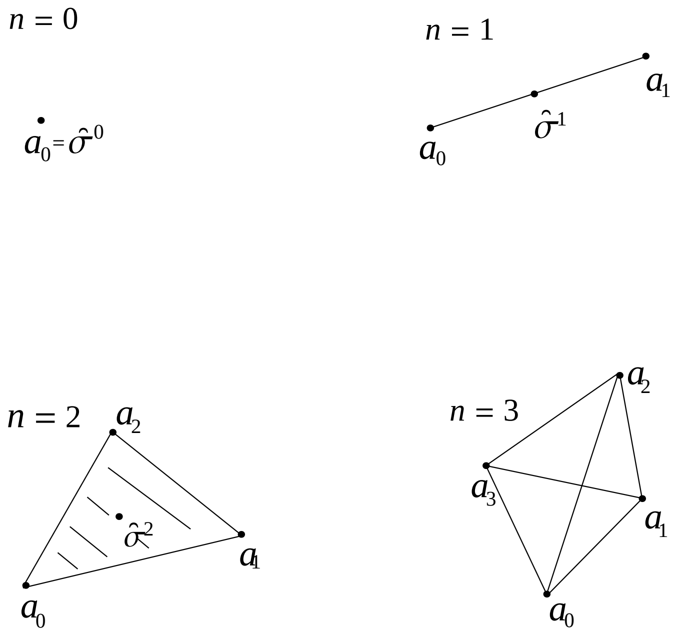
3.2 $n-$simpleks

Kao što smo rekli, pojmove kao što su tačka, duž, trougao, tetraedar generalisaćemo uvodeći pojam simpleksa:

Definicija 3.3. *Neka su $\{a_0, ..., a_n\}$ tačke u $\mathbb{R}^m$ koje su u opštem položaju. Geometrijski $n-$simpleks određen tačkama $\{a_0, ..., a_n\}$ je skup*

$$\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \ i \ (\forall i)\lambda_i \geq 0\}$$

Tačke $\{a_0, ..., a_n\}$ su vrhovi simpleksa σ^n, n je njegova dimenzija, a brojevi $\lambda_0, ..., \lambda_n$ su baricentrične koordinate tačke x.



Slika 1: $n-$simpleksi

Sada ćemo uvesti pojmove unutrašnjost i rub simpleksa:

Definicija 3.4. *Skup*

$$Int\sigma^n = \{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in \sigma^n \mid (\forall i)\lambda_i > 0\}$$

zove se unutrašnjost simpleksa σ^n. Razlika $\sigma^n \backslash Int\sigma^n = |\sigma^n|$ zove se rub simpleksa σ^n.

Simpleks je podskup prostora $\mathbb{R}^n$, pa je prostor sa relativnom topologijom. Ali unutrašnjost i rub simpleksa ne treba mešati sa unutrašnjošću i rubom tog simpleksa shvaćenog jednostavno kao podskupa u R^m. Na primer, neka su $a_0 = (0,0), a_1 = (0,1)$ vrhovi jednodimenzionalnog simpleksa, unutrašnjost simpleksa biće $(0,1) \times \{0\}$, a rub $\{a_0, a_1\}$, ali ako simpleks posmatramo kao podskup u R^m unutrašnjost će biti prazan skup, a rub će biti taj simpleks.

Simpleks σ^n, zavisno od vrhova označavamo pišući $(a_0, ..., a_n)$. Simpleks $(a_{i_1}, ..., a_{i_k})$ zovemo *strana* simpleksa σ^n, gde je $a_{i_1}, ..., a_{i_k}$ podniz niza $a_0, ..., a_n$ (tada su tačke $a_{i_1}, ..., a_{i_k}$ u opštem položaju). U strane se ubrajaju prazan skup $\emptyset$ i ceo simpleks σ^n, a sem njih sve ostale strane nazivamo *prave strane* simpleksa σ^n. Primetimo da je rub $|\sigma^n|$ unija svih pravih strana simpleksa σ^n.

Tačka

$$\hat{\sigma}^n = \frac{1}{n+1}a_0 + ... + \frac{1}{n+1}a_n = \frac{a_0 + ... + a_n}{n+1}$$

zove se *baricentar* simpleksa σ^n.

Definicija 3.5. *Skup*

$$\Delta^n = \{x \in R^{n+1} \mid x_0 + ... + x_n = 1 \ i \ (\forall i) x_i \geq 0\}$$

nazivamo standardni $n-$*simpleks i njegova temena su* $a_0 = (1, 0, ..., 0), a_1 = (0, 1, ..., 0), ..., a_n = (0, ...0, 1)$.

Standardni $n-$simpleks je zatvoren i ograničen skup u R^{n+1}, pa je zato i kompaktan.

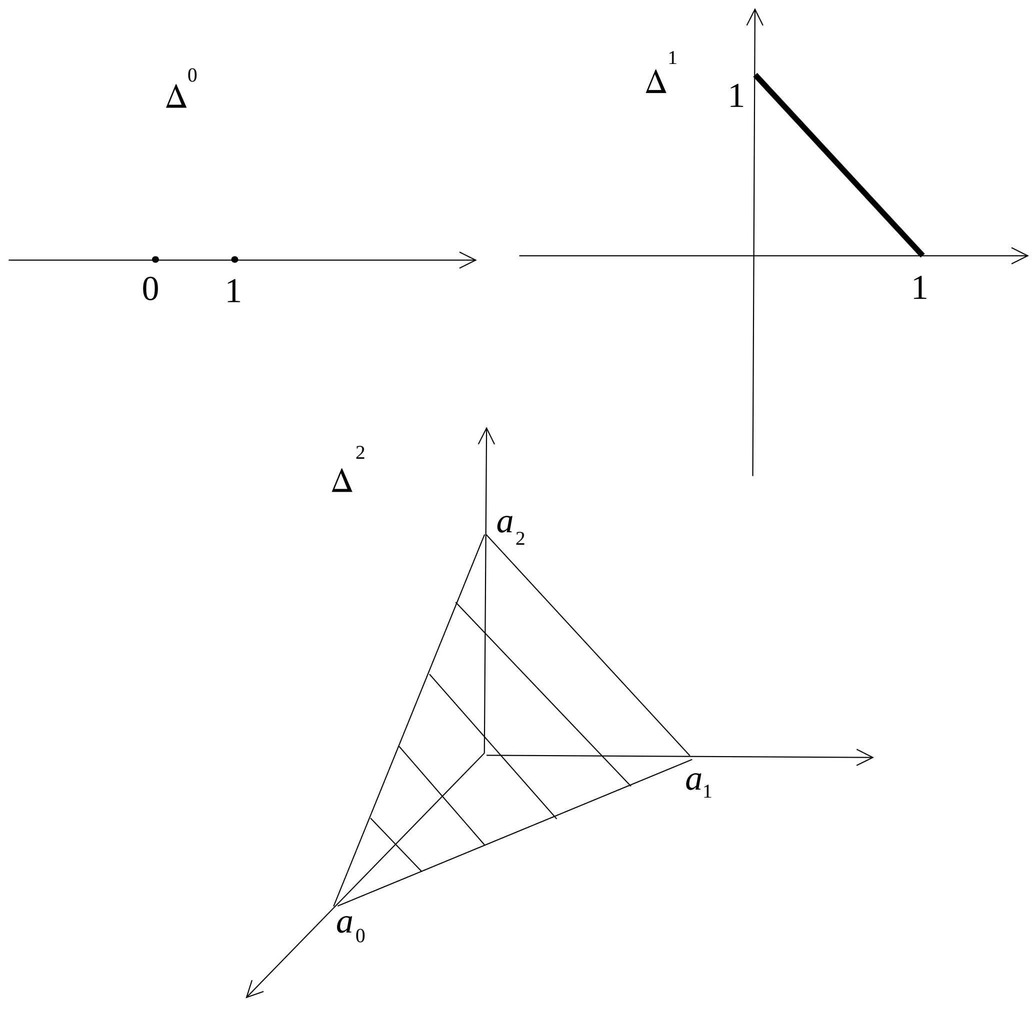
Linearna kombinacija, shvaćena kao preslikavanje

$$((\lambda_0, ..., \lambda_n), (x_0, ..., x_n)) \to \lambda_0 x_0 + ... + \lambda_n x_n$$

je neprekidna funkcija (koordinatne funkcije su polinomi), pa će takva biti i njena restrikcija u slučaju kada su vektori $x_0, ..., x_n$ fiksirani. Tako je preslikavanje

$$(\lambda_0, ..., \lambda_n) \to \lambda_0 a_0 + ... + \lambda_n a_n,$$

neprekidno, $1-1$ preslikavanje standardnog $n-$simpleksa Δ^n na simpleks σ^n. Dakle, imamo da su simpleksi Δ^n i σ^n homeomorfni, pa su i svaka dva $n-$simpleksa homeomorfni i σ^n je kompaktni podskup u R^m.



Slika 2: Standardni $n-$simpleksi

4 Simplicijalni kompleks. Poliedar

Sada ćemo definisati familiju (a ne prostor) sa pravilno presecajućim simpleksima:

Definicija 4.1. *Geometrijski simplicijalni kompleks K u R^m je konačna familija simpleksa u R^m takva da:*

1. *svaka strana simpleksa iz familije K i sama je simpleks iz te familije,*

2. *presek svaka dva simpleksa iz familije K je strana svakog od njih.*

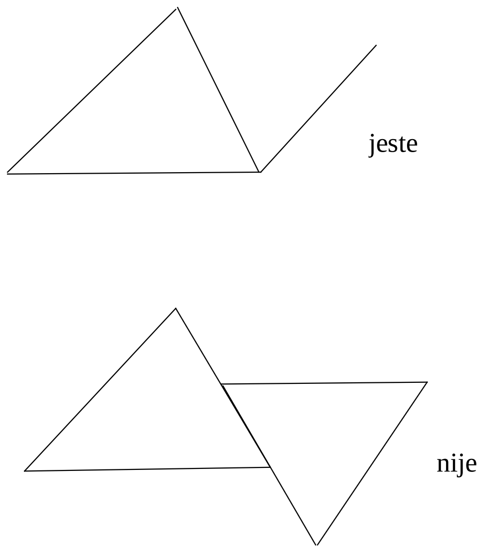
Primer 4.1.

$$K = \{(a_0, a_1, a_2), (a_0, a_1), (a_0, a_2), (a_1, a_2), (a_0), (a_1), (a_2)\}$$

jeste simplicijalni kompleks, dok

$$K = \{(a_0, a_1, a_2), (a_0, a_1), (a_0, a_2), (a_1), (a_2)\}$$

nije jer $(a_0, a_1, a_2) \in K$, dok (a_1, a_2) je strana simpleksa (a_0, a_1, a_2) i (a_1, a_2) ne pripada K, pa prvi uslov nije zadovoljen.



Slika 3: Simplicijalni kompleks

Ako kompleks K sadrži $n-$simplekse i ne sadrži nijedan $m-$simpleks za svako $m > n$, tada se kaže da je *dimenzija kompleksa* K jednaka n i piše se $dim(K) = n$, tj. dimenzija geometrijskog kompleksa K je najveći među brojevima koji su dimenzije njegovih simpleksa.

Uslov 2. možemo zameniti sledećim uslovom $2'$:

Teorema 4.1. *Familija K simpleksa u R^m je simplicijalni kompleks akko važe uslovi:*

1. *svaka strana simpleksa iz familije K i sama je simpleks iz te familije,*

2' unutrašnjosti različitih simpleksa iz familije K su disjunktni skupovi.

Dokaz. Pretpostavimo da je familija K simplicijalni kompleks, i neka $\sigma, \tau \in K$ i $x \in Int\sigma \cap Int\tau$. Tada $x \in \sigma \cap \tau = \rho$ i ρ je zajednička strana simpleksa σ i τ. Pošto $x \in Int\sigma$ sledi da je σ jedina strana tog simpleksa kojoj tačka x pripada, tj. $\rho = \sigma$. Slično, dobijamo da je $\rho = \tau$, pa zaključujemo da je $\sigma = \tau$, što je kontradikcija, znači uslov $2'$ je ispunjen.

Obratno, pretpostavimo da familija K zadovoljava uslove 1. i $2'$. Proverimo sada uslov 2.

Primetimo da svaka tačka x simpleksa σ pripada unutrašnjosti tačno jedne njegove strane. Zaista, ako $x \in \sigma = (a_0, ..., a_n)$, tada

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = \sum_{j=0}^{k} \lambda_{i_j} a_{i_j}, ((\forall j)\lambda_{i_j} > 0)$$

Neka je $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Označimo sa ρ simpleks čija su temena ona temena simpleksa σ koja su sadržana u τ. Tada je $\rho \subseteq \tau$ i $\rho \subseteq \sigma \cap \tau$. Neka $x \in \sigma \cap \tau$ i neka su s i t strane simpleksa σ i τ tako da $x \in Ints \cap Intt$. Iz $2'$ sledi $s = t$, pa se vrhovi ovih simpleksa podudaraju. Tada $s \subseteq \rho$ i $x \in \rho$. Dakle, $\rho \neq \emptyset$ i $\rho = \sigma \cap \tau$, pa je ovo ρ strana simpleksa i σ i τ. $\square$

Podkompleks kompleksa K je svaki podskup L iz K koji je kompleks.

Ako je L podkompleks kompleksa K, tada se uređeni par (K, L) zove *simplicijalni par.* Ako je K $n-$dimenzionalni kompleks, tada je $m-$*skelet* kompleksa K, kolekcija

$$K_m = \{\sigma \mid \sigma \in K, dim\sigma \leq m\}.$$

Primetimo da kompleks K nije topološki prostor. Međutim, unija svih simpleksa kompleksa K je podskup prostora R^m koji se naziva *poliedar* kompleksa K i označava sa $|K|$, i poliedar $|K|$ jeste topološki prostor sa relativnom topologijom podskupa u R^m.

Ako su σ i τ dva kompleksa polidra $|K|$ i ako se seku i presek je stranica svakog od njih, tada se kaže da su simpleksi σ i τ *pravilno spojeni.*

Kao konačna unija simpleksa prostor $|K|$ je kompaktan. Ali poliedri su više nego samo topološki prostori, jer imaju dodatnu strukturu koju određuje kompleks K. Zato sem neprekidnih ima smisla izdvojiti i posebno ona preslikavanja koja tu strukturu čuvaju.

Napomena 4.1. Primetimo da kad je $x \in |K|$, tada postoji simpleks $\sigma = (a_0, ..., a_n) \in K$ takav da $x \in \sigma$ i $x = \sum \lambda_i a_i$. Pošto x može pripasti različitim simpleksima, formalno, linearne kombinacije njihovih temena koje je predstavljaju, različite su. Prema uslovu $2'$, postoji jedinstveni simpleks iz K koji tačku x sadrži u svojoj unutrašnjosti i ona se predstavlja kao linearna kombinacija njegovih temena u kojoj su svi skalari različiti od nule. Sve druge linearne kombinacije koje je predstavljaju, razlikuju se od nje sabircima sa skalarima jednakim nuli.

Definicija 4.2. *Neka su K i L simplicijalni kompleksi. Preslikavanje $f : |K| \to |L|$ naziva se simplicijalno ako su ispunjeni uslovi:*

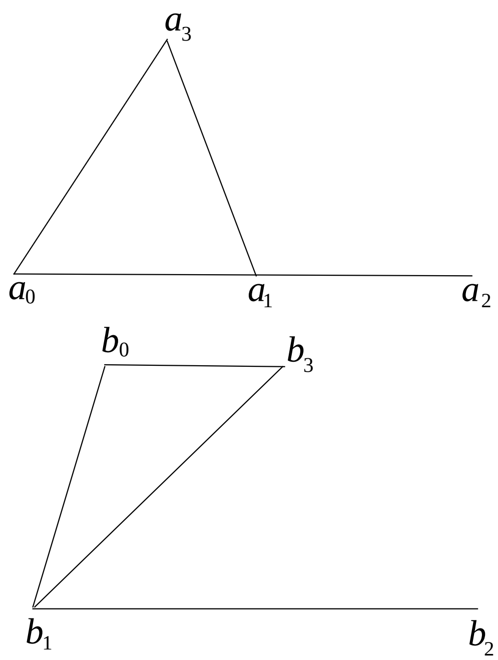
(i) ako su $a_0, ..., a_n$ temena simpleksa iz K, tada su $f(a_0), ..., f(a_n)$ temena (ne obavezno različita) simpleksa iz L.

(ii) ako je $x = \sum \lambda_i a_i \in |K|$, tada je $f(x) = \sum \lambda_i f(a_i)$.

Kako je $f \restriction \sigma$ neprekidno za svako $\sigma \in K$, to je i $f : |K| \to |L|$ neprekidno. Dakle, svako simplicijalno preslikavanje je neprekidno.

4.1 Apstraktni simplicijalni kompleks

Na početku smo pominjali šeme presecanja. Da bi to doveli do preciznog smisla, posmatrajmo sledeća dva poliedra



Slika 4: Simplicijalno homeomorfni poliedri

Lako je videti da su ova dva poliedra simplicijalno homeomorfni i da je homeomorfizam određen sa $f(a_i) = b_i$. Obrazložimo kako smo ovo zaključili:

Prvo smo uočili da oba kompleksa imaju isti skup temena

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}.$$

Uočili smo simplekse, zanemarujući njihova geometrijska svojstva, tj. uzeli smo ih kao skupove tačaka koje su njihova temena. Tako se, opet pišući a_i i b_i kao v_i, dobija u oba slučaja ista familija skupova (simpleksa)

$$\Sigma = \{\{v_0, v_1, v_3\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_3\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$$

Korespodencija $f(a_i) = b_i$ može se uzeti kao jednačenje oznaka, što smo i uradili, pišući v_i. Analiza ovog primera motiviše uvođenje sledećeg pojma.

Definicija 4.3. *Apstraktni simplicijalni kompleks je par $\mathcal{K} = (V, \Sigma)$, gde je V konačan skup, a Σ familija njegovih podskupova sa svojstvima*

1) $(\forall v \in V)\{v\} \in \Sigma$,

2) $\sigma \in \Sigma$ *i* $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Tačke $v \in V$ nazivamo vrhovi kompleksa $\mathcal{K}$, a članove σ familije Σ *apstraktni simpleksi.*

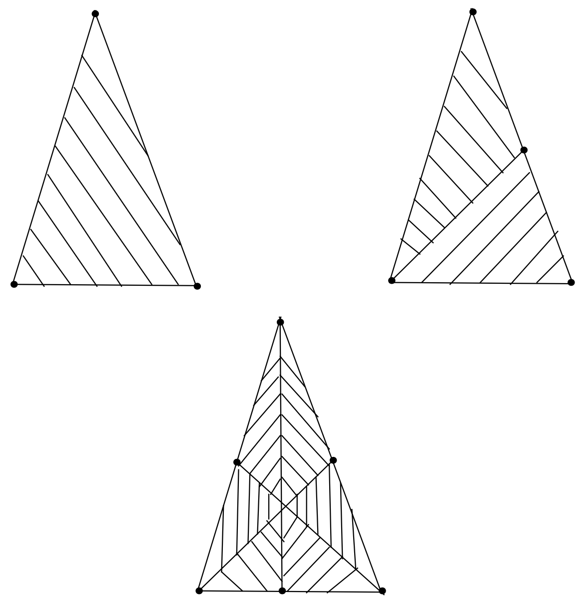
Simpleks $\sigma = \{v_0, ..., v_n\}$ je dimenzije n, a ako je n najveći među dimenzijama simpleksa $\sigma \in \Sigma$, onda je $dim\mathcal{K} = n$.

U definicijama govorimo o geometrijskim i apstraktnim kompleksima (i simpleksima), ali ćemo to skraćivati, govoreći prosto kompleks (i simpleks), sem u kontekstu gde je tu razliku potrebno isticati.

Neka je σ^n geometrijski simpleks. Familija svih njegovih strana je geometrijski simplicijalni kompleks, koji se označava i sa $K(\sigma^n)$.

4.2 Baricentrična podela

Različiti kompleksi, kao što je slučaj sa sledećim



Slika 5: Različiti kompleksi sa istim poliedrom

mogu imati isti poliedar. Kompleks i nije ništa drugo do podela poliedra na simplekse. Jedna podela je sitnija od druge, ako su simpleksi druge podele unije simpleksa te prve, sitnije podele.

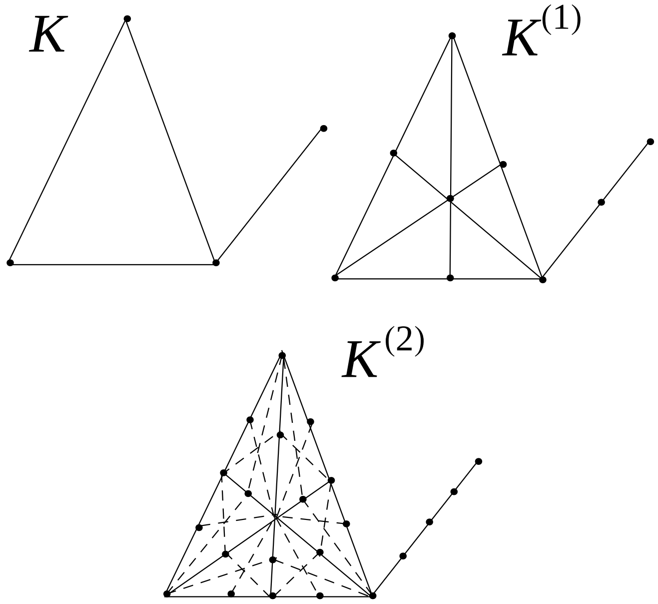
Definicija 4.4. *Neka je K geometrijski kompleks u R^m. Kompleks K' je simplicijalna podela kompleksa K ako su ispunjeni uslovi:*

(i) svaki simpleks kompleksa K' sadržan je u nekom simpleksu kompleksa K,

(ii) svaki simpleks kompleksa K je unija simpleksa kompleksa K'.

Neka je K simplicijalni kompleks u R^m. Niz simpleksa $\sigma_0, ..., \sigma_k$ je uzlazni ako je za svako i, simpleks σ_i strana simpleksa σ_{i+1}. Za uzlazni niz $\sigma_0, ..., \sigma_k$ kompleksa K dobijamo $k-$simpleks u R_m pomoću baricentara $(\hat{\sigma_0}, ..., \hat{\sigma_k}$, koji zovemo *podeoni simpleks* kompleksa K. Familija svih podeonih simpleksa kompleksa K, označena sa $K^{(1)}$, je simplicijalni kompleks koji je simplicijalna podela kompleksa K.

Kompleks $K^{(1)}$ naziva se *prva baricentrična podela* kompleksa K. Baricentrična podela kompleksa $K^{(1)}$, tj. kompleks $(K^{(1)})^1$ označava se sa $K^{(2)}$ i naziva *druga baricentrična podela* kompleksa K. Induktivno, ako je za $r > 1$, $K^{(r-1)}$ baricentrična podela kompleksa K reda $r-1$, tada je $K^r = (K^{(r-1)})^{(1)}$ baricentrična podela kompleksa K reda r.



Slika 6: Baricentrična podela

Prelazeći sa jedne podele na onu višeg reda, simpleksi se razbijaju u delove koji su simpleksi manjeg dijametra. Tako podele sve višeg reda postaju sve sitnije, a dijametri podeonih simpleksa teže nuli.

Definicija 4.5. *Maksimum dijametra simpleksa kompleksa* K *se naziva norma kompleksa i označava sa* $\|K\|$*, tj.*

$$\|K\| = max\{diam(\sigma) \mid \sigma \in K\}.$$

Osobine:

1) *Dijametar geometrijskog simpleksa* $\sigma = (a_0, ..., a_n)$ *je maksimum rastojanja njegovih temena.*

   Pošto je σ kompaktan skup, postoje tačke $x_0, y_0 \in \sigma$ takve da je $diam(\sigma) = \|x_0 - y_0\|$. Neka je $x_0 = \sum \lambda_i a_i, z_0 = \sum \mu_i a_i$. Biće

$$diam(\sigma) = \|x_0 - y_0\| = \|x_0 - \sum \mu_i a_i\| = \| \sum \mu_i (x_0 - a_i)\|$$

$$\leq \sum \mu_i \|x_0 - a_i\| \leq \max_i \|x_0 - a_i\| = \|x_0 - a_{i_0}\|$$

$$= \| \sum \lambda_i a_i - a_{i_0}\| \ \leq \max_i \|a_i - a_{i_0}\| = \|a_{j_0} - a_{i_0}\| \leq diam(\sigma).$$

Strane dimenzije jedan nazivamo ivice simpleksa, pa smo dokazali da je dijametar simpleksa jednak dužini njegove najduže ivice, jer imamo

$$diam(\sigma) = \|x_0 - y_0\| \leq \|a_{j_0} - a_{i_0}\| \leq diam(\sigma).$$

2) *Za simpleks $\sigma = (a_0, ..., a_n)$, dijametri njegovih podeonih simpleksa ne premašuju $\frac{n}{n+1} diam(\sigma)$.*

Zaista, neka je $\sigma' = (\hat{\tau}_0, ..., \hat{\tau}_k)$ podeoni simpleks simpleksa σ, gde je

$$\hat{\tau}_p = \frac{a_0 + ... + a_p}{p+1}.$$

Iz prethodnog,

$$diam(\sigma') = \|\hat{\tau}_p - \hat{\tau}_q\| = \|\frac{a_0 + ... + a_p}{p+1} - \hat{\tau}_q\|$$

$$= \|\frac{(a_0 - \tau_q) + ... + (a_p - \tau_q)}{p+1}\| \leq \frac{\|a_0 - \tau_q\| + ... + \|a_p - \tau_q\|}{p+1} \leq$$

$$\leq \max_s \|a_{i_s} - \hat{\tau}_q\| = \|a_{i_t} - \hat{\tau}_q\| = \|a_{i_t} - \frac{a_{i_0} + ... + a_{i_t} + ... + a_{i_q}}{q+1}\|$$

$$\leq \frac{\|a_{i_t} - a_{i_0}\| + ... + \|a_{i_t} - a_{i_t}\| + ... + \|a_{i_t} - a_{i_q}\|}{q+1}$$

$$\leq \frac{q \cdot \max_l \|a_{i_t} - a_{i_l}\|}{q+1} \leq \frac{n}{n+1} diam(\sigma).$$

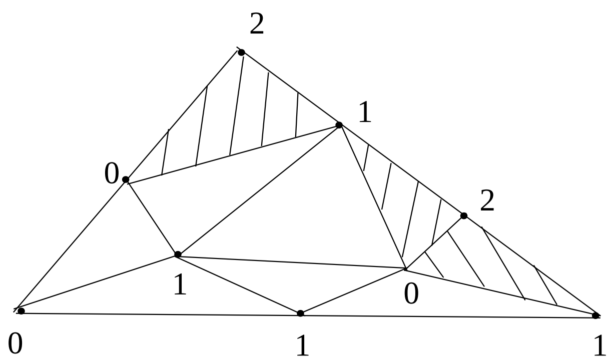
Otuda, $\|K^{(1)}\| \leq \frac{n}{n+1}\|K\|$, pa induktivno $\|K^{(r)}\| \leq (\frac{n}{n+1})^r \cdot \|K\|$.

5 Špernerova lema

Sledeća tzv. *Špernerova*[5] *teorema* je kombinatornog karaktera i odnosi se na proizvoljne (a ne samo baricentrične) podele kompleksa $K(\sigma^n)$

Teorema 5.1. *Neka je K neka triangulacija*[6] *$n-$simpleksa $\sigma^n = (a_0, ..., a_n)$ (npr. $K = K(\sigma^n)$), i neka je φ numeracija temena kompleksa K u skupu $\{0, 1, ..., n\}$ takva da za svako teme(vrh) v, ako v pripada unutrašnjosti simpleksa $(a_{i_0}, ..., a_{i_k})$, tada $\varphi(v) \in \{i_0, i_1, ..., i_n\}$. Tada broj $\alpha(0, 1, ..., n)$ svih $n-$simpleksa u K numerisanih sa $0, 1, ..., n$ je neparan.*

Dokaz.



Slika 7: Triangulacija trougla

Neka je $\beta(\sigma)$ broj $(n-1)-$strana $n-$simpleksa σ u K čija su temena označena sa $0, 1, ..., n-1$. Simpleks čija su temena označena različitim ciframa zvaćemo *reprezentativan simpleks,* na slici 7. reprezentativni simpleksi su osenčeni. Ako je σ reprezentativan simpleks, tada je $\beta(\sigma) = 1$, inače je

[5]Emanuel Sperner (1905 - 1980), nemački matematičar

[6]Razbijanje geometrijske forme na simplekse koji pravilno naležu jedan na drugi naziva se triangulacija. Kažemo da simpleksi pravilno naležu jedan na drugi ukoliko su ili disjunktni ili se seku po zajedničkoj strani

$\beta(\sigma) = 0$ ili $\beta(\sigma) = 2$. Pojasnimo ovo na primeru triangulacije sa slike. Ako trougao iz triangulacije na slici ima sva temena različito označena onda on ima samo jednu stranicu označenu sa 0 i 1, međutim ako mu temena nisu različito označena on će imati ili dve stranice označene sa 0 i 1 ili neće imati nijednu stranicu tako označenu. Ovo važi i za triangulaciju $n-$simpleksa.

Otuda

$$\alpha(0, 1, ..., n) \equiv \sum_{\sigma \in K} \beta(\sigma)(mod 2).$$

Pošto $(n-1)-$simpleksi koji nisu na $\sigma^{n-1} = (a_0, ..., a_{n-1})$ su zajednička strana dva $n-$simpleksa, to je

$$\sum \beta(\sigma) \equiv \alpha(0, 1, ..., n-1)(mod 2).$$

Kako je $\alpha(0) = 1$, to je $\alpha(0, 1, ..., n) \equiv 1(mod 2)$. □

6 Brauerova teorema

Neka je $f : X \to X$ preslikavanje prostora X u sebe. Ako postoji tačka $x \in X$, takva da je $f(x) = x$, onda se ta tačka naziva *fiksna tačka* preslikavanja f, a za preslikavanje f se tada kaže da ima fiksnu tačku.

Definicija 6.1. *Prostor X ima svojstvo fiksne tačke ako svako neprekidno preslikavanje $f : X \to X$ ima fiksnu tačku, tj.* $(\exists x \in X) f(x) = x$.

Ovo svojstvo je *topološka invarijanta,*tj. kada prostor X ima svojstvo fiksne tačke imaće to svojstvo i svaki njemu homeomorfan prostor.

Zaista, neka X ima svojstvo fiksne tačke i neka je $h : X \approx Y$. Neka je $f : Y \to Y$ neko proizvoljno neprekidno preslikavanje. Tada,

$$h^{-1} \circ f \circ h$$

je neprekidno, i postoji $x \in X$ tako da $h^{-1} \circ f \circ h(x) = x$, tj. $f(h(x)) = h(x)$, $h(x) \in Y$, pa i Y ima svojstvo fiksne tačke.

Dokazaćemo da $n-$simpleks, pa prema tome i svaki njemu homeomorfan prostor, ima svojstvo fiksne tačke. Za ovaj dokaz će nam trebati tvrđenje koje se naziva lema Knaster[7]-Kuratovski[8]-Mazurkjevič[9], a što ćemo kraće zapisivati kao KKM lema.

[7]Bronislaw Knaster (1893 - 1990), poljski matematičar

[8]Kazimierz Kuratowski (1896 - 1980), poljski matematičar

[9]Stefan Mazurkiewicz (1888 - 1945), poljski matematičar

Lema 6.1. ***(KKM lema)*** *Neka su $F_0, F_1, ..., F_n$ zatvoreni podskupovi simpleksa $\sigma^n = (a_0, a_1, ..., a_n)$ takvi da za svaku stranu $(a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_k})$ važi*

$$(a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_k}) \subseteq F_{i_0} \cup ... \cup F_{i_k},$$

tada je $F_0 \cap F_1 \cap ... \cap F_n \neq \emptyset$.

Dokaz. Neka je λ Lebegov broj pokrivača $\{F_0, F_1, ..., F_n\}$. Neka je K triangulacija simpleksa σ^n takva da je $\|K\| < \lambda$. Uočimo $\varphi : v(K) \to \{0, 1, ..., n\}$ tako da $v \in F_{\varphi(v)}$.

Iz *Špernerove leme,* sledi da postoji σ iz K sa različito označenim vrhovima. Tada je $\sigma \cap F_i \neq \emptyset, \forall i = 0, 1, ..., n$.

Kako je $diam(\sigma) < \lambda$, λ Lebegov broj, sledi

$$F_0 \cap F_1 \cap ... \cap F_n \neq \emptyset.$$

□

Sada možemo da dokažemo da $n-$simpleks ima svojstvo fiksne tačke.

Teorema 6.1. ***(Brauerova teorema)*** *$n-$simpleks $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ ima svojstvo fiksne tačke.*

Dokaz. Neka je $f : \sigma \to \sigma$ neprekidno preslikavanje.

Za

$$x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n \text{ i } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$$

neka je

$$f(x) = \lambda_0^* a_0 + \lambda_1^* a_1 + ... + \lambda_n^* a_n \text{ i } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^* = 1, \lambda_i^* \geq 0.$$

Neka je $F_i = \{x \in \sigma \mid \lambda_i^* \leq \lambda_i\}$. Tada je F_i zatvoren, jer je f neprekidna, i za

$$x \in (a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_k})$$

sledi

$$\lambda_{i_0} + \lambda_{i_1} + ... + \lambda_{i_k} = 1$$

pa

$$\lambda_{i_0}^* + \lambda_{i_1}^* + ... + \lambda_{i_k}^* \leq 1 = \lambda_{i_0} + \lambda_{i_1} + ... + \lambda_{i_k}$$

pa za neko $i_s : \lambda_{i_s}^* \leq \lambda_{i_s}$, tj. $x \in F_{i_s}$.

Dakle,

$$(a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_k}) \subseteq F_{i_0} \cup ... \cup F_{i_s}.$$

Iz *KKM leme,* sledi

$$F_0 \cap F_1 \cap ... \cap F_n \neq \emptyset.$$

i za

$$x_0 \in F_0 \cap F_1 \cap ... \cap F_n$$

važi:

$$x_0 = \bar{\lambda}_0 a_0 + ... + \bar{\lambda}_n a_n, f(x_0) = \bar{\lambda}_0^* a_0 + ... + \bar{\lambda}_n^* a_n$$

a iz

$$\bar{\lambda}_0^* \leq \bar{\lambda}_0, ..., \bar{\lambda}_n^* \leq \bar{\lambda}_n$$

i

$$1 = \bar{\lambda}_0^* + ... + \bar{\lambda}_n^* \leq \bar{\lambda}_0 + ... + \bar{\lambda}_n = 1$$

sledi $(\forall i)\bar{\lambda}_i^* = \bar{\lambda}_0$, tj. $f(x_0) = x_0$ □

Iz $\sigma \approx B^n$ sledi i B^n ima svojstvo fiksne tačke.

Kao posledicu *Brauerove teoreme* dobijamo sledeće tvrđenje.

Teorema 6.2. *Sfera S^n i lopta B^n nisu homeomorfni prostori.*

Dokaz. Kao što smo videli B^n ima svojstvo fiksne tačke. S^n nema svojstvo fiksne tačke jer antipodalno preslikavanje $f : S^n \to S^n, f(x) = -x$ je neprekidno i nema nijednu fiksnu tačku. Pošto se radi o topološkom svojstvu, sledi da sfera S^n i lopta B^n nisu homeomorfni prostori. □

Dokazuujući sledeću teoremu pokazujemo da je svojstvo fiksne tačke nasledno svojstvo.

Teorema 6.3. *Neka je A retrakt topološkog prostora X. Ako X ima svojstvo fiksne tačke, tada i A ima to svojstvo.*

Dokaz. Neka je $f : A \to A$ neprekidno preslikavanje, $r : X \to A$ retrakcija i $i : A \hookrightarrow X$ inkluzija. Tada $g = i \circ f \circ r : X \to X$ je neprekidno, pa postoji $x_0 \in X, g(x_0) = x_0$. Kako je $g(X) \subseteq A$, to $x_0 \in A$ i $r(x_0) = x_0$. Pa

$$x_0 = i(f(r(x_0))) = i(f(x_0)) = f(x_0),$$

tj. $x_0 \in A$ je fiksna tačka preslikavanja $f : A \to A$. □

Kao posledicu prethodne teoreme dobijamo sledeće tvrđenje.

Teorema 6.4. ***(Borsukova**[10] **teorema)*** *Ne postoji retrakcija $r : B^{n+1} \to S^n$.*

Dokaz. B^{n+1} ima, dok S^n nema svojstvo fiksne tačke, pa postojanje retrakcije protivreči prethodnoj teoremi. □

[10]Karol Borsuk (1905 - 1982), poljski matematičar

Literatura

[1] Marjanović Milosav, *Topologija*, Matematički fakultet, Beograd, 1990.

[2] Mišić Miodrag, *Topologija*, Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac, 1995.

[3] http://www.wikipedia.org