Univerzitet u Kragujevcu
Prirodno–matematički fakultet

DIPLOMSKI RAD

Nesvojstveni integral

Mentor:
Dr Mirjana Pavlović

Kandidat:
Marta Milošević 47/00

KRAGUJEVAC, 2011.

Sadržaj

1. Nesvojstveni jednostruki integral

U definiciji određenog integrala $\int\limits_a^b f(x)dx$ uzimali smo da je oblast integrisanja konačna, a podintegralna funkcija $f(x)$ definisana i ograničena na konačnom intervalu $[a, b]$. Ukoliko jedan od ovih uslova nije ispunjen, definicija određenog integrala gubi smisao, jer integralne sume neograničenih funkcija nemaju konačan limes, a beskonačne intervale ne možemo podeliti na n konačnih intervala. Da bismo obuhvatili ovakve slučajeve (kod kojih granice integracije nisu konačne ili podintegralna funkcija nije konačna), uvodimo pojam nesvojstvenog integrala.

1.1. Definicija, primeri i osobine

Definicija 1. *Neka je funkcija f definisana u intervalu $[a, b)$ i integrabilna na svakom segmentu $[a, \beta] \subset [a, b)$. Ako postoji limes*

$$\lim_{\beta\to b-0} \int\limits_a^\beta f(x)dx$$

on se naziva nesvojstvenim integralom funkcije f na intervalu $[a, b)$ i označava sa

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Često se simbol $\int\limits_a^b f(x)dx$ naziva nesvojstvenim integralom sa singularitetom u tački b i ukoliko $\lim\limits_{\beta\to b-0} \int\limits_a^\beta f(x)dx$ postoji i konačan je, kaže se da nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergira, u suprotnom slučaju se kaže da $\int\limits_a^b f(x)dx$ divergira. Inače, nije teško pokazati da u slučaju da je funkcija f definisana na segmentu $[a, b]$ i da je integrabilna u Rimanovom smislu na njemu, važi $\lim\limits_{\beta\to b-0} \int\limits_a^\beta f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$, pa zato ne može doći do zabune zbog ovog "dvostrukog" korišćenja simbola $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Slično se definiše nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ sa singularitetom u tački a.

Primer 1. Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, koji za $\alpha > 0$ ima singularitet u tački 0.
Najpre, za $\alpha \neq 1$ odredimo

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})$$

Prelaskom na limes imamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-\alpha}(1-e^{1-\varepsilon}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Dalje je

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\ln\varepsilon) = +\infty.$$

Dakle, nesvojstveni integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira za $\alpha < 1$ i divergira za $\alpha \geqslant 1$.▲

Definicija 2. *Neka je funkcija f definisana u intervalu $[a, +\infty)$ i neka je integrabilna na svakom segmentu $[a, \beta] \subset [a, +\infty)$. Ako postoji limes*

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_a^\beta f(x)dx,$$

on se naziva nesvojstvenim integralom funkcije f na intervalu $[a, +\infty)$ i označava sa

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Često se simbol $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ naziva nesvojstvenim integralom sa singularitetom $+\infty$. Ako $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \int\limits_a^\beta f(x)dx$ postoji i konačan je, kaže se da taj nesvojstveni integral konvergira, u suprotnom slučaju divergira.
Slično se definiše i nesvojstveni integral $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$.

Primer 2. Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Neka je $\alpha \neq 1$. Tada je

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_1^\beta \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(\beta^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Kako je $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \int\limits_1^\beta \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\beta\to+\infty} \ln\beta = +\infty$, to možemo reći da $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leqslant 1$.▲

Ubuduće ćemo za oba nesvojstvena integrala, iz Definicije 1 i Definicije 2, koristiti simbol $\int\limits_a^b f(x)dx$ i govoriti da taj integral ima singularitet u tački b, ako je funkcija neograničena na intervalu $[a, b)$, ili $b = +\infty$. Drugim rečima, ako je funkcija f definisana na konačnom ili beskonačnom intervalu $[a, b)$ i integrabilna na svakom segmentu $[a, \beta] \subset [a, b)$ onda nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergira ako postoji konačan $\lim\limits_{\beta\to b}\int\limits_a^\beta f(x)dx$, u suprotnom slučaju nesvojstveni integral divergira. Umesto $\lim\limits_{\beta\to b-0}\int\limits_a^\beta f(x)dx$ (ako je b konačan broj), odnosno $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int\limits_a^\beta f(x)dx$ (ako je $b = +\infty$), pisaćemo kratko $\lim\limits_{\beta\to b}\int\limits_a^\beta f(x)dx$.
Sve ovo važi i za integrale čiji je singularitet donja granica.

Sledeći stav opisuje osobine nesvojstvenog integrala:

Stav 1. *Neka su* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *i* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *nesvojstveni integrali sa singularitetom u tački* b. *Tada:*
1° *Ako ti integrali konvergiraju, važi jednakost*

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)dx + \mu\int\limits_a^b g(x)dx, \text{ za } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2° *Ako je* $a < c < b$, *tada* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *konvergira ako i samo ako konvergira* $\int\limits_c^b f(x)dx$ *i važi* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.
3° *Ako su* f *i* g *glatke funkcije i postoji konačan limes* $\lim\limits_{x\to b}(f\cdot g)(x)$, *onda* $\int\limits_a^b (f\cdot g')(x)dx$ *konvergira ako i samo ako konvergira* $\int\limits_a^b (f'\cdot g)(x)dx$. *U tom slučaju važi jednakost*

$$\int\limits_a^b (f\cdot g')(x)dx = (fg)(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b (f'\cdot g)(x)dx,$$

gde $(fg)(x)\Big|_a^b$ *znači* $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a)$.

Dokaz. 1° Tvrđenje se dobija iz jednakosti

$$\int\limits_a^\beta (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda\int\limits_a^\beta f(x)dx + \mu\int\limits_a^\beta g(x)dx$$

prelaskom na limes kad $\beta \to b$.
2° Uzmimo β tako da je $a < c < \beta < b$. Tada je

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx$$

pa tvrđenje ponovo sledi prelaskom na $\lim\limits_{\beta \to b}$.
3° Iz jednakosti

$$\int_a^\beta (f \cdot g')(x)dx = (fg)(x)\Big|_a^\beta - \int_a^\beta (f' \cdot g)(x)dx$$

sledi

$$\lim_{\beta \to b} \int_a^\beta (f \cdot g')(x)dx = \lim_{\beta \to b}(fg)(\beta) - (fg)(a) - \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta (f' \cdot g)(x)dx.$$

Kako $\lim\limits_{\beta \to b}(fg)(\beta)$ postoji, to postoji i $\lim\limits_{\beta \to b} \int\limits_a^\beta (f \cdot g')(x)dx$ ako i samo ako postoji $\lim\limits_{\beta \to b} \int\limits_a^\beta (f' \cdot g)(x)dx$. ∎

Primer 3. 1° Integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$ konvergira, jer možemo napisati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$$

a oba nesvojstvena integrala sa desne strane konvergiraju.
2° Integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, divergira. Naime, napišimo

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Za $\alpha \geqslant 1$ divergira prvi, a za $\alpha \leqslant 1$ divergira drugi integral na desnoj strani jednakosti.
3° Za nesvojstveni integral $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ imamo

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \blacktriangle$$

Napomenimo jos i sledeće: Ako je funkcija f integrabilna na svakom segmentu oblika $[a, \alpha] \subset [a, c)$ i na svakom segmentu oblika $[\beta, b] \subset (c, b]$, $a < c < b$, definisaćemo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

ukoliko integrali s desne strane konvergiraju.

1.2. Kriterijumi za konvergenciju

U cilju utvđivanja da li dati nesvojstveni integral konvergira ili ne, koriste se razni kriterijumi.

Teorema 1. (Košijev[1] kriterijum konvergencije integrala) *Da bi nesvojstveni integral* $\int_a^b f(x)dx$ *konvergirao, neophodno je i dovoljno da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* β_0, $a < \beta_0 < b$, *tako da za svaki par* β_1, β_2, $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < b$, *važi*

$$\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \leqslant x < b$. Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira ako i samo ako postoji konačan $\lim_{x\to b} \varphi(x)$. To je ispunjeno ako i samo ako je ispunjen Košijev uslov

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\beta_0)(\forall\beta_1,\, \beta_2)(\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < b \Rightarrow |\varphi(\beta_2) - \varphi(\beta_1)| < \varepsilon).$$

No,

$$\varphi(\beta_2) - \varphi(\beta_1) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx. \blacksquare$$

Jedan dovoljan uslov za konvergenciju daje:

Stav 2. *Neka je* $|f(x)| \leqslant g(x)$, $x \in [a, b)$. *Ako* $\int_a^b g(x)dx$ *konvergira, onda i* $\int_a^b f(x)dx$ *konvergira.*

Dokaz. Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. Kako integral $\int_a^b g(x)dx$ konvergira, to postoji β_0, tako da za $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < b$ važi $\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$. Iz pretpostavke stava sledi

$$\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx\right| \leqslant \int_{\beta_1}^{\beta_2} |f(x)|\, dx \leqslant \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(x)dx < \varepsilon. \blacksquare$$

Definicija 3. *Nesvojstveni integral* $\int_a^b f(x)dx$ *apsolutno konvergira ako konvergira integral* $\int_a^b |f(x)|\, dx$.

[1] A. L. Cauchy (1789 – 1857), francuski matematičar

Iz Stava 2 neposredno sledi:

Posledica 1. *Ako* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *apsolutno konvergira, onda on i konvergira.*

Primer 4. 1° Neka je $|f(x)| \leqslant \frac{k}{x^\alpha}$, $k = const$, $\alpha > 1$, za $x \in [a, +\infty)$, $a > 0$. Tada integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergira. Naime, integral $\int\limits_a^{+\infty} \frac{k}{x^\alpha}dx = k\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira.
2° Integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ konvergira. Ovo sledi iz nejednakosti $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ i činjenice da $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ konvergira. ▲

Pitanje apsolutne konvergencije svodi se na pitanje konvergencije nesvojstvenih integrala nenegativnih funkcija. Sledi nekoliko kriterijuma za konvergenciju integrala takvih funkcija.

Stav 3. *Za konvergenciju nesvojstvenog integrala* $\int\limits_a^b f(x)dx$, $f(x) \geqslant 0$ *za* $x \in [a, b)$, *potrebno je i dovoljno da postoji broj* k, *tako da je*

$$\int\limits_a^\beta f(x)dx \leqslant k, \quad a \leqslant \beta < b.$$

Dokaz. Zbog $f(x) \geqslant 0$ za $x \in [a, b)$, funkcija $\varphi(\beta) = \int\limits_a^\beta f(x)dx$ je rastuća. Konačan limes $\lim\limits_{\beta \to b} \varphi(\beta)$ postoji ako i samo ako je ona ograničena. ■

Stav 4. *Neka je* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *za* $a \leqslant x < b$ *i neka su*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \tag{1}$$

$$\int\limits_a^b g(x)dx \tag{2}$$

nesvojstveni integrali sa singularitetom b. *Tada iz konvergencije integrala* (2) *sledi konvergencija integrala* (1), *a iz divergencije integrala* (1) *sledi divergencija integrala* (2).

Dokaz. Označimo $\varphi(\beta) = \int\limits_a^\beta f(x)dx$, $\psi(\beta) = \int\limits_a^\beta g(x)dx$, $a \leqslant \beta < b$. Ako integral (2) konvergira, onda postoji broj k tako da je $\varphi(\beta) \leqslant \psi(\beta) \leqslant k$, pa integral (1) konvergira. Drugo tvrđenje stava je kontrapozicija prvog. ■

Primetimo da se, na osnovu Stava 1.2°, u Stavu 4 uslov

$$a \leqslant x < b \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

može zameniti uslovom

$$a_0 \leqslant x < b \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

za neki broj a_0, $a < a_0 < b$.

Stav 5. *Dati su nesvojstveni integrali* (1) *i* (2)*, pri čemu je* $g(x) > 0$*, za* $x \in [a, b)$*. Ako postoji* $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$*,* $0 \leqslant c \leqslant +\infty$*, onda iz konvergencije integrala* (2)*, pri* $c < +\infty$*, sledi konvergencija integrala* (1)*, a iz divergencije integrala* (2)*, pri* $c > 0$*, sledi divergencija integrala* (1)*. Specijalno, ako je* $0 < c < +\infty$*, onda integrali* (1) *i* (2) *konvergiraju, odnosno divergiraju, istovremeno.*

Dokaz. Neka integral (2) konvergira i pri tome je $0 \leqslant c < +\infty$. Kako je $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, to za $\varepsilon > 0$ postoji $\beta_0 < b$, tako da je

$$c - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + \varepsilon, \quad \text{za} \quad \beta_0 < x < b$$

Odavde je

$$f(x) < (c + \varepsilon) g(x), \quad \beta_0 < x < b,$$

pa iz konvergencije integrala $\int\limits_a^b g(x)dx$ (a samim tim i integrala $\int\limits_a^b (c+\varepsilon)g(x)dx$) sledi i konvergencija integrala $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Neka integral (2) divergira i pri tom je $0 < c \leqslant +\infty$. Tada divergira i integral (1). Naime, pretpostavimo da integral (1) konvergira. Iz pretpostavke sledi

$$\lim_{x\to b} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{c}, \quad 0 \leqslant \frac{1}{c} < +\infty.$$

Prema gore dokazanom, zbog konvergencije integrala (1), konvergirao bi i integral (2), što je kontradikcija. ■

Primer 5. 1° Nesvojstveni integral $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ konvergira, jer je $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$, za $1 \leqslant x < +\infty$, a integral $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$ konvergira.

2° Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Kako je $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = 1$, a integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ konvergira, to i dati integral konvergira. ▲

Videli smo da iz apsolutne konvergencije sledi konvergencija nesvojstvenog integrala. Da obrnuto ne važi pokazuje sledeći primer:

Primer 6. Pokazati da integral $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ konvergira. U tom cilju napišimo

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Integral $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ konvergira (primer 4.2°), odakle sledi da dati integral konvergira. No, dati integral ne konvergira apsolutno. Naime, važi

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Integral $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{dx}{x}$ nije ograničen, dok je integral $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{\cos 2x}{x} dx$ ograničen (konvergencija integrala $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ dokazuje se slično kao i konvergencija integrala $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$). Dakle, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ divergira. ▲

Za nesvojstveni integral koji konvergira, ali ne konvergira apsolutno, često se kaže da konvergira uslovno. Jedan kriterijum za ispitivanje (ne apsolutne) konvergencije je:

Teorema 2. (Abel - Dirihle[2]) *Neka su funkcije f i g definisane na $[a,b)$ i integrabilne na svakom segmentu $[a,\beta] \subset [a,b)$. Za konvergenciju nesvojstvenog integrala*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$$

dovoljno je da budu ispunjeni uslovi

(D1) f je neprekidna na $[a,b)$ i ima ograničenu primitivnu funkciju;
(D2) g je glatka na $[a,b)$ i monotono teži nuli za $x \to b$;

ili

(A1) f je neprekidna na $[a,b)$ i nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergira;
(A2) g je glatka, monotona i ograničena na $[a,b)$.

Dokaz. Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi (D1)i (D2). Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Kako f ima ograničenu primitivnu funkciju, to postoji broj M, tako da je $\left|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx\right| < M$ za $a \leqslant \beta_1 < \beta_2 < b$. Funkcija $g(x)$ monotono teži nuli za $x \to b$, pa postoji $\beta_0 \in [a,b)$

[2]N. H. Abel (1802 – 1829), norveški matematičar
P. L. Dirichlet (1805 – 1859), nemački matematičar

tako da je $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ za $x > \beta_0$. Prema drugoj teoremi[3] o srednjoj vrednosti integrala za $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < b$ postoji $\xi \in (\beta_1, \beta_2)$ tako da važi jednakost

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)dx = g(\beta_1)\int_{\beta_1}^{\xi} f(x)dx + g(\beta_2)\int_{\xi}^{\beta_2} f(x)dx.$$

Odavde je

$$\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)dx\right| < |g(\beta_1)| \cdot M + |g(\beta_2)| \cdot M < \varepsilon.$$

Prema Teoremi 1, tvrđenje je dokazano.
Slično se dokazuje tvrđenje teoreme u slučaju kada su ispunjeni uslovi (A1) i (A2). ■

Teorema se može dokazati i uz slabije uslove. Naime, pretpostavke o neprekidnosti funkcije f, odnosno glatkosti funkcije g, mogu se izostaviti.

Primer 7. Nesvojstveni integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{1+x^n}dx$, $a \in \mathbb{R}$, $n > 0$, konvergira, jer funkcija $\sin ax$ (za $a \neq 0$) ima ograničenu primitivnu funkciju, a $\frac{1}{1+x^n}$ monotono teži nuli za $x \to +\infty$.▲

1.3. Nesvojstveni integral sa više singulariteta

U prethodnom odeljku je bilo reči o nesvojstvenim integralima sa jednim singularitetom, tj. sa integralom oblika $\int\limits_a^b f(x)dx$, gde $b \in \mathbb{R}$ i funkcija f je neograničena u okolini tačke b ili $b = +\infty$. U oba slučaja se kaže da je singularitet u b. Nesvojstveni integral oblika $\int\limits_a^b f(x)dx$ sa singularitetima u a i b (dakle sa dva singulariteta) se definiše na sledeći način:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

gde $a < c < b$ i on po definiciji konvergira ako konvergiraju oba integrala sa desne strane. Prema Stavu 1.2° njegova konvergencija ne zavisi od tačke $c \in (a, b)$.

U slučaju da je podintegralna funkcija neograničena u okolini jedne od unutrašnjih tačaka segmenta $[a, b]$, stavljamo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

[3]Teorema: Neka je f neprekidna, a g monotona i glatka funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada postoji $\xi \in [a, b]$, tako da važi

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

zahtevajući da svaki od integrala sa desne strane konvergira.

Primer 8. Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$$

divergira, jer prvi integral na desnoj strani divergira. ▲

1.4. Glavna vrednost integrala

Do sada smo razmatrali nesvojstvene integrale kao uopštenje Rimanovog integrala, vezujući njihovu egzistenciju sa egzistencijom odgovarajućih graničnih vrednosti. U slučajevima kada ove granične vrednosti ne postoje kao konačne, tj. kada nesvojstveni integrali ne egzistiraju, moguće je ponekad postojanje tzv. *glavne vrednosti* nesvojstvenih integrala.

Posmatrajmo najpre slučaj nesvojstvenog integrala sa jednim singularitetom u tački $c \in (a, b)$. Ako granične vrednosti

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx \quad \text{i} \quad \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

ne postoje za $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, ali postoje za $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, tj. ako postoji

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right)$$

tada kažemo da nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)dx$ postoji u smislu *Košijeve glavne vrednosti* i to označavamo sa

$$v.p. \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Slično ako funkcija nije ograničena samo u tačkama a i b, onda se, ukoliko postoji granična vrednost

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

definiše

$$v.p. \int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Ako integral $\int_a^b f(x)dx$ postoji kao nesvojstven, tada postoji i odgovarajući $v.p. \int_a^b f(x)dx$, dok obrnuto, u opštem slučaju ne važi.

Primer 9. 1° Integral $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ ne postoji kao Rimanov integral jer $\left|\frac{1}{x}\right| \to +\infty$, kada $x \to 0$. Takođe, ovaj integral ne postoji ni kao nesvojstven jer

$$\int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x} = (\log|x|)\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + (\log|x|)\Big|_{\varepsilon_2}^{1} = \log\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

nema graničnu vrednost kada ε_1 i ε_2 nezavisno teže nuli. Međutim, ako je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ imamo

$$v.p. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} dx = 0.$$

2° Odredimo

$$I = v.p. \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

Kako kvadratni trinom $x \longmapsto x^2 - 3x + 2$ ima realne nule $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, korišćenjem aditivnog svojstva integrala u odnosu na oblast integracije, dati integral se može napisati kao zbir tri integrala $I = I_1 + I_2 + I_3$, gde su

$$I_1 = v.p. \int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}, \qquad I_2 = v.p. \int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2},$$

$$I_3 = v.p. \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

Sada imamo

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{0}^{1-\varepsilon} + \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \log 2 \right) = \log\frac{1}{2}.$$

Slično,

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{2-\varepsilon} + \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{2+\varepsilon}^{3} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \log 2 \right) = \log\frac{1}{2}.$$

Najzad,

$$I_3 = \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{3}^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| - \log\frac{1}{2} = \log 2,$$

pa je $I = -\log 2$. ▲

2. Nesvojstveni višestruki integral

Kao i u slučaju funkcija jedne promenljive, i ovde je cilj da proširimo pojam Rimanovog integrala kako u slučaju kada je oblast integracije neograničena, tako i u slučaju neograničenih funkcija. Oba slučaja posmatraćemo istovremeno.

Najpre ćemo dati pojam monotonog pokrivača neke oblasti u prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definicija 4. *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ data oblast. Familija $\mathcal{D} = \{D^k \,|k = 1, 2, ...\}$ otvorenih skupova monotono pokriva oblast D ako su ispunjeni uslovi*

1° $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} D^k = D$;

2° $\overline{D^k} \subset \overline{D^{k+1}}$ *za* $k = 1, 2, ...$

Familiju $\mathcal{D}$ ćemo nazivati monotonim pokrivačem.

Definicija 5. *Neka je realna funkcija $f(x)$ definisana na oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$ i integrabilna na svakom merljivom podskupu skupa D. Posmatrajmo sve monotone pokrivače $\mathcal{D} = \{D^k \,|k = 1, 2, ...\}$ koji imaju svojstvo da je svaki $\overline{D^k}$ merljiv skup. Ako za svaku familiju $\mathcal{D}$ postoji*

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\overline{D^k}} f(x)dx$$

i ovaj limes ne zavisi od izbora familije $\mathcal{D}$, onda se on naziva nesvojstvenim višestrukim (ili n-) integralom funkcije f na skupu D i označava sa

$$\int\limits_D f(x)dx \quad ili \quad \int\!\!\int\limits_D \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \cdots dx_n.$$

Često se simbol $\int\limits_D f(x)dx$ (ako je f ili D neograničeno) naziva nesvojstvenim integralom, pa se kaže da taj nesvojstveni integral konvergira, odnosno divergira, ako gore pomenuti limes postoji (kao konačan), odnosno ne postoji ili je beskonačan.

2.1. Nesvojstveni integral nenegativnih funkcija

Teorema 3. *Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ i $f(x) \geqslant 0$, $x \in D$. Da bi nesvojstveni integral $\int\limits_D f(x)dx$ konvergirao, potrebno je i dovoljno da bar za jednu familiju $\mathcal{D} = \{D^k \,|k = 1, 2, ...\}$ koja monotono pokriva oblast D i gde su $\overline{D^k}$ merljivi skupovi, niz $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$, $a_k = \int\limits_{\overline{D^k}} f(x)dx$, bude ograničen.*

Dokaz. Ako $\int\limits_D f(x)dx$ konvergira, niz $(a_k)_k$ je konvergentan, dakle i ograničen. Pretpostavimo da je niz $(a_k)_k$ ograničen. Kako iz $\overline{D^k} \subset \overline{D^{k+1}}$ i $f(x) \geqslant 0$, $x \in D$ sledi $\int\limits_{\overline{D^k}} f(x)dx \leqslant \int\limits_{\overline{D^{k+1}}} f(x)dx$, to je taj niz rastući, pa postoji konačan $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = I$.
Uočimo neku drugu familiju $\{E^k \,|k = 1, 2, ...\}$ koja monotono pokriva oblast D i označimo

$$b_k = \int\limits_{\overline{E^k}} f(x)dx.$$

Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Nađimo k tako da je $\overline{E^{k_0}} \subset D^k$. Tada je i $b_{k_0} \leqslant a_k \leqslant I$. Dakle $(b_k)_k$ je ograničen niz. Kao rastući, ovaj niz ima limes; neka je $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = I'$. Iz prethodnog sledi da je $I' \leqslant I$. Zamenjujući uloge nizovima (a_k) i (b_k) dobijamo nejednakost $I \leqslant I'$, odakle sledi $I = I'$. ■

Primer 10. Za izračunavanje integrala

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

uočimo familiju $\{D^k \,|k = 1, 2, ...\}$, $D^k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 < k^2\}$. Tada je

$$a_k = \iint\limits_{\overline{D^k}} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

Posle prelaska na polarne koordinate imamo

$$a_k = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^k re^{-r^2}dr = \pi(1 - e^{-k^2}).$$

Očigledno $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \pi$.
Primetimo da se dati nesvojstveni integral može izračunati i kao

$$\lim_{k\to+\infty} \iint\limits_{\overline{E^k}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

gde je $E^k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|-k < x < k,\ -k < y < k\}$, $k = 1, 2, ...$ Iz

$$\iint\limits_{\overline{E^k}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}dx \int\limits_{-k}^{k} e^{-y^2}dy = \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}dx\right)^2$$

sledi

$$\pi = \lim_{k\to+\infty} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

i zatim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Ovaj integral se obično naziva Ojler-Poasonovim[4] integralom. ▲

Navedimo sada neke kriterijume poređenja za ispitivanje konvergencije nesvojstvenih integrala.

Teorema 4. *Neka su f i g dve nenegativne funkcije definisane u oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$, integrali $\int_D f(x)dx$ i $\int_D g(x)dx$ su nesvojstveni i važi nejednakost $f(x) \leqslant g(x), x \in D$. Ako $\int_D g(x)dx$ konvergira, onda konvergira i $\int_D f(x)dx$.*

Dokaz. Za monotoni pokrivač $\{D^k \,|k = 1, 2, ...\}$ skupa D, niz $\left(\int_{\overline{D^k}} g(x)dx\right)_k$ konvergira. Kako je

$$\int_{\overline{D^k}} f(x)dx \leqslant \int_{\overline{D^k}} g(x)dx,$$

to je niz $\left(\int_{\overline{D^k}} f(x)dx\right)_k$ ograničen, pa kako je i monoton, on je i konvergentan. ■

Posledica 2. *Ako funkcije f i g zadovoljavaju uslove Teoreme 4 i $\int_D f(x)dx$ divergira, onda i $\int_D g(x)dx$ divergira.*

Stav 6. *Ako je $f(x) \geqslant 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\int_D f(x)dx$ konvergira i $E \subset D$ ima monoton pokrivač, onda i $\int_E f(x)dx$ konvergira i važi nejednakost*

$$\int_E f(x)dx \leqslant \int_D f(x)dx.$$

Dokaz. Konstruišimo funkciju $\varphi : D \to \mathbb{R}$ formulom

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in D \backslash E. \end{cases}$$

Očigledno je $\varphi(x) \leqslant f(x)$ za $x \in D$, odakle sledi

$$\int_D \varphi(x)dx \leqslant \int_D f(x)dx.$$

[4] L. Euler (1707 – 1783), švajcarski fizičar i matematičar
S. D. Poisson (1781 – 1840), francuski fizičar i matematičar

S druge strane, za proizvoljan monoton pokrivač $\{D^k \,|k = 1, 2, ...\}$ skupa D važi

$$\int\limits_{\overline{D^k\cap E}} \varphi(x)dx \leqslant \int\limits_{\overline{D^k}} \varphi(x)dx.$$

Prelaskom na limes za $k \to +\infty$ imamo

$$\int\limits_{E} f(x)dx \leqslant \int\limits_{D} f(x)dx. \blacksquare$$

2.2. Nesvojstveni integral funkcija promenljivog znaka

Definicija 6. *Nesvojstveni integral* $\int\limits_D f(x)dx$ *apsolutno konvergira ako konvergira* $\int\limits_D |f(x)|\, dx.$

Teorema 5. *Nesvojstveni integral konvergira apsolutno ako i samo ako konvergira u običnom smislu.*

Dokaz. Pretpostavimo da je realna funkcija f definisana u oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$. Sa f_+ i f_- označimo funkcije definisane formulama

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}, \quad x \in D,$$

ili, zapisano u drugačijem obliku

$$f_+(x) = \left\{ \begin{array}{rl} f(x), & \text{za } f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{za } f(x) < 0 \end{array} \right., \quad f_-(x) = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & \text{za } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & \text{za } f(x) < 0 \end{array} \right., \quad x \in D.$$

Sledeće nejednakosti

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|, \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|, \quad x \in D, \tag{3}$$

kao i jednakosti

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x), \quad x \in D, \tag{4}$$

očigledne su.
Ako $\int\limits_D f(x)dx$ apsolutno konvergira, tj. ako $\int\limits_D |f(x)|dx$ konvergira, onda prema (3) i Teoremi 4 konvergiraju $\int\limits_D f_+(x)dx$ i $\int\limits_D f_-(x)dx$. Na osnovu jednakosti (4) lako se vidi da konvergira i $\int\limits_D f(x)dx$.
Obratno, neka konvergira $\int\limits_D f(x)dx$. Pretpostavimo suprotno, da $\int\limits_D |f(x)|dx$ divergira.

Kako je $|f(x)| \geqslant 0$, to $\int\limits_D |f(x)|dx$ divergira ka beskonačnosti i možemo naći monotoni pokrivač $\{D^k\,|k=1,2,...\}$ skupa D, tako da je

$$\int\limits_{\overline{D^{k+1}}} |f(x)|dx > 3\int\limits_{\overline{D^k}} |f(x)|dx + 2k,\ k=1,2,... \tag{5}$$

Označimo $D^{k+1} \backslash \overline{D^k} = E^k$. Iz (5) sledi

$$\int\limits_{\overline{E^k}} |f(x)|dx > 2\int\limits_{\overline{D^k}} |f(x)|dx + 2k. \tag{6}$$

Koristeći (4) imamo

$$\int\limits_{\overline{E^k}} |f(x)|dx = \int\limits_{\overline{E^k}} f_+(x)dx + \int\limits_{\overline{E^k}} f_-(x)dx.$$

Od dva integrala na desnoj strani poslednje jednakosti, jedan je veći ili jednak drugom. Određenosti radi, pretpostavimo da je

$$\int\limits_{\overline{E^k}} f_+(x)dx \geqslant \int\limits_{\overline{E^k}} f_-(x)dx.$$

Iz ove nejednakosti i (6) sledi

$$\int\limits_{\overline{E^k}} f_+(x)dx > \int\limits_{\overline{D^k}} |f(x)|dx + k.$$

Izaberimo takvu podelu $T = \{V^i\}_i$ skupa $\overline{E^k}$ da bude

$$\sum m_i \cdot \mu V^i > \int\limits_{\overline{D^k}} |f(x)|dx + k, \quad m_i = \inf_{x\in V^i} f_+(x).$$

Označimo sa $P^k = \bigcup_j \{V^j \in T\,|m_j > 0\}$, $\overline{D^k} \cup P^k = Q^k$. Tada je

$$\int\limits_{P^k} f(x)dx = \int\limits_{P^k} f_+(x)dx > \int\limits_{\overline{D^k}} |f(x)|dx + k. \tag{7}$$

Iz (7) i očigledne nejednakosti

$$\int\limits_{\overline{D^k}} f(x)dx > -\int\limits_{\overline{D^k}} |f(x)|dx$$

sabiranjem sledi

$$\int\limits_{Q^k} f(x)dx > k.$$

Po konstrukciji je $\left\{\left(Q^k\right)^0 | k \in \mathbb{N}\right\}$ monoton pokrivač skupa D, te na osnovu poslednje nejednakosti sledi da je $\int\limits_D f(x)dx$ divergentan, što je kontradikcija. ■

Primetimo da dokazana teorema o apsolutnoj konvergenciji nesvojstvenog višestrukog integrala nije u kontradikciji sa poznatom činjenicom da postoje obični (jednostruki) nesvojstveni integrali koji konvergiraju uslovno (primer 6). Naime, definicija (jednostrukog) nesvojstvenog integrala (data u prvom delu), ne dobija se kao specijalan slučaj Definicije 5 nesvojstvenog n-integrala za $n = 1$.

3. Nesvojstveni parametarski integral

Posmatrajmo parametarske integrale oblika

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx \tag{8}$$

koji su (bar za neke y) nesvojstveni sa singularitetom b, tj. takve da ili je $b = +\infty$, ili je b konačno, ali je funkcija $f(x, y)$ neograničena u okolini tačke $x = b$. Sva razmatranja mogu se analogno preneti na slučaj nesvojstvenih integrala čiji je singularitet donja granica, kao i one kod kojih su singulariteti obe granice, ili je, pak, singularitet u unutrašnjosti intervala integracije.

Nesvojstveni integral (8) konvergira za neko y ako za tu vrednost parametra postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{\beta \to b} F(\beta, y)$ gde je

$$F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x, y)dx.$$

3.1. Ravnomerna konvergencija

Definisaćemo sada pojam ravnomerne konvergencije nesvojstvenog parametarskog integrala.

Definicija 7. *Za integral (8) kažemo da ravnomerno konvergira po $y \in Y$ (gde $Y \subset \mathbb{R}$) ako $F(\beta, y) \rightrightarrows I(y)$ $(\beta \to b)$ po $y \in Y$, tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\beta_0 \in [a, b)$ tako da za svako $y \in Y$ i svako β, $\beta_0 < \beta < b$, važi*

$$|I(y) - F(\beta, y)| = \left| \int_\beta^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Primer 11. Integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^y}$ konvergira za $y > 1$. Ako $Y_1 = [2, +\infty)$, onda taj integral ravnomerno konvergira po $y \in Y_1$, jer za $y \geqslant 2$:

$$\int_\beta^{+\infty} \frac{dx}{x^y} = \frac{1}{(y-1)\beta^{y-1}} \leqslant \frac{1}{\beta} \to 0 \quad (\beta \to +\infty)$$

Međutim, ako je $Y_2 = (1, +\infty)$, dati integral ne konvergira ravnomerno na Y_2. Zaista, za dato $\beta \in (1, +\infty)$ važi

$$\int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{dx}{x^y} = \frac{1}{(y-1)\beta^{y-1}} \to +\infty \quad (y \to 1+0)$$

pa se za dato $\varepsilon > 0$ ne može izabrati $\beta_0 \in (1, +\infty)$, tako da nejednakost $\left|\int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{dx}{x^y}\right| < \varepsilon$ važi za $\beta > \beta_0$, istovremeno za sve $y \in Y_2$. ▲

Opšti Košijev princip konvergencije daje sledeći neophodan i dovoljan uslov ravnomerne konvergencije nesvojstvenog parametarskog integrala.

Teorema 6. *Integral (8) ravnomerno konvergira po $y \in Y \subset \mathbb{R}$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\beta_0 \in [a, b)$ takvo da za sve β_1, β_2 za koje je $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < b$ i za svako $y \in Y$ važi $\left|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$.*

Posledica 3. *Ako je podintegralna funkcija f integrala (8) neprekidna na $[a, b) \times [c, d]$ i taj integral konvergira za $y \in (c, d)$, ali divergira za $y = c$ (odnosno $y = d$), onda on neravnomerno konvergira na (c, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da integral (8) divergira, na primer, za $y = c$. Tada postoji $\varepsilon > 0$, tako da se za svako $\beta_0 \in [a, b)$ mogu se naći $\beta_1, \beta_2 \in (\beta_0, b)$ za koje je $\left|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x, c)dx\right| > \varepsilon$. Integral $\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x, y)dx$ je (svojstveni) parametarski integral koji je neprekidna funkcija od $y \in (c, d)$ (na osnovu stava[5] koji daje dovoljan uslov neprekidnosti funkcije (8)). Znači, za vrednosti y dovoljno bliske c, važiće i nejednakost $\left|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x, c)dx\right| > \varepsilon$. Dakle, nisu ispunjeni uslovi prethodne teoreme za ravnomernu konvergenciju integrala (8) na (c, d). ■

Primetimo da na osnovu ove posledice neposredno dobijamo zaključak o neravnomernoj konvergenciji integrala $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^y}$ na $(1, +\infty)$.

Navedimo sada neke dovoljne uslove ravnomerne konvergencije nesvojstvenog integrala.

Stav 7. (Vajerštrasov[6] kriterijum) *Neka je $\varphi : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija (tj. neka konvergira $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)dx$), takva da je $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)$ za sve $x \in [a, b)$, $y \in Y \subset \mathbb{R}$. Tada integral (8) ravnomerno konvergira po $y \in Y$.*

[5]Stav: Neka je P pravougaonik $[a, b] \times [c, d]$ i neka je $f(x, y)$ neprekidna funkcija na P. Tada je $I(y)$ neprekidna funkcija na $[c, d]$.

[6]K. Weierstrass (1815 – 1897), nemački matematičar

Dokaz. Iz konvergencije integrala $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\beta_0 \in [a,b)$, takvo da za sve $\beta_1, \beta_2 \in (\beta_0, b)$ važi $\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi(x)dx < \varepsilon$. Tada je, za sve $y \in Y$,

$$\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x,y)dx\right| \leqslant \int_{\beta_1}^{\beta_2} |f(x,y)|\, dx \leqslant \int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi(x)dx < \varepsilon,$$

što na osnovu Teoreme 6 znači da integral (8) ravnomerno konvergira na Y. ■

Primer 12. 1° Integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}dx$ ravnomerno konvergira po $y \in \mathbb{R}$ jer je za svako $y \in \mathbb{R}$ ispunjeno $\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, a $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ konvergira.

2° Integral $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ ima singularitete u $x=0$ (za $\alpha < 1$) i u $x=1$ (za $\beta < 1$). On konvergira ravnomerno po α za $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ (za fiksirano $\beta > 0$), kao i po β za $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ (za fiksirano $\alpha > 0$). Zaista, za $0 < x < 1$, $\beta > 0$ i $\alpha \geqslant \alpha_0$ je

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leqslant x^{\alpha_0-1}(1-x)^{\beta-1},$$

a integral $\int\limits_0^1 x^{\alpha_0-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ konvergira. Slično se dokazuje drugo tvrđenje.▲

Vajerštrasovim kriterijumom ne može se dokazati ravnomerna konvergencija neapsolutno konvergentnog integrala. U takvim slučajevima koristimo sledeći stav:

Stav 8. (Abel - Dirihleov kriterijum) *Neka su funkcije $f(x,y)$ i $g(x,y)$ definisane za $x \in [a,b)$ i $y \in Y \subset \mathbb{R}$ i neka su za svako $y \in Y$ integrabilne po x na svakom segmentu $[a,\beta] \subset [a,b)$. Za ravnomernu konvergenciju nesvojstvenog integrala*

$$\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx \tag{9}$$

po $y \in Y$ dovoljno je da budu ispunjeni uslovi:

(D1) za svako $y \in Y$ funkcija $f(x,y)$ je neprekidna po $x \in [a,b)$ i ima ravnomerno ograničenu primitivnu funkciju, tj. postoji konstanta M, takva da je $\left|\int\limits_a^\beta f(x,y)dx\right| \leqslant M$ za sve $y \in Y$ i sve $\beta \in [a,b)$;

(D2) za svako $y \in Y$ funkcija $g(x,y)$ je neprekidno diferencijabilna i monotona po $x \in [a,b)$ i $g(x,y) \rightrightarrows 0$ $(x \to b)$ po $y \in Y$;

ili

(A1) za svako $y \in Y$ funkcija $f(x,y)$ je neprekidna po $x \in [a,b)$ i nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ ravnomerno konvergira po $y \in Y$;

(A2) za svako $y \in Y$ funkcija $g(x,y)$ je neprekidno diferencijabilna i monotona po $x \in [a,b)$; takođe, g je ravnomerno ograničena po $x \in [a,b)$ i $y \in Y$.

Dokaz. Dokazaćemo da su uslovi (D1) i (D2) dovoljni za ravnomernu konvergenciju integrala (9). Slično se dokazuje i za uslove (A1) i (A2).
Neka su $\beta_1, \beta_2 \in [a, b)$, $\beta_1 < \beta_2$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Na osnovu druge teoreme o srednjoj vrednosti integrala važi

$$\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x,y)g(x,y)dx = g(\beta_1, y) \int\limits_{\beta_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(\beta_2, y) \int\limits_{\xi}^{\beta_2} f(x,y)dx$$

za neko $\xi \in [\beta_1, \beta_2]$. Na osnovu pretpostavke (D1) integrali na desnoj strani ove jednakosti mogu se po apsolutnoj vrednosti ograničiti nekom konstantom k (uniformno po $y \in Y$). Iz pretpostavke (D2) sledi da se može naći $\beta_0 \in [a, b)$ tako da ako je $\beta_1, \beta_2 > \beta_0$ važi $|g(\beta_1, y)| < \frac{\varepsilon}{2k}$ i $|g(\beta_2, y)| < \frac{\varepsilon}{2k}$, istovremeno za sve $y \in Y$. Iz prethodne jednakosti sledi da je za takve β_1, β_2 ispunjeno $\left|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| < \varepsilon$, što na osnovu Teoreme 6 znači da je integral (9) ravnomerno konvergentan po $y \in Y$. ■

Ovaj stav važi i pod nešto slabijim pretpostavkama - uslovi da je f neprekidna, a g glatka funkcija mogu se izostaviti.

Primer 13. 1° Integral $\int\limits_{a}^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx$ ravnomerno konvergira po $y \geqslant 0$ ako konvergira integral $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$. To sledi jer su ispunjeni uslovi (A1), (A2) prethodnog stava. Na primer, integral

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$$

ravnomerno konvergira po $y \geqslant 0$.
2° Integral $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^y} dx$ ravnomerno konvergira po $y \geqslant y_0 > 0$, jer su ispunjeni uslovi (D1), (D2). Primetimo da na osnovu Posledice 3, on ne konvergira ravnomerno po $y > 0$, jer ne konvergira za $y = 0$.
3° Integral $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$ konvergira za svako $y \in \mathbb{R}$. Na skupu $Y = \{y \in \mathbb{R} \big| |y| \geqslant c\}$, za neko $c > 0$, taj integral konvergira ravnomerno. Zaista, kako 0 nije singularitet tog integrala, možemo posmatrati samo njegovo ponašanje kad $x \to +\infty$. No, tada tvrđenje lako sledi iz Dirihleovog kriterijuma.
Međutim, ovaj integral nije ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$. Zaista, za $\beta > 0$ važi

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx \right| = \sup_{\alpha > 0} \left| \int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \geqslant \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx > 0. \blacktriangle$$

3.2. Funkcionalna svojstva

Ispitivanje osobina funkcija definisanih nesvojstvenim parametarskim integralima po pravilu je komplikovanije od odgovarajućeg problema u slučaju svojstvenih integrala. Naime, kod nesvojstvenih integrala pojavljuje se još jedan (treći) granični prelaz o kojem treba voditi računa prilikom potrebne promene poretka.

3.2.1. Granična vrednost i neprekidnost

Teorema 7. *Neka je funkcija $f(x, y)$, za svako y iz neke okoline V tačke $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, integrabilna po $x \in [a, \beta]$ za svako β za koje je $a < \beta < b$. Ako:*
1° za svako takvo β važi $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ $(y \to y_0)$ na $[a, \beta]$
2° nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ ravnomerno konvergira na V,

tada $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ konvergira i važi

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{10}$$

Dokaz. Označimo $F(\beta, y) = \int\limits_a^\beta f(x, y)dx$. Iz pretpostavke 1° i odgovarajućeg stava[7] sledi da je $\lim\limits_{y \to y_0} F(\beta, y) = \int\limits_a^\beta \varphi(x)dx$. S druge strane, uslov 2° znači da $F(\beta, y) \rightrightarrows \int\limits_a^b f(x, y)dx$ $(\beta \to b)$ po $y \in V$. Na osnovu opšte teoreme[8] o promeni poretka graničnih prelaza zaključujemo da postoji $\lim\limits_{\beta \to b} \int\limits_a^\beta \varphi(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx$ i jednak je $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)dx$. ■

---

[7]Stav: Ako je funkcija $f(x, y)$ integrabilna po x na segmentu $[a, b]$ za svako y iz neke okoline V tačke $y_0 \in \mathbb{R}$ i ako $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ $(y \to y_0)$ po $x \in [a, b]$, onda je

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \int_a^b \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

.

[8]Teorema: Neka je $f_t : A \to \mathbb{R}$ $(t \in T \subset \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R})$ familija realnih funkcija, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tačka nagomilavanja skupa T i $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tačka nagomilavanja skupa A. Ako
1° $f_t \rightrightarrows f$ $(t \to t_0)$ na A,
2° za svako $t \in T$ postoji $\lim\limits_{x \to a} f_t(x) = b_t$,
tada postoje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i $\lim\limits_{t \to t_0} b_t$ i važi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{t \to t_0} b_t$, tj.

$$\lim_{x \to a} \lim_{t \to t_0} f_t(x) = \lim_{t \to t_0} \lim_{x \to a} f_t(x)$$

Provera uslova navedene teoreme nekad se može izvesti korišćenjem Dinijevog[9] kriterijuma.

Posledica 4. *Neka je, za svako* $y < y_0\,(y > y_0)$ *iz neke okoline* V *tačke* y_0, $f(x,y)$ *nenegativna i neprekidna funkcija od* $x \in [a,b)$ *koja, kad* y *rastući (opadajući) teži* y_0, *rastući (po* y*) teži funkciji* $\varphi(x)$, *neprekidnoj na* $[a,b)$. *Ako integral* $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ *konvergira, tada važi jednakost (10).*

Dokaz. Monotonost konvergencije $f(x,y) \to \varphi(x)\,(y \to y_0)$ obezbeđuje, prema Dinijevom stavu, da je ta konvergencija ravnomerna na svakom segmentu $[a,\beta] \subset [a,b)$. S druge strane, nejednakost $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \varphi(x)$, koja važi za sve $x \in [a,b)$ i sve $y \in V$, i konvergencija integrala $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ povlače da $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ ravnomerno konvergira po $y \in V$. Na taj način ispunjeni su uslovi Teoreme 7, pa važi jednakost (10). ■

Izvedena tvrđenja omogućavaju i neka jednostavna pravila o nesvojstvenoj integraciji redova član-po-član.

Posledica 5. *Neka su članovi reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ *nenegativne i neprekidne funkcije na* $[a,b)$ *i neka je njegov zbir* $f(x)$ *na* $[a,b)$ *neprekidna i integabilna funkcija. Tada se taj red može integrisati član-po-član na* $[a,b)$, *tj. važi*

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b a_n(x)dx.$$

Neposredna posledica Teoreme 7 je i sledeća teorema o neprekidnosti funkcije definisane nesvojstvenim parametarskim integralom.

Teorema 8. *Neka je funkcija* f *neprekidna na* $[a,b)\times[c,d]$ *i neka je (nesvojstveni) integral* $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *ravnomerno konvergentan po* $y \in [c,d]$. *Tada je* $I(y)$ *neprekidna funkcija na* $[c,d]$.

Primer 14. 1° Izračunati integral

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx,$$

razvijajući podintegralnu funkciju u red. Dodefinišimo tu funkciju njenim limesom -1 u tački $x = 0$. Za $0 \leqslant x < 1$ je tada

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

[9]Stav: neka je $K \subset \mathbb{R}$ kompaktan (dakle, zatvoren i ograničen) skup i neka je $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton (po n) niz funkcija neprekidnih na K. Ako $a_n(x) \to a(x)$ $(n \to +\infty)$ na K i ako je $a : K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada $a_n \rightrightarrows a$ $(n \to +\infty)$ na K.

Taj red ne konvergira ravnomerno na $[0,1)$ (jer ne konvergira za $x = 1$). Međutim, ispunjeni su uslovi Posledice 5, pa važi

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1}dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

$2°$ Pokazali smo da je integral

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$$

ravnomerno konvergentan po $y \in [0, +\infty)$. Kako je njegova podintegralna funkcija (dodefinisana jedinicom za $x = 0$) neprekidna na $[0, +\infty) \times [0, d]$ za sve $d > 0$, to na osnovu Teoreme 8 zaključujemo da je i funkcija $I(y)$ neprekidna na $[0, d]$ dakle i na $[0, +\infty)$. Specijalno, važi

$$\lim_{y\to 0} I(y) = \lim_{y\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \blacktriangle$$

3.2.2. Diferenciranje nesvojstvenog integrala

U sledećoj teoremi navodimo dovoljne uslove za mogućnost primene Lajbnicovog pravila[10] na nesvojstvene parametarske integrale.

Teorema 9. *Neka su ispunjeni sledeći uslovi:*
$1°$ *funkcija* $f : [a, b) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *je neprekidna po* $x \in [a, b)$ *za svako* $y \in [c, d]$, *a funkcija* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *je definisana i neprekidna na* $[a, b) \times [c, d]$;
$2°$ *integral* $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ *konvergira za neko* $y = y_0 \in [c, d]$;
$3°$ *integral* $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$ *ravnomerno konvergira na* $[c, d]$.
Tada je funkcija $I(y)$ *diferencijabilna na* $[c, d]$ *i važi*

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx. \tag{11}$$

[10]Stav: Neka je $P = [a, b] \times [c, d]$ i funkcija $f : P \to \mathbb{R}$ zadovoljava sledeće uslove:
$1°$ f je neprekidna po $x \in [a, b]$ za svako $y \in [c, d]$;
$2°$ f ima parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial y}$ koji je neprekidna funkcija na P.
Tada je funkcija definisana relacijom $\int_a^b f(x, y)dx$ neprekidno diferencijabilna na $[c, d]$ i važi

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx.$$

Dokaz. Označimo

$$F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x,y)dx$$

za $a < \beta < b$. Uslov 1°, na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, obezbeđuje da funkcija F ima parcijalni izvod po y na $[c,d]$ i da važi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\beta, y) = \int_a^\beta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Na osnovu 3° važi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\beta, y) \rightrightarrows \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \quad (\beta \to b) \text{ na } [c,d].$$

Najzad, iz 2° sledi da funkcija $F(\beta, y)$ ima za $y = y_0$ graničnu vrednost kad $\beta \to b$. Na taj način ispunjeni su svi uslovi teoreme[11] o diferencijabilnosti granične funkcije familije diferencijabilnih funkcija, pa na osnovu nje zaključujemo da $F(\beta, y) \rightrightarrows I(y)$ $(\beta \to b)$ na $[c,d]$ i važi formula (11). ■

Primer 15. Kao primer primene prethodne teoreme izračunajmo *Dirihleov integral*

$$D(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Neposredna primena Lajbnicovog pravila je nemoguća, jer bi se formalnim diferenciranjem dobio divergentan integral $\int\limits_0^{+\infty} \cos yx dx$. Posmatrajmo zato, za fiksirano $\alpha > 0$, parametarski integral

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad y \geqslant 0.$$

Taj integral zadovoljava sve uslove Teoreme 9: podintegralna funkcija je neprekidna zajedno sa svojim parcijalnim izvodom po y (kada se pogodno dodefiniše za $x = 0$), integral dobijen diferenciranjem

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos yx dx = \frac{\alpha}{y^2 + \alpha^2}$$

[11]Teorema: Neka su $f_t : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije za $t \in T \subset \mathbb{R}$ i neka je $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tačka nagomilavanja skupa T. Ako
1° familija $\{f_t \,|t \in T\}$ konvergira za neko $x_0 \in [a,b]$ kad $t \to t_0$;
2° familija izvodnih funkcija $\{f_t' \,|t \in T\}$ konvergira ravnomerno na $[a,b]$ kad $t \to t_0$,
onda familija $\{f_t \,|t \in T\}$ takođe ravnomerno konvergira na $[a,b]$ nekoj funkciji f koja je diferencijabilna i važi $f'(x) = \lim\limits_{t \to t_0} f_t'(x)$.

ravnomerno konvergira po $y \geqslant 0$, jer se majorira konvergentnim integralom $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ koji ne zavisi od y.
Iz $I'(y) = \frac{\alpha}{y^2+\alpha^2}$ dobijamo $I(y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha} + c$. Zamenom $y = 0$ dobijamo $c = I(0) = 0$, pa je

$$I(y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{12}$$

Kao u primeru 14.2° , važi

$$\lim_{\alpha\to 0} I(y) = \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} e^{-\alpha x}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x}dx = D(y),$$

pa iz (12) dobijamo $D(y) = \frac{\pi}{2}$ za $y > 0$. Kako je, očigledno, $D(0) = 0$ i $D(y)$ je neparna funkcija od y, to je konačno

$$D(y) = \frac{\pi}{2} sgny, \quad y \in \mathbb{R}. \blacktriangle$$

3.2.3. Integracija nesvojstvenog integrala

Kod integracije funkcija definisanih nesvojstvenim parametarskim integralima razlikujemo dva slučaja: kada je taj novi integral svojstven, odnosno nesvojstven. U prvom slučaju ako želimo da promenimo redosled integracije moramo da vodimo računa o tri granična prelaza, a u drugom o četiri.

Teorema 10. *Ako važe pretpostavke Teoreme 8, tj. ako je funkcija f neprekidna na $[a, b) \times [c, d]$ i (nesvojstveni) integral $I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ ravnomerno konvergira na $[c, d]$, onda je funkcija $I(y)$ integrabilna na $[c, d]$ i važi*

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy. \tag{13}$$

Dokaz. Iz neprekidnosti funkcije f, na osnovu odgovarajućeg stava[12], sledi da za svako $\beta \in [a, b)$ važi

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\beta f(x, y)dx = \int\limits_a^\beta dx \int\limits_c^d f(x, y)dy. \tag{14}$$

[12]Stav: Neka je funkcija $f : P \to \mathbb{R}$ neprekidna na pravougaoniku $P = [a, b] \times [c, d]$. Tada je funkcija $I : [c, d] \to \mathbb{R}$ definisana integralom $I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ integrabilna i važi

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy.$$

Kako familija funkcija $F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x,y)dx$, kad $\beta \to b$, konvergira integralu $\int_a^b f(x,y)dx$, ravnomerno po $y \in [c,d]$, to iz odgovarajuće teoreme[13] sledi da leva strana jednakosti (14) teži $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$, kad $\beta \to b$. No, onda i desna strana ima graničnu vrednost kad $\beta \to b$ i ta granična vrednost je $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$. ∎

U slučaju nenegativnosti podintegralne funkcije Dinijev kriterijum omogućava da se uslovi prethodne teoreme oslabe.

Posledica 6. *Ako je f neprekidna i nenegativna realna funkcija na $[a,b) \times [c,d]$ i ako je $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ neprekidna funkcija na $[c,d]$, tada važi formula (13).*

Kada je potrebno promeniti poredak dva nesvojstvena integrala, uslovi koji to obezbeđuju se dalje komplikuju. Dokazaćemo samo jedno tvrđenje koje se odnosi na slučaj nenegativne podintegralne funkcije.

Teorema 11. *Neka je funkcija $f : [a,b) \times [c,d) \to \mathbb{R}$ neprekidna i nenegativna i neka oba (nesvojstvena) integrala*

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx, \quad J(x) = \int_c^d f(x,y)dy \tag{15}$$

definišu neprekidne funkcije (od $y \in [c,d)$, odnosno od $x \in [a,b)$). Tada važi jednakost

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \tag{16}$$

pod pretpostavkom da bar jedan od tih uzastopnih integrala konvergira.

Dokaz. Pretpostavimo, na primer, da konvergira integral na levoj strani relacije (16). Neka je $\beta \in [a,b)$. Tada iz Posledice 6 dobijamo da je

$$\int_a^\beta dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^\beta f(x,y)dx.$$

S druge strane, zbog $f(x,y) \geqslant 0$ je

$$\int_c^d dy \int_a^\beta f(x,y)dx \leqslant \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

[13] Teorema: Neka su $f_t : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije za svako $t \in T \subset \mathbb{R}$ i neka je t_0 tačka nagomilavanja skupa T. Ako $f_t \rightrightarrows f$ $(t \to t_0)$ na $[a,b]$, tada je i f integrabilna funkcija na $[a,b]$ i važi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to t_0} \int_a^b f_t(x)dx.$$

Iz poslednje dve relacije sledi da i integral na desnoj strani relacije (16) konvergira i da važi

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \leqslant \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Na sličan način se dokazuje i obrnuta nejednakost. ■

Ova teorema ne važi bez pretpostavke o nenegativnosti funkcije f. Sledeća teorema daje dovoljne uslove promene poretka integracije za funkcije promenljivog znaka.

Teorema 12. *Ako važe sledeći uslovi:*
1° *funkcija f je neprekidna na $[a,b) \times [c,d)$;*
2° *oba nesvojstvena integrala (15) ravnomerno konvergiraju, prvi po $y \in [c,\delta]$, za svako $\delta \in [c,d)$, a drugi po $x \in [a,\beta]$, za svako $\beta \in [a,b)$;*
3° *konvergira bar jedan od integrala*

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x,y)|\,dx, \qquad \int_a^b dx \int_c^d |f(x,y)|\,dy$$

tada važi formula (16).

Primer 16. 1° Neka je $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija, pri čemu je f' monotona funkcija i postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$. Dokazaćemo da tada za sve $a, b > 0$ važi sledeća formula:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = [f(+\infty)-f(0)]\ln\frac{b}{a}. \tag{17}$$

Zaista, neka je, na primer, $a < b$. Nije ograničenje opštosti ako pretpostavimo da je f' rastuća i pozitivna funkcija. Integral $\int\limits_0^{+\infty} f'(yx)dx$ ravnomerno konvergira po $y \in [a,b]$, jer se $|f'(yx)|$ majorira sa $f'(bx)$, a integral $\int\limits_0^{+\infty} f'(bx)dx$ konvergira (vrednost mu je $\frac{f(+\infty)-f(0)}{b}$). Zato se na integral $\int\limits_a^b dy \int\limits_0^{+\infty} f'(yx)dx$ može primeniti Teorema 10, pa se dobija

$$\begin{aligned}
[f(+\infty)-f(0)]\ln\tfrac{b}{a} &= \int_a^b \frac{f(+\infty)-f(0)}{y}dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} f'(yx)dx = \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_a^b f'(yx)dy = \int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx.
\end{aligned}$$

Kao specijalan slučaj formule (17) dobija se, na primer,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx = \ln\frac{b}{a}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}bx-\mathrm{arctg}ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

2° Polazeći od Dirihleovog integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad y > 0$$

(primer 15)koji ravnomerno konvergira na svakom segmentu $[a, b]$ za $ab > 0$ dobijamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b \frac{\sin yx}{x} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2}(b - a)$$

3° Direktnim računom se dobija da je za funkciju $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$:

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} f(x, y) dy$$

Pri tom integrali

$$\int_1^{+\infty} f(x, y) dx, \quad \int_1^{+\infty} f(x, y) dy$$

konvergiraju ravnomerno (prvi po $y \in [1, +\infty)$, a drugi po $x \in [1, +\infty)$). Iz ovog primera zaključujemo sledeće:
(a) uslovi kao u Teoremi 10 nisu dovoljni da bi važila formula (13) u slučaju da su oba integrala u njoj nesvojstveni;
(b) uslovi Teoreme 11 nisu dovoljni da bi važila formula (16) ako podintegralna funkcija f nije stalnog znaka;
(c) u datom slučaju nije ispunjen uslov 3° teoreme 12.
4° Primenom Teoreme 12 izračunaćemo Frenelove[14] integrale

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$$

Prvi od tih integrala se smenom $x^2 = t$ transformiše u

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

i konvergira prema Dirihleovom kriterijumu. Koristeći poznati rezultat $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, dobijamo da za $t > 0$ važi

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du,$$

[14]A. J. Fresnel (1788 – 1827), francuski fizičar i matematičar

pa je

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du.$$

Direktna primena Teoreme 12 na promenu redosleda dobijenih integrala nije moguća. Zato ćemo, slično kao kod Dirihleovog integrala (primer 15) posmatrati, za neko fiksirano $\alpha > 0$, integral

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du.$$

Sada su uslovi Teoreme 12 ispunjeni, jer je $\left| e^{-\alpha t} e^{-tu^2} \sin t \right| \leqslant e^{-\alpha t}$ za sve $t > 0,\ u > 0$, a integral $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ konvergira. Tako dobijamo:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin t dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (\alpha + u^2)^2}.$$

Kako integral $I(\alpha)$ ravnomerno konvergira po $\alpha > 0$ (na primer, na osnovu Dirihleovog kriterijuma), a dobijeni integral ravnomerno konvergira po $\alpha > 0$ (na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma), to prelaskom na limes kad $\alpha \to 0+$ dobijamo

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \lim_{\alpha \to 0+} I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Na sličan način se izvodi da i integral $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ ima istu vrednost. ▲

3.3. Ojlerovi integrali

Među najvažnije (neelementarne) funkcije koje se definišu parametarskim nesvojstvenim integralima spadaju beta i gama funkcija koje se uvode Ojlerovim integralima.

3.3.1. Gama funkcija

Parametarski integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \tag{18}$$

nazivamo gama funkcijom ili Ojlerovim integralom prvog reda (kao što je to predložio Ležandr[15]).
Ovaj integral ima singularitete $x = +\infty$ i (ako je $\alpha < 1$) $x = 0$. Kada je $x = +\infty$, jasno je da integral konvergira za svako $\alpha \in \mathbb{R}$. Međutim, kada $x \to 0+$, važi $x^{\alpha-1}e^{-x} \sim x^{\alpha-1}$, pa zaključujemo da integral (18) konvergira ako i samo ako je $\alpha > 0$. Dakle, domen funkcije Γ je $(0, +\infty)$.
Navedimo neke njene najvažnije osobine.

1° Za svako $\alpha > 0$ važi

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{19}$$

Specijalno, za $\alpha = n \in \mathbb{N}$ dobijamo

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)\Gamma(n - 1) = \cdots = n!, \tag{20}$$

s obzirom da je $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. Na taj način, gama funkcija se može shvatiti kao produženje faktorijela sa skupa prirodnih na skup pozitivnih realnih brojeva.
Još jedna posledica formule (19) je da pomoću nje možemo definisati $\Gamma(\alpha)$ i za neke negativne vrednosti argumenta. Naime, za $-1 < \alpha < 0$ možemo po definiciji staviti $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$. Nastavljajuci ovaj postupak, funkcija Γ se definiše za sve realne vrednosti α, različite od 0 i od negativnih celih brojeva.

2° Funkcija Γ je na svom (osnovnom) domenu $(0, +\infty)$ beskonačno diferencijabilna.

3° Osim što je funkcija $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ konveksna , ona je i logaritamski konveksna, tj. funkcija $\ln \Gamma$ je konveksna.

4° Važi sledeća Ojler-Gausova formula za gama funkciju

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{(n - 1)!}{\alpha(\alpha + 1)\cdots(\alpha + n - 1)}.$$

[15]A. Legendre (1752-1832), francuski matematičar

5° Jedna od važnih gama funkcija data je sledećom formulom dopunjavanja

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{21}$$

6° Stirlingova[16] formula opisuje asimptotsko ponašanje funkcije Γ (a samim tim i faktorijela) za velike vrednosti argumenta:

$$\Gamma(\alpha) = \sqrt{2\pi} \cdot \alpha^{\alpha - \frac{1}{2}} e^{-\alpha + \frac{\theta(\alpha)}{12\alpha}}, \qquad \alpha > 0,$$

gde je $0 < \theta(\alpha) < 1$.

3.3.2. Beta funkcija

Funkciju

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \tag{22}$$

nazivamo beta funkcijom ili Ojlerovim integralom drugog reda.
Ovaj integral konvergira ako je $\alpha > 0$ i $\beta > 0$, pa je funkcija $B(\alpha, \beta)$ definisana za te vrednosti promenljivih. Ona je i neprekidna po obe promenljive na svom domenu.
Navedimo neke njene najvažnije osobine.

1° Funkcija B je simetrična, tj. za sve $\alpha, \beta > 0$ važi

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha).$$

2° Za $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ važi

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha - 1, \beta).$$

3° Smenom $x = \frac{t}{1+t}$ u integralu (22) dobijamo drugu integralnu reprezentaciju funkcije B,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt.$$

4° Između B i Γ funkcije postoji veza

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \qquad \text{za } \alpha > 0, \beta > 0. \tag{23}$$

[16] J. Stirling (1696-1770), škotski matematičar

Dokažimo ovu vezu. Pretpostavimo najpre da $\alpha > 1$ i $\beta > 1$ i napišimo proizvod $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ u obliku

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \int_0^{+\infty} z^{\beta-1}e^{-z}dz = \\ &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \int_0^{+\infty} x^{\beta}y^{\beta-1}e^{-xy}dy\end{aligned} \tag{24}$$

(u drugom integralu uveli smo smenu $z = xy$). Da bismo mogli da promenimo redosled integrala, proverimo da li su ispunjeni uslovi Teoreme 11. Funkcija

$$f(x,y) = x^{\alpha+\beta-1}y^{\beta-1}e^{-(1+y)x}$$

je neprekidna i nenegativna na $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$. Integrali

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta),$$

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)dy = x^{\alpha-1}e^{-x}\Gamma(\beta)$$

definišu neprekidne funkcije od $y \in [0,+\infty)$, odnosno $x \in [0,+\infty)$, a iz (24) sledi da postoji uzastopni integral $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x,y)dy$. Dakle, važi

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x,y)dx = \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^{+\infty} \frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy = \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

za $\alpha > 1, \beta > 1$. Da bismo dokazali da formula važi za sve $\alpha,\beta > 0$, dovoljno je da primenimo formulu (19), kao i formule

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta) \qquad \text{i} \qquad B(\alpha,\beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1).$$

Kao posledicu formule (23), mogu se navesti još neka svojstva funkcije B iz odgovarajućih svojstava funkcije Γ. Na primer, iz osobine (20) dobija se

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \qquad m,n \in \mathbb{N},$$

a iz osobine (21),

$$B(\alpha,1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Specijalno, $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$.

Primer 17. Za $\alpha, \beta > -1$, smenom $\sin^\alpha x = t$, dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.\end{aligned}$$

Literatura

[1] Blagota Lučić, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Sarajevo, 2005.

[2] Darko Milinković, *Matematička analiza I - skripta*, Beograd, 2010.

[3] Dobrivoje Mihailović, Dobrilo Đ. Tošić, *Elementi matematičke analize II*, Naučna knjiga, Beograd, 1979.

[4] Dušan Adnađević, Zoran Kadelburg, *Matematička analiza I*, Nauka, Beograd, 1995.

[5] Dušan Adnađević, Zoran Kadelburg, *Matematička analiza II*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1991.

[6] Gradimir V. Milovanović, Radosav Ž. Đorđević, *Matematička analiza I*, Elektronski fakultet, Niš, 2005.

[7] Milosav Marjanović, *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd, 1979.

[8] Radoslav Dimitrijević, *Analiza realnih funkcija više promenljivih*, Niš, 2010.

[9] Stojan N. Radenović, *Matematička analiza I*, Beograd i Kragujevac, 2000.