Univerzitet u Kragujevcu
Prirodno-matematički fakultet

Marija Stanić

NESTANDARDNE ORTOGONALNOSTI I ODGOVARAJUĆE KVADRATURE GAUSS-OVOG TIPA

Magistarska teza

Kragujevac
2003

Sadržaj

1

Uvod

Oblast istraživanja u okviru ove magistarske teze je razmatranje nestandardnih tipova ortogonalnosti i njihova primena na konstrukciju kvadraturnih formula maksimalnog stepena tačnosti. Istraživanja u ovoj graničnoj oblasti između teorije aproksimacija i numeričke analize su veoma aktuelna. S jedne strane radi se o istraživanjima povezanim sa teorijom ortogonalnih sistema, u ovom slučaju sa više koncepata nestandardne ortogonalnosti, prvenstveno na polukrugu u kompleksnoj ravni, i konstrukciji kvadraturnih formula za numeričku integraciju funkcija, sa druge strane.

U ovoj tezi će biti objedinjena tri različita pravca istraživanja: ortogonalnost na polukrugu u kompleksnoj ravni u odnosu na nehermitski skalarni proizvod, koncept s-ortogonalnosti, kao i koncept višestruke ortogonalnosti.

1.1 Organizacija rada

U glavi 2 prikazan je koncept ortogonalnosti na polukrugu u kompleksnoj ravni u odnosu na nehermitski skalarni proizvod. Takva ortogonalnost obezbeđuje konstrukciju kvadraturnih formula maksimalnog stepena tačnosti za numeričku integraciju funkcija na polukrugu ili kružnom luku u kompleksnoj ravni, kao i konstrukciju formula za izračunavanje Cauchy-eve glavne vrednosti nesvojstvenih integrala na $[-1, 1]$. Polinome ortogonalne na polukrugu uveli su i izučavali Gautschi i Milovanović [13]. U ovoj glavi dat je pregled poznatih osobina polinoma ortogonalnih na polukrugu [13, 12, 21, 19], veza sa odgovarajućim običnim ortogonalnim polinomima (realnim) (poglavlje 2.1). Posebna pažnja posvećena je polinomima ortogonalnim na polukrugu u odnosu na simetrične težinske funkcije (specijalno za Gegenbauer-ove težinske funkcije) zbog interesantnih osobina nula takvih polinoma. Takođe, dat je osvrt i na Jacobi-eve težinske funkcije zbog povezivanja koncepta ortogonalnosti na polukrugu sa konceptom višestruke ortogonalnosti.

U glavi 3 prikazan je koncept s-ortogonalnosti i kvadraturne formule maksimalnog stepena tačnosti sa višestrukim čvorovima. Dat je pregled poznatih osobina s-ortogonalnih polinoma, kao i numerički stabilnih algoritama za konstrukciju opštih kvadraturnih formula sa višestrukim čvorovima [14, 15, 20, 24, 27].

Nedavno je C.F. Borges [5] razmatrao sistem kvadraturnih formula na realnoj pravoj, u odnosu na više težinskih funkcija, ali sa jednim istim sistemom čvorova. Potreba za ovakvim sistemom kvadratura pojavila se u kompjuterskoj grafici. U izvesnom smislu to predstavlja generalizaciju Gauss-ove integracije. Pokazalo se da su ove kvadrature u uskoj vezi sa konceptom višestruke ortogonalnosti koji je razvijen proteklih godina. Međutim, Borges nije koristio višestruko ortogonalne polinome. U glavi 4 prikazan je koncept višestruke ortogonalnosti. Tu je dat i novi, efikasan, metod za numeričku konstrukciju višestruko ortogonalnih polinoma [29], kao i metod za konstrukciju kvadraturnih formula koje je Borges razmatrao.

U glavi 5 razmatrano je prenošenje koncepta s-ortogonalnosti uvedenog u glavi 3 na polukrug u kompleksnoj ravni uz uvođenje nehermitskog skalarnog proizvoda.

Najzad, u glavi 6 i koncept višestruke ortogonalnosti se prenosi takođe na polukrug u kompleksnoj ravni i na taj način se generališe koncept ortogonalnosti prikazan u glavi 2. Tu je dat algoritam za konstrukciju uvedenih višestruko ortogonalnih polinoma na polukrugu. Takođe, uvode se i odgovarajuće kvadraturne formule maksimalnog stepena tačnosti, tj. kvadraturne formule Gauss-ovog tipa.

1.2 Publikovani delovi rada

Neki delovi ovog rada su prihvaćeni za štampanje u Facta Univ. Ser. Math. Inform (videti [29]).

1.3 Zahvalnost

Veliki doprinos ovom radu, najpre kroz razgovore o aktuelnim istraživanjima u teoriji aproksimacija i teoriji ortogonalnosti, a zatim i kroz konkretne zadatke dao je profesor dr Gradimir V. Milovanović, mentor rada i inicijator ovog istraživanja. Značajan doprinos radu dao je i profesor dr Miodrag M. Spalević. Njihove sugestije prisutne su u mnogim delovima rada. Posebno bih izdvojila i njihovu pomoć oko nabavke neophodne literature.

Pored profesora Milovanovića i profesora Spalevića, zahvalnost dugujem i docentu dr Branislavu Z. Popoviću na uloženom trudu oko čitanja teksta i korisnim primedbama i sugestijama.

2

Polinomi ortogonalni na polukrugu

Neka je w težinska funkcija, koja je pozitivna i integrabilna na otvorenom intervalu $(-1,1)$ sa eventualnim singularitetima u krajnjim tačkama, takva da se može analitički produžiti na gornji poludisk $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \mathrm{Im}\ z > 0\}$. Neka je to analitičko produženje funkcija $w(z)$. Razmotrimo sledeća dva skalarna proizvoda:

$$[f,g] = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx, \tag{2.1}$$

i

$$(f,g) = \int_{\Gamma} f(z)g(z)w(z)(iz)^{-1}\,dz = \int_0^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) g\left(e^{i\theta}\right) w\left(e^{i\theta}\right)\,d\theta, \tag{2.2}$$

gde je Γ kružni deo od ∂D_+.

Skalarni proizvod (2.1) je pozitivno definitan i stoga generiše jedinstveni skup realnih ortogonalnih polinoma (p_k),

$$[p_k, p_l] \begin{cases} = 0 & \text{za } k \neq l \\ > 0 & \text{za } k = l \end{cases} \qquad (k,l = 0,1,2,\ldots), \tag{2.3}$$

gde je po pretpostavci p_k moničan polinom stepena k. Međutim, skalarni proizvod (2.2) nije Hermitski (namerno drugi faktor g nije konjugovan i integracija se ne vrši sa merom $|w(e^{i\theta})|\,d\theta$). Stoga egzistenciju odgovarajućih ortogonalnih polinoma moramo posebno ispitati.

Za kompleksne polinome π_k (π_k – moničan polinom stepena k) koji ispunjavaju uslov

$$(\pi_k, \pi_l) \begin{cases} = 0 & \text{za } k \neq l \\ \neq 0 & \text{za } k = l \end{cases} \qquad (k,l = 0,1,2,\ldots) \tag{2.4}$$

kažemo da su ortogonalni na polukrugu. Gautschi, Landau i Milovanović [12] su dokazali egzistenciju ovih polinoma pretpostavljajući jedino da je

$$\mathrm{Re}\ (1,1) = \mathrm{Re} \int_0^{\pi} w\left(e^{i\theta}\right)\,d\theta \neq 0. \tag{2.5}$$

2.1 Egzistencija i reprezentacija polinoma ortogonalnih na polukrugu

Pretpostavimo da je težinska funkcija w pozitivna na intervalu $(-1,1)$ i analitička u $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \text{Im}\ z > 0\}$, takva da svi integrali u (2.1) i (2.2) postoje za glatke funkcije f i g (moguće i kao nesvojstveni integrali). Pretpostavimo još i da je ispunjen uslov (2.5). Označimo sa C_ε, $\varepsilon > 0$, granicu od D_+ sa kružnim delovima poluprečnika ε sa centrima u -1 i 1. Obeležimo sa $\mathcal{P}$ skup svih polinoma. Tada je, na osnovu Cauchy-eve teoreme, za bilo koji polinom g ispunjeno

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{C_\varepsilon} g(z)w(z)\,dz \\
&= \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{c_{\varepsilon,-1}} + \int_{c_{\varepsilon,1}}\right) g(z)w(z)\,dz + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} g(x)w(x)\,dx, \qquad g \in \mathcal{P},
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

gde su Γ_ε i $c_{\varepsilon,\pm 1}$ kružni delovi od C_ε (sa poluprečnicima 1 i ε respektivno). Pretpostavimo još da je težinska funkcija w takva da važi

$$
\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{c_{\varepsilon,\pm 1}} g(z)w(z)\,dz = 0 \qquad \text{za sve} \ \ g \in \mathcal{P}. \tag{2.7}
$$

Ako sada pustimo da $\varepsilon \downarrow 0$ u (2.6) dobijamo

$$
0 = \int_C g(z)w(z)\,dz = \int_\Gamma g(z)w(z)\,dz + \int_{-1}^{1} g(x)w(x)\,dx, \qquad g \in \mathcal{P}. \tag{2.8}
$$

Poznato je da niz moničnih realnih polinoma (p_k), ortogonalnih u odnosu na skalarni proizvod (2.1), kao i niz pridruženih polinoma druge vrste

$$
q_k(z) = \int_{-1}^{1} \frac{p_k(z) - p_k(x)}{z - x} w(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.9}
$$

zadovoljava tročlanu rekurentnu relaciju oblika

$$
y_{k+1} = (z - a_k)y_k - b_k y_{k-1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.10}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
&y_{-1} = 0, \quad && y_0 = 1 \quad && \text{za } (p_k), \\
&y_{-1} = -1, \quad && y_0 = 0 \quad && \text{za } (q_k).
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Označimo sa m_k i μ_k momente koji odgovaraju skalarnim proizvodima (2.1) i (2.2) respektivno, tj.

(2.12) $$m_k = [x^k, 1], \qquad \mu_k = (z^k, 1) \qquad (k \geqslant 0).$$

Pretpostavlja se u (2.10) da je

(2.13) $$b_0 = m_0.$$

Teorema 2.1. [12] *Neka je w težinska funkcija, pozitivna na intervalu $(-1,1)$, analitička u $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, takva da je zadovoljen uslov* (2.7) *i da integrali u* (2.8) *postoje (moguće i kao nesvojstveni). Pretpostavimo još i da je uslov* (2.5) *zadovoljen. Tada postoji jedinstveni niz moničnih kompleksnih polinoma (π_k) ortogonalnih u odnosu na skalarni proizvod* (2.2). *Označimo sa (p_k) monične realne polinome, ortogonalne u odnosu na skalarni proizvod* (2.1). *Tada je*

(2.14) $$\pi_n(z) = p_n(z) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

gde je

(2.15) $$\theta_{n-1} = \frac{\mu_0 p_n(0) + iq_n(0)}{i\mu_0 p_{n-1}(0) - q_{n-1}(0)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

odnosno

(2.16) $$\theta_n = ia_n + \frac{b_n}{\theta_{n-1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \theta_{-1} = \mu_0\,,$$

gde su a_k i b_k koeficijenti u rekurentnoj relaciji (2.10) *i $\mu_0 = (1,1)$. Specijalno, ako je $a_n = 0$ za sve $n \geqslant 0$, tada su svi θ_n realni (pozitivni). Važi i*

(2.17) $$(\pi_n, \pi_n) = \theta_{n-1}[p_{n-1}, p_{n-1}] \neq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad (\pi_0, \pi_0) = \mu_0\,.$$

Dokaz: Pretpostavimo prvo da ortogonalni polinomi (π_k) postoje. Stavljajući

$$g(z) = \frac{1}{i}\pi_n(z)z^{k-1} \qquad (1 \leqslant k < n)\,,$$

u (2.8), dobijamo

$$0 = \int_\Gamma \pi_n(z)z^k(iz)^{-1}w(z)\,dz - i\int_{-1}^{1} \pi_n(x)x^{k-1}w(x)\,dx$$

$$= (\pi_n, z^k) - i[\pi_n, x^{k-1}] = -i[\pi_n, x^{k-1}] \qquad (1 \leqslant k < n)\,,$$

odakle je

(2.18) $$\pi_n(z) = p_n(z) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

za neke konstante θ_{n-1}. Da bi odredili te konstante stavimo

$$g(z) = [\pi_n(z) - \pi_n(0)](iz)^{-1} = \frac{1}{i}\left[\frac{p_n(z) - p_n(0)}{z} - i\theta_{n-1}\frac{p_{n-1}(z) - p_{n-1}(0)}{z}\right]$$

u (2.8) i iskoristimo prvi izraz za g da izračunamo prvi integral i drugi da izračunamo drugi integral u (2.8). Onda iz (2.8) dobijamo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Gamma [\pi_n(z) - \pi_n(0)](iz)^{-1} w(z)\,dz \\
&\quad + \int_{-1}^{1} \frac{1}{i}\left[\frac{p_n(x) - p_n(0)}{x} - i\theta_{n-1}\frac{p_{n-1}(x) - p_{n-1}(0)}{x}\right] w(x)\,dx \\
&= \int_\Gamma \pi_n(z)(iz)^{-1} w(z)\,dz - \pi_n(0)\int_\Gamma (iz)^{-1} w(z)\,dz \\
&\quad + \frac{1}{i}\left[\int_{-1}^{1} \frac{p_n(x) - p_n(0)}{x} w(x)\,dx - i\theta_{n-1}\int_{-1}^{1} \frac{p_{n-1}(x) - p_{n-1}(0)}{x} w(x)\,dx\right],
\end{aligned}$$

odakle zbog (2.9) dobijamo

$$0 = (\pi_n, 1) - \pi_n(0)(1,1) + \frac{1}{i}[q_n(0) - i\theta_{n-1}q_{n-1}(0)] \qquad (n \geqslant 1)\,. \tag{2.19}$$

Kako je $(\pi_n, 1) = 0$ i $(1,1) = \mu_0$ koristeći (2.18) sa $z = 0$, dobijamo

$$\mu_0(p_n(0) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(0)) = \frac{1}{i}q_n(0) - \theta_{n-1}q_{n-1}(0)$$

odakle rešavanjem po θ_{n-1} dobijamo (2.15) za $n \geqslant 1$. Imenilac i brojilac razlomka u (2.15) su različiti od 0 jer je $\operatorname{Re}\mu_0 \neq 0$ po pretpostavci (uslov (2.5)) i $p_k(0)$ i $q_k(0)$ nisu istovremeno jednaki 0 jer su (p_k) i (q_k) linearno nezavisna rešenja rekurentne relacije (2.10). Za $n = 0$ (2.15) takođe važi jer je zbog (2.11) $\theta_{-1} = \mu_0$ što je definicija data u (2.16).

Da bi dokazali prvu relaciju u (2.16), zamenimo n sa $n+1$ u (2.15) i iskoristimo (2.10) za $z = 0$. Sada dobijamo

$$\begin{aligned}
\theta_n &= \frac{\mu_0 p_{n+1}(0) + iq_{n+1}(0)}{i\mu_0 p_n(0) - q_n(0)} \\
&= \frac{\mu_0[-a_n p_n(0) - b_n p_{n-1}(0)] + i[-a_n q_n(0) - b_n q_{n-1}(0)]}{i\mu_0 p_n(0) - q_n(0)} \\
&= \frac{ia_n[i\mu_0 p_n(0) - q_n(0)] - b_n[\mu_0 p_{n-1}(0) + iq_{n-1}(0)]}{i\mu_0 p_n(0) - q_n(0)} \\
&= ia_n + \frac{b_n}{\theta_{n-1}} \qquad (n \geqslant 1)\,.
\end{aligned}$$

Koristeći (2.15) za $n = 1$, (2.10) za $k = 0$ i (2.11) dobijamo

$$\theta_0 = \frac{\mu_0(-a_0) + ib_0}{i\mu_0} = ia_0 + \frac{m_0}{\mu_0}\,,$$

jer je $b_0 = m_0$ (pretpostavka (2.13)). Dakle, (2.16) važi i za $n = 0$.

Ako su svi $a_n = 0$ onda je težinska funkcija w simetrična i realnost konstanti θ_n sledi iz (2.16) i činjenice da je tada $\mu_0 = (1, 1) = \pi w(0)$ (videti teoremu 2.3.).

Definišimo sada π_n sa (2.14) i (2.15). Tada iz (2.8) za $n \geqslant 2$ dobijamo

$$(\pi_n, z^k) = \frac{1}{i}\int_\Gamma \pi_n(z)z^{k-1}w(z)\,dz = i\int_{-1}^{1} \pi_n(x)x^{k-1}w(x)\,dx = 0 \qquad (1 \leqslant k < n)\,.$$

Treba još pokazati da je i $(\pi_n, 1) = 0 \quad (n \geqslant 1)$. Iz jednakosti (2.19) koristeći relacije (2.14) za $z = 0$ i (2.15) dobijamo

$$\begin{aligned}
(\pi_n, 1) &= \mu_0\pi_n(0) + i[q_n(0) - i\theta_{n-1}q_{n-1}(0)] \\
&= \mu_0[p_n(0) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(0)] + i[q_n(0) - i\theta_{n-1}q_{n-1}(0)] \\
&= \mu_0 p_n(0) + iq_n(0) - \theta_{n-1}[i\mu_0 p_{n-1}(0) - q_{n-1}(0)] \\
&= \mu_0 p_n(0) + iq_n(0) - \frac{\mu_0 p_n(0) + iq_n(0)}{i\mu_0 p_{n-1}(0) - q_{n-1}(0)}[i\mu_0 p_{n-1}(0) - q_{n-1}(0)] \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Da bi kompletno dokazali teoremu 2.1. preostaje da pokažemo da važi (2.17).

$$\begin{aligned}
(\pi_n, \pi_n) &= \int_\Gamma \pi_n(z)z^n w(z)(iz)^{-1}\,dz = \frac{1}{i}\int_\Gamma \pi_n(z)z^{n-1}w(z)\,dz \\
&= i\int_{-1}^{1} \pi_n(x)x^{n-1}w(x)\,dx = i\int_{-1}^{1}[p_n(x) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(x)]x^{n-1}w(x)\,dx \\
&= \theta_{n-1}\int_{-1}^{1} p_{n-1}^2(x)w(x)\,dx\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Primer: Za težinsku funkciju $w(z) = 1 + z$ je $\mu_0 = (1, 1) = \pi + 2i$, $\operatorname{Re}\mu_0 = \pi \neq 0$ pa niz ortogonalnih polinoma (π_k) postoji. Dalje je

$b_0 = m_0 = 2,\ a_n = (2n+1)^{-1}(2n+3)^{-1}$ za $n \geqslant 0$, $\quad b_n = n(n+1)(2n+1)^{-2}$ za $n \geqslant 1$,

pa je prema formuli (2.16)

$$\theta_0 = \frac{\pi - 4i}{3(2 - i\pi)}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi + 8i}{5(4 + i\pi)}, \ldots,$$

prema (2.10) i (2.11)

$$p_0(z) = 1, \;\; p_1(z) = z - \frac{1}{3}, \;\; p_2(z) = z^2 - \frac{2}{5}z - \frac{1}{5}, \; \ldots ,$$

i prema (2.14)

$$\pi_0(z) = 1, \;\; \pi_1(z) = z - \frac{2}{2 - i\pi}, \;\; \pi_2(z) = z^2 - \frac{i\pi}{4 + i\pi}z - \frac{4}{3(4 + i\pi)}, \; \ldots .$$

2.2 Rekurentna relacija za polinome ortogonalne na polukrugu

Pretpostavimo da je zadovoljen uslov (2.5), tj. da postoji niz ortogonalnih polinoma (π_k). Obzirom da je za skalarni proizvod (2.2) ispunjeno $(zf, g) = (f, zg)$, tada ortogonalni polinomi (π_k) moraju zadovoljavati tročlanu rekurentnu relaciju, koja se može napisati u obliku [13, 12]

$$\begin{gathered} \pi_{k+1}(z) = (z - i\alpha_k)\pi_k(z) - \beta_k \pi_{k-1}(z) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \\ \pi_{-1}(z) = 0, \qquad \pi_0(z) = 1 . \end{gathered} \tag{2.20}$$

Na osnovu (2.14) za $k \geqslant 1$ iz (2.20) dobija se

$$p_{k+1}(z) - i\theta_k p_k(z) = (z - i\alpha_k)[p_k(z) - i\theta_{k-1}p_{k-1}(z)] - \beta_k[p_{k-1}(z) - i\theta_{k-2}p_{k-2}(z)],$$

odakle se zamenom $zp_k(z)$ i $zp_{k-1}(z)$ izrazima dobijenim iz rekurentne relacije (2.10) dobija

$$\begin{aligned} p_{k+1}(z) - i\theta_k p_k(z) = p_{k+1}(z) &+ a_k p_k(z) + b_k p_{k-1}(z) \\ &- i\theta_{k-1}[p_k(z) + a_{k-1}p_{k-1}(z) + b_{k-1}p_{k-2}(z)] \\ &- i\alpha_k[p_k(z) - i\theta_{k-1}p_{k-1}(z)] - \beta_k[p_{k-1}(z) - i\theta_{k-2}p_{k-2}(z)], \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} [a_k + i(\theta_k - \theta_{k-1} - \alpha_k)]p_k(z) &+ [b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\alpha_k + ia_{k-1})]p_{k-1}(z) \\ &+ i[\beta_k\theta_{k-2} - b_{k-1}\theta_{k-1}]p_{k-2}(z) \equiv 0 \qquad (k \geqslant 1) . \end{aligned}$$

Zbog linearne nezavisnosti polinoma (p_k) zaključujemo da mora biti

$$a_k + i(\theta_k - \theta_{k-1} - \alpha_k) = 0 \qquad (k \geqslant 1), \tag{2.21}$$

$$b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\alpha_k + ia_{k-1}) = 0 \qquad (k \geqslant 1), \tag{2.22}$$

$$\beta_k\theta_{k-2} - b_{k-1}\theta_{k-1} = 0 \qquad (k \geqslant 2) . \tag{2.23}$$

Iz relacija (2.23) i (2.16) se dobija

$$\beta_k = \frac{\theta_{k-1}}{\theta_{k-2}}\, b_{k-1} = \theta_{k-1}(\theta_{k-1} - ia_{k-1}) \qquad (k \geqslant 2). \tag{2.24}$$

Iz relacije (2.21) dobija se

$$\alpha_k = \theta_k - \theta_{k-1} - ia_k \qquad (k \geqslant 1)\,. \tag{2.25}$$

Da bi pokazali da relacija (2.24) važi i za $k = 1$ polazi se od relacije (2.22) za $k = 1$

$$b_1 - \beta_1 - \theta_0(\alpha_1 + ia_0) = 0,$$

odakle se zbog (2.25) za $k = 1$ dobija

$$\begin{aligned}\beta_1 &= b_1 - \theta_0(\theta_1 - \theta_0 - ia_1 + ia_0)\\ &= b_1 - \theta_0\left(\frac{b_1}{\theta_0} - \theta_0 + ia_0\right) \qquad \text{(iz (2.16) za } n = 1)\\ &= \theta_0(\theta_0 - ia_0)\,.\end{aligned}$$

Pokazaćemo sada da prethodno određeni koeficijenti α_k i β_k zadovoljavaju relaciju (2.22) koristeći pritom (2.16).

$$\begin{aligned}b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\alpha_k + ia_{k-1}) &= b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\theta_k - \theta_{k-1} - ia_k + ia_{k-1})\\ &= b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\theta_k - ia_k) + \theta_{k-1}(\theta_{k-1} - ia_{k-1})\\ &= b_k - \beta_k - \theta_{k-1}\cdot\frac{b_k}{\theta_{k-1}} + \beta_k = 0\,.\end{aligned}$$

Konačno iz $\pi_1(z) = z - i\alpha_0 = p_1(z) - i\theta_0 = z - a_0 - i\theta_0$ dobijamo

$$\alpha_0 = \theta_0 - ia_0\,. \tag{2.26}$$

Prema (2.16) možemo pisati (2.25) i (2.26) alternativno kao

$$\begin{aligned}\alpha_k &= -\theta_{k-1} + \frac{b_k}{\theta_{k-1}} \qquad (k \geqslant 1)\,,\\ \alpha_0 &= \frac{b_0}{\theta_{-1}} = \frac{m_0}{\mu_0}\,.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Dakle, dokazano je da važi:

Teorema 2.2. *Pod pretpostavkom* (2.5) *monični kompleksni polinomi* (π_k) *ortogonalni u odnosu na skalarni proizvod* (2.2) *zadovoljavaju rekurentnu relaciju*

$$\begin{aligned}&\pi_{k+1}(z) = (z - i\alpha_k)\pi_k(z) - \beta_k\pi_{k-1}(z) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,,\\ &\pi_{-1}(z) = 0, \qquad \pi_0(z) = 1\,,\end{aligned} \tag{2.28}$$

gde su koeficijenti α_k i β_k dati sa (2.25), (2.26) (*ili sa* (2.27)) *i* (2.24) *respektivno, sa* θ_n *definisanim relacijom* (2.15) (*ili* (2.16)). (*Koeficijent* β_0 *u* (2.28) *je proizvoljan, međutim, najčešće se uzima da je* $\beta_0 = \mu_0$.)

Izjednačavanjem koeficijenata uz z^k sa leve i desne strane rekurentne relacije (2.28) iz (2.26) i (2.25) dobija se

$$\pi_n(z) = z^n - \left(i\theta_{n-1} + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \right) z^{n-1} + \cdots \qquad (n \geqslant 1)\,. \tag{2.29}$$

2.3 Polinomi ortogonalni na polukrugu sa simetričnom težinskom funkcijom

Teorema 2.3. *Neka težinska funkcija* w *zadovoljava sve uslove kao na početku poglavlja* 2.1 *i uslov*

$$w(-z) = w(z) \quad i \quad w(0) > 0\,. \tag{2.30}$$

Tada je

$$\mu_0 = (1,1) = \pi w(0) \tag{2.31}$$

i postoji jedinstveni niz ortogonalnih polinoma (π_k).

Dokaz: Neka je C_ε, $\varepsilon > 0$ granica oblasi D_+ sa malim polukrugom poluprečnika ε oko koordinatnog početka. Tada je po Cauchy-evoj teoremi

$$0 = \int_\Gamma \frac{w(z)}{iz}\,dz + \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1} \right) \frac{w(x)}{ix}\,dx + \int_{c_\varepsilon} \frac{w(z)}{iz}\,dz\,, \tag{2.32}$$

gde su Γ i c_ε kružni delovi od C_ε (sa poluprečnicima 1 i ε respektivno). Ako sada pustimo da $\varepsilon \downarrow 0$ u (2.32) dobijamo

$$0 = \mu_0 - i \fint_{-1}^{1} \frac{w(x)}{x}\,dx - \pi w(0)\,, \tag{2.33}$$

gde je integral na desnoj strani glavna vrednost Cauchy-evog integrala, koja je zbog simetrije težinske funkcije w jednaka 0. Dakle, važi (2.31). ■

Iz uslova (2.30) sledi da je u (2.10) $a_k = 0$ za sve $k \geqslant 0$, pa iz (2.26), (2.25) i (2.24) dobijamo

$$\alpha_0 = \theta_0, \qquad \alpha_k = \theta_k - \theta_{k-1}, \qquad \beta_k = \theta_{k-1}^2 \qquad (k \geqslant 1)\,, \tag{2.34}$$

i prema (2.16)

$$\left\{\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{m_0}{\mu_0}, \qquad \theta_1 = \frac{b_1}{\theta_0}, \\ \theta_{2m} &= \theta_0 \frac{b_2 b_4 \cdots b_{2m}}{b_1 b_3 \cdots b_{2m-1}} \\ \theta_{2m+1} &= \frac{1}{\theta_0} \frac{b_1 b_3 \cdots b_{2m+1}}{b_2 b_4 \cdots b_{2m}} \end{aligned}\right. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{2.35}$$

Razmotrimo specijalno Gegenbauer-ove težinske funkcije

$$w(z) = (1 - z^2)^{\lambda - 1/2}, \qquad \lambda > -\frac{1}{2}\,. \tag{2.36}$$

Tada je $p_k(z) = \widehat{C}_k^\lambda(z)$, gde su $\widehat{C}_k^\lambda(z)$ monični Gegenbauer-ovi polinomi, za koje je

$$\begin{aligned} b_0 &= m_0 = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 1)}\,, \\ b_k &= \frac{k(k + 2\lambda - 1)}{4(k + \lambda)(k + \lambda - 1)} \qquad (k \geqslant 1)\,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Sada je na osnovu relacije (2.16)

$$\theta_n = \frac{n(n + 2\lambda - 1)}{4(n + \lambda)(n + \lambda - 1)} \frac{1}{\theta_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,, \qquad \theta_0 = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1)}\,,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1)}\,, \\ \theta_k &= \frac{1}{\lambda + k} \frac{\Gamma((k+2)/2)\Gamma(\lambda + (k+1)/2)}{\Gamma((k+1)/2)\Gamma(\lambda + (k/2))} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,. \end{aligned} \tag{2.38}$$

2.4 Nule polinoma ortogonalnih na polukrugu

2.4.1 Izračunavanje nula

Iz rekurentne relacije (2.20) sledi da su nule polinoma $\pi_n(z)$ sopstvene vrednosti kompleksne trodijagonalne matrice

$$J_n = \begin{bmatrix} i\alpha_0 & 1 & & & 0 \\ \beta_1 & i\alpha_1 & 1 & & \\ & \beta_2 & i\alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & \beta_{n-1} & i\alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

Elementi matrice J_n se računaju iz (2.26), (2.25), (2.24) i (2.16). Vrednost μ_0 koja je potrebna za prethodna izračunavanja može se dobiti iz (2.12) numeričkom integracijom. Sopstene vrednosti se mogu računati QR algoritmom [17, 34].

Ako je težinska funkcija simetrična onda je $\beta_k = \theta_{k-1}^2 > 0$ i matrica (2.39) se može transformisati u realnu matricu. Naime, ako je

$$D_n = \operatorname{diag}(1,\, i\theta_0,\, i^2\theta_0\theta_1,\, i^3\theta_0\theta_1\theta_2,\, \ldots,\, i^{n-1}\theta_0\theta_1\ldots\theta_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

tada su sopstvene vrednosti ζ_ν matrice (2.39) jednake $i\eta_\nu$ gde su η_ν sopstvene vrednosti realne nesimetrične trodijagonalne matrice

$$-iD_n^{-1}J_nD_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \theta_0 & & & 0 \\ -\theta_0 & \alpha_1 & \theta_1 & & \\ & -\theta_1 & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \theta_{n-2} \\ 0 & & & -\theta_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.40}$$

2.4.2 Simetrične težinske funkcije

Neka težinska funkcija w zadovoljava sve uslove kao na početku poglavlja 2.1 i uslov

$$w(-z) = w(z) \quad \text{i} \quad w(0) > 0\,. \tag{2.41}$$

Tada su prema (2.35) svi koeficijenti $\theta_{n-1} > 0$.

Za ispitivanje nula polinoma π_n koristićemo sledeću teoremu Giroux-a [26, Teorema 3.2.7.]:

Teorema 2.4. *Neka je*

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

$$g(x) = (x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_n)$$

sa $x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_{n-1} < x_n$. *Tada, za bilo koji realan broj c, nule polinoma* $x \mapsto h(x) = f(x) + icg(x)$ *leže sve u polupojasu* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $x_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x_n$ *ili leže sve u konjugovanom polupojasu.*

Teorema 2.5. *Ako je* $\zeta \in \mathbb{C}$ *nula polinoma* π_n *tada je i* $-\overline{\zeta}$ *takođe nula polinoma* π_n, *tj. nule polinoma* π_n *su locirane simetrično u odnosu na imaginarnu osu. Sve nule imaju pozitivan imaginarni deo i nalaze se u polupojasu*

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im}\, z > 0,\ -\zeta_n \leqslant \operatorname{Re}\, z \leqslant \zeta_n\},$$

gde je ζ_n *najveća nula polinoma* p_n.

DOKAZ: Neka je $\overline{\pi}_n$ polinom koji se dobija iz polinoma π_n tako što se konjuguju svi koeficijenti, tj.

$$\overline{\pi}_n(z) = \overline{\pi_n(\overline{z})}\,.$$

Tada je na osnovu relacije (2.14)

$$\pi_n(-z) = (-1)^n \overline{\pi}_n(z)\,. \tag{2.42}$$

Ako je ζ nula polinoma π_n, tada je prema (2.42)

$$0 = \pi_n(\zeta) = (-1)^n \overline{\pi}_n(-\zeta) = (-1)^n \overline{\pi_n(-\overline{\zeta})}\,,$$

pa je $\pi_n(-\overline{\zeta}) = 0$.

Na osnovu rezultata Giroux-a sve nule polinoma π_n se nalaze ili u polupojasu $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geqslant 0,\ -\zeta_n \leqslant \text{Re } z \leqslant \zeta_n\}$ ili u konjugovanom polupojasu. Na osnovu (2.29) zbir svih nula ima pozitivan imaginarni deo pa su sve nule u polupojasu $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geqslant 0,\ -\zeta_n \leqslant \text{Re } z \leqslant \zeta_n\}$. Ostaje još da pokažemo da polinomi π_n nemaju realne nule. Ako bi $\zeta \in \mathbb{R}$ bila nula polinoma π_n tada bi moralo biti $p_{n-1}(\zeta) \neq 0$, jer bi u suprotnom zbog (2.14) dobili $p_n(\zeta) = p_{n-1}(\zeta) = 0$, što je nemoguće. Onda iz (2.14) sledi $i\theta_{n-1} = \dfrac{p_n(\zeta)}{p_{n-1}(\zeta)}$, što je opet nemoguće. Dakle, sve nule polinoma π_n leže u S_+. ■

TEOREMA 2.6. *Sve nule polinoma π_n nalaze se u poludisku $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \text{Im } z > 0\}$, tačnije u $D_+ \cap S_+$, sa eventualnim izuzetkom jedne proste nule koja je na pozitivnom delu imaginarne ose.*

DOKAZ: Pretpostavimo prvo da je ζ nula polinoma π_n koja nije na imaginarnoj osi (tada je prema teoremi 2.5. $n \geqslant 2$). Prema teoremi 2.5. dovoljno je pokazati da je $|\zeta| < 1$. Polinom π_n tada na osnovu teoreme 2.5. ima i nulu $-\overline{\zeta}$, pa je

$$\pi_n(x) = p_n(x) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(x) = (x-\zeta)(x+\overline{\zeta})r_{n-2}(x)\,, \tag{2.43}$$

gde je $r_{n-2} \not\equiv 0$ polinom stepena $n-2$. Zbog ortogonalnosti p_k i relacije (2.43) dobijamo

$$0 = \int_{-1}^{1} \pi_n(x)\overline{r_{n-2}(x)}w(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x-\zeta)(x+\overline{\zeta})|r_{n-2}(x)|^2 w(x)\,dx\,, \tag{2.44}$$

Obzirom da je

$$(x-\zeta)(x+\overline{\zeta}) = x^2 - 2ix\,\text{Im}\,\zeta - |\zeta|^2\,,$$

uzimajući realan deo iz (2.44) dobijamo

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - |\zeta|^2)|r_{n-2}(x)|^2 w(x)\,dx = 0\,,$$

što implicira $|\zeta| < 1$.

Iz istog razloga π_n ne može imati dve različite nule ili jednu dvostruku nulu na imaginarnoj osi sa imaginarnim delom ne manjim od 1. $\blacksquare$

Razmotrimo sada specijalno Gegenbauer-ove težinske funkcije

$$w(z) = (1 - z^2)^{\lambda - 1/2}, \qquad \lambda > -\frac{1}{2}, \tag{2.45}$$

i označimo odgovarajuće polinome π_n sa

$$\pi_n^\lambda(z) = \widehat{C}_n^\lambda(z) - i\theta_{n-1}^\lambda \widehat{C}_{n-1}^\lambda(z) \qquad (\theta_{n-1}^\lambda \text{ dato sa } (2.38)). \tag{2.46}$$

Sa $\widehat{C}_k^\lambda$ su označeni monični Gegenbauer-ovi polinomi.

Lema 2.1 *Za Gegenbauer-ove težinske funkcije* (2.45) *konstante* θ_{n-1}^λ *zadovoljavaju sledeće relacije:*

$$\begin{array}{lll} \theta_{n-1}^\lambda < \dfrac{1}{2} & za \quad -\dfrac{1}{2} < \lambda < 0 \quad ili \quad \lambda > 1 & \\ \dfrac{1}{2} < \theta_{n-1}^\lambda \leqslant \max(\theta_1^\lambda, \theta_2^\lambda) & za \ \ 0 < \lambda < 1 & (n = 2, 3, \ldots). \\ \theta_{n-1}^\lambda = \dfrac{1}{2} & za \quad \lambda = 0 \ \ ili \ \ \lambda = 1 & \end{array} \tag{2.47}$$

Dokaz: Iz (2.38) sledi da je

$$\theta_{k+2}^\lambda \gtreqless \theta_k^\lambda \qquad \text{ako i samo ako je} \qquad \lambda(\lambda - 1) \gtreqless 0. \tag{2.48}$$

Takođe iz (2.38) primenom Stirling-ove formule dobijamo

$$\lim_{k\to\infty} \theta_k^\lambda = \frac{1}{2}. \tag{2.49}$$

Za $-\dfrac{1}{2} < \lambda < 0$ ili $\lambda > 1$ je prema (2.48) $\theta_{k+2}^\lambda > \theta_k^\lambda$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, pa je prema (2.49) $\theta_{n-1}^\lambda < \dfrac{1}{2}$ za sve $n \geqslant 2$.

Za $0 < \lambda < 1$ je prema (2.48) $\theta_{k+2}^\lambda < \theta_k^\lambda$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ i prema (2.49) $\dfrac{1}{2} < \theta_{n-1}^\lambda \leqslant \max(\theta_1^\lambda, \theta_2^\lambda)$ za sve $n \geqslant 4$ (i trivijalno za $n = 2$ i $n = 3$).

Konačno, za $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$ je $\theta_{n-1}^\lambda = \dfrac{1}{2}$ za sve $n \geqslant 2$. $\blacksquare$

Teorema 2.7. *Za* $\lambda > -\dfrac{1}{2}$ *sve nule polinoma* $\pi_n^\lambda(z)$ $(n \geqslant 2)$ *nalaze se u poludisku* $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im}\ z > 0\}$.

Dokaz: Prema teoremi 2.6. dovoljno je pokazati da π_n^λ $(n \geqslant 2)$ nema čisto imaginarne nule sa imaginarnim delom ne manjim od 1.

Neka je $\zeta = iy$ nula polinoma π_n^λ. Prema (2.14) (ili (2.46)) je

$$p_n(iy) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(iy) = 0\,,$$

gde je $p_n = \widehat{C}_n^\lambda$ i $\theta_{n-1} = \theta_{n-1}^\lambda$. Sada je

$$\frac{p_n(iy)}{ip_{n-1}(iy)} = \theta_{n-1}\,. \tag{2.50}$$

Obeležimo

$$\omega_k(y) = \frac{p_k(iy)}{ip_{k-1}(iy)} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)\,. \tag{2.51}$$

Tada se iz rekurentne relacije za p_k (relacije (2.10) i (2.11)) dobija

$$\omega_1(y) = y, \qquad \omega_k(y) = y + \frac{b_{k-1}}{\omega_{k-1}(y)} \qquad (k = 2, 3, \dots)\,,$$

odakle je zbog $b_{k-1} > 0$,

$$\omega_k(y) \geqslant 1 \quad \text{za} \quad y \geqslant 1.$$

Prema tome leva strana u jednakosti (2.50) je $\geqslant 1$ za $y \geqslant 1$ i $n \geqslant 1$. Treba još pokazati da je

$$\theta_{n-1} < 1 \quad \text{za} \quad n \geqslant 2\,, \tag{2.52}$$

tako da (2.50) ne može važiti za $y \geqslant 1$ kada je $n \geqslant 2$, pa prema tome i polinom π_n^λ $(n \geqslant 2)$ ne može imati nulu iy takvu da je $y \geqslant 1$.

Prema lemi 2.1 nejednakost (2.52) je tačna ako je $-\frac{1}{2} < \lambda \leqslant 0$ ili $\lambda \geqslant 1$, a za $0 < \lambda < 1$ će slediti iz $\theta_1 < 1$, $\theta_2 < 1$. To se može pokazati korišćenjem Gautschi-eve nejednakosti za Γ funkciju:

Za $x > 0$, $0 < s < 1$ važi

$$x^{1-s} < \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+s)} < (x+1)^{1-s}\,. \tag{2.53}$$

Na osnovu (2.38) i gornje granice u (2.53) sledi da je za $\lambda > 0$

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1)}{2(\lambda+1)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} < \frac{\sqrt{\pi}}{2(\lambda+1)}(\lambda+1)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(\lambda+1)^{1/2}} < \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$$

i da je za $0 < \lambda < 1$

$$\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}(\lambda+2)}\frac{\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}{\Gamma(\lambda+1)} < \frac{2}{\sqrt{\pi}(\lambda+2)}\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)^{1/2} < \sqrt{\frac{5}{2\pi}} < 1\,. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.7. ne važi za $n = 1$ i $-\frac{1}{2} < \lambda \leqslant 0$, jer nula $i\alpha_0 = i\theta_0$ ima modul koji raste od 1 do ∞ kada λ opada od 0 do $-\frac{1}{2}$. Međutim, za $\lambda > 0$ teorema važi i za $n = 1$.

Lema 2.2 *$\theta_{n-1} = \theta_{n-1}^{\lambda}$ zadovoljava sledeću nejednakost*

$$4(n+\lambda-1)^2\theta_{n-1}^2 < n(n+2\lambda-1), \qquad n \geqslant 2, \qquad \lambda > -\frac{1}{2}\,. \tag{2.54}$$

Dokaz: Desna strana nejednakosti (2.54) je pozitivna jer je $n+2\lambda-1 > n-2 \geqslant 0$. Prema (2.38) je

$$\begin{aligned} 4(n+\lambda-1)^2\theta_{n-1}^2 &= \left(2\frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(\lambda+(n/2))}{\Gamma(n/2)\Gamma(\lambda+(n-1)/2)}\right)^2 \\ &= \left[2\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\right]^2\left(\frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(\lambda+(n/2))}{\Gamma((n/2)+1)\Gamma(\lambda+(n+1)/2)}\right)^2, \end{aligned}$$

tako da nejednakost (2.54) postaje

$$\left(\frac{\Gamma((n/2)+1)\Gamma(\lambda+(n+1)/2)}{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(\lambda+(n/2))}\right)^2 > \frac{1}{4}n(n+2\lambda-1)\,, \tag{2.55}$$

koja sledi iz donje granice u (2.53) primenjene prvo za $x = \frac{1}{2}n$, $s = \frac{1}{2}$, a zatim za $x = \lambda + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ i $s = \frac{1}{2}$. ∎

Teorema 2.8. *Za $\lambda > -\frac{1}{2}$ sve nule polinoma $\pi_n^{\lambda}(z)$ su proste.*

Dokaz: Dovoljno je, naravno, pokazati da teorema važi za $n \geqslant 2$. Obeležimo $p_n = \widehat{C}_n^{\lambda}$ i $\theta_{n-1} = \theta_{n-1}^{\lambda}$.

Neka je ζ nula polinoma $\pi_n = \pi_n^{\lambda}$. Prema relaciji (2.14) je tada

$$p_n(\zeta) = i\theta_{n-1}p_{n-1}(\zeta)\,.$$

Na osnovu iste relacije (2.14) je

$$\begin{aligned} \pi_n'(\zeta) &= p_n'(\zeta) - i\theta_{n-1}p_{n-1}'(\zeta) \\ &= \frac{1}{p_{n-1}(\zeta)}[p_n'(\zeta)p_{n-1}(\zeta) - p_n(\zeta)p_{n-1}'(\zeta)]\,. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Iz

$$(1-\zeta^2)p_k'(\zeta) = (k+2\lambda)\zeta p_k(\zeta) - 2(k+\lambda)p_{k+1}(\zeta)$$

i rekurentne relacije

$$p_{k+1}(\zeta) = \zeta p_k(\zeta) - \frac{k(k+2\lambda-1)}{4(k+\lambda-1)(k+\lambda)} p_{k-1}(\zeta)\,,$$

iz (2.56) dobijamo

$$\pi_n'(\zeta) = \frac{p_{n-1}(\zeta)}{2(1-\zeta^2)(n+\lambda-1)} [n(n+2\lambda-1) - 4(n+\lambda-1)^2\theta_{n-1}^2$$

$$-2(2n+2\lambda-1)(n+\lambda-1)\zeta i\theta_{n-1}]\,.$$

Ako je $\zeta = \alpha + i\beta$ tada je

$$\pi_n'(\zeta) = \frac{p_{n-1}(\zeta)}{2(1-\zeta^2)(n+\lambda-1)} [n(n+2\lambda-1) - 4(n+\lambda-1)^2\theta_{n-1}^2$$

$$+2(2n+2\lambda-1)(n+\lambda-1)\beta\theta_{n-1} - 2(2n+2\lambda-1)(n+\lambda-1)\alpha i\theta_{n-1}]\,,$$

pa je zbog leme 2.2 i činjenice da je $\beta > 0$ $\pi_n'(\zeta) \neq 0$, odnosno ζ je prosta nula polinoma π_n. ■

2.5 Jacobi-eva težinska funkcija

Razmotrimo sada slučaj Jacobi-evih težinskih funkcija

(2.57) $$w(z) = w^{(\alpha,\beta)}(z) = (1-z)^\alpha (1+z)^\beta, \quad \alpha > -1, \ \ \beta > -1\,.$$

Egzistencija odgovarajućeg niza ortogonalnih polinoma (π_k) sledi na osnovu sledeće teoreme.

Teorema 2.9. *Za Jacobi-eve težinske funkcije* (2.57) *važi*

(2.58) $$\mu_0 = \mu_0^{(\alpha,\beta)} = \int_0^\pi w^{(\alpha,\beta)}\left(e^{i\theta}\right)\, d\theta = \pi + i \,⨍_{-1}^{1} \frac{w^{(\alpha,\beta)}(x)}{x}\, dx\,,$$

gde je integral na desnoj strani Cauchy-eva glavna vrednost integrala. Prema tome Re $\mu_0 \neq 0$.

Dokaz: Postupajući analogno dokazu teoreme 2.3., iz jednakosti (2.33) i činjenice da je $w^{(\alpha,\beta)}(0) = 1$ sledi tražena jednakost (2.58). ■

Na osnovu teoreme 2.1. sada imamo

(2.59) $$\pi_n(z) = \pi_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z) - i\theta_{n-1}^{(\alpha,\beta)} \widehat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z)\,,$$

gde su $\widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}$ monični Jacobi-evi polinomi i $\theta_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ koeficijenti određeni relacijom (2.15) za $p_k(z) = \widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(z)$ i $q_k(z)$ određeno relacijom (2.9).

Teorema 2.10. *Važi sledeća jednakost*

$$\pi^{(\beta,\alpha)}(z) = (-1)^n \overline{\pi}_n^{(\alpha,\beta)}(-z), \tag{2.60}$$

gde $\overline{\pi}_n$ označava polinom koji se dobija iz polinoma π_n konjugovanjem svih koeficijenata, tj.

$$\overline{\pi}_n(z) = \overline{\pi_n(\overline{z})}\,.$$

Dokaz: Poznato je da za monične Jacobi-eve polinome važi

$$\widehat{P}_k^{(\beta,\alpha)} = (-1)^k \widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(-z)\,.$$

Kako je

$$w^{(\beta,\alpha)}(z) = w^{(\alpha,\beta)}(-z)\,,$$

to iz (2.58) sledi da je

$$\mu_0^{(\beta,\alpha)} = \overline{\mu_0^{(\alpha,\beta)}}\,.$$

Iz (2.9) sledi

$$q_k^{(\beta,\alpha)}(z) = (-1)^{k+1} q_k^{(\alpha,\beta)}(-z)\,,$$

što zajedno sa (2.15) daje

$$\theta_{n-1}^{(\beta,\alpha)} = \overline{\theta_{n-1}^{(\alpha,\beta)}}\,,$$

pa je

$$\pi_n^{(\beta,\alpha)}(z) = (-1)^n \left[\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(-z) + i\overline{\theta_{n-1}^{(\alpha,\beta)}}\,\widehat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(-z)\right]\,,$$

odakle, prema (2.59), sledi (2.60). ■

Veličina $\mu_0^{(\alpha,\beta)}$ potrebna je za generisanje koeficijenata $\theta_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ prema (2.16) i koeficijenata rekurentne relacije α_k, β_k prema (2.27) i (2.24). Za numeričko računanje veličine $\mu_0^{(\alpha,\beta)}$ bolje je koristiti prvi izraz u (2.58), koji se zbog

$$\begin{aligned}
\left(1-e^{i\theta}\right)^\alpha \left(1+e^{i\theta}\right)^\beta &= \left(2\sin^2\frac{\theta}{2} - i\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - i\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^\beta \\
&= 2^{\alpha+\beta}\sin^\alpha\frac{\theta}{2}\cos^\beta\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\,\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\right)^\beta \\
&= 2^{\alpha+\beta}\sin^\alpha\frac{\theta}{2}\cos^\beta\frac{\theta}{2}\,e^{-i\alpha(\pi-\theta)/2}e^{i\beta\theta/2} \\
&= 2^{\alpha+\beta}\sin^\alpha\frac{\theta}{2}\cos^\beta\frac{\theta}{2}e^{-i\alpha\pi/2}e^{i(\alpha+\beta)\theta/2}
\end{aligned}$$

može napisati u obliku

$$\mu_0^{(\alpha,\beta)} = 2^{\alpha+\beta}e^{-i\alpha\pi/2}\int_0^\pi e^{i(\alpha+\beta)\theta/2}\sin^\alpha\frac{\theta}{2}\cos^\beta\frac{\theta}{2}\,d\theta\,. \tag{2.61}$$

Nakon smene promenljive

$$\theta = (t+1)\frac{\pi}{2}$$

iz (2.61) se dobija

$$\mu_0^{(\alpha,\beta)} = 2^{\alpha+\beta-1}\pi e^{i(\beta-\alpha)\pi/4}$$

$$\times \int_{-1}^{1} e^{i(\alpha+\beta)t\pi/4} \left[\frac{\sin((t+1)\pi/4)}{t+1}\right]^{\alpha} \left[\frac{\cos((t+1)\pi/4)}{1-t}\right]^{\beta} w^{(\beta,\alpha)}(t)\, dt\,, \tag{2.62}$$

gde je integrand (izuzev težinske funkcije $w^{(\beta,\alpha)}$) sada regularan na $[-1,1]$. Za numeričko računanje $\mu_0^{(\alpha,\beta)}$ prema (2.62) mogu se koristiti Gauss–Jacobi-eve kvadrature sa parametrima (β,α).

Znajući $\mu_0^{(\alpha,\beta)}$ prema (2.16), (2.27) i (2.24) možemo generisati matricu (2.39) i računati nule polinoma $\pi_n^{(\alpha,\beta)}$ procedurom opisanom u poglavlju 2.4.1.

Dobijeni numerički rezultati ukazuju da su sve nule polinoma $\pi_n^{(\alpha,\beta)}$ za $n \geqslant 2$ proste i da se nalaze u poludisku $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\, \mathrm{Im}\ z > 0\}$.

2.6 Gauss–Gegenbauer-ove kvadrature na polukrugu

U odeljku 2.4.2 je pokazano da su za Gegenbauer-ove težinske funkcije

$$w(z) = (1-z^2)^{\lambda-1/2}, \quad \lambda > -\frac{1}{2}$$

sve nule polinoma $\pi_n^{\lambda}(z)$ $(n \geqslant 2)$ proste i nalaze se u poludisku $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im}\ z > 0\}$ (teoreme 2.7. i 2.8.).

U ovom poglavlju ćemo razmotriti konstruisanje Gauss–Christoffel-ovih kvadratura na polukrugu sa Gegenbauer-ovim težinskim funkcijama

$$\int_0^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) w\left(e^{i\theta}\right)\, d\theta = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f(\zeta_\nu) + R_n(f) \tag{2.63}$$

koje su tačne za sve algebarske polinome stepena ne višeg od $2n-1$, tj. $R_n(f) = 0$ za sve $f \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Čvorovi $\zeta_\nu = \zeta_\nu^{(n)}$ su nule polinoma $\pi_n(z) = \pi_n^{\lambda}(z)$.

Označimo sa $\widetilde{\pi}_k(z) = \pi_k(z)/||\pi_k||$ ortonormirane polinome i sa

$$\widetilde{\boldsymbol{\pi}}(z) = [\widetilde{\pi}_0(z)\ \ \widetilde{\pi}_1(z)\ \ \ldots\ \ \widetilde{\pi}_{n-1}(z)]^T$$

vektor prvih n od njih. Tada je $\widetilde{\pi}_n(\zeta_\nu) = 0$ ako i samo ako je

$$J_n \widetilde{\boldsymbol{\pi}}(\zeta_\nu) = \zeta_\nu \widetilde{\boldsymbol{\pi}}(\zeta_\nu)\,,$$

gde je J_n Jacobi-eva matrica

$$J_n = \begin{bmatrix} i\alpha_0 & \theta_0 & & & 0 \\ \theta_0 & i\alpha_1 & \theta_1 & & \\ & \theta_1 & i\alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \theta_{n-2} \\ 0 & & & \theta_{n-2} & i\alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.64}$$

Čvorovi $\zeta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$ su sopstvene vrednosti matrice J_n, a $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}(\zeta_\nu)$ odgovarajući sopstveni vektori. Definišimo

$$\mathbf{p}(z) = D_n^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\pi}}(z),$$

gde je, kao i u odeljku 2.4.1,

$$D_n = \mathrm{diag}(1,\, i\theta_0,\, i^2\theta_0\theta_1,\, i^3\theta_0\theta_1\theta_2,\, \dots,\, i^{n-1}\theta_0\theta_1\dots\theta_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Tada dolazimo do novog problema sopstvenih vrednosti

$$A_n\mathbf{p}(\zeta_\nu) = \eta_\nu\mathbf{p}(\zeta_\nu),$$

tj. $\mathbf{p}(\zeta_\nu)$ je sopstveni vektor realne matrice $A_n = -iD_n^{-1}J_nD_n$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\eta_\nu = -i\zeta_\nu$. Označimo sa V_n matricu sopstvenih vektora matrice A_n, normalizovanih tako da su im prve komponente jednake 1. Tada je

$$V_n = [\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \dots\ \ \mathbf{v}_n], \quad \mathbf{v}_\nu = \sqrt{\pi}\mathbf{p}(\zeta_\nu).$$

Zamenjujići u (2.63) $f(z) = \widetilde{\pi}_k(z) \ \ (k = 0, 1, \dots, n-1)$, dobija se

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu\widetilde{\pi}_k(\zeta_\nu) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\pi}}\delta_{k0} \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

gde je

$$\mu_0 = \int_0^\pi w\left(e^{i\theta}\right)\, d\theta = \pi w(0) = \pi$$

i δ_{k0} Kronecker-ova delta.

Ako označimo $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \dots\ \ \sigma_n]^T$ onda se gornji sistem može zapisati u obliku

$$V_n\boldsymbol{\sigma} = \pi\mathbf{e}_1, \tag{2.65}$$

gde je $\mathbf{e}_1 = [1\ \ 0\ \ \dots\ \ 0]^T$ prvi koordinatni vektor.

Težinski koeficijenti $\sigma_\nu \ \ (\nu = 1, 2, \dots, n)$ su rešenja sistema (2.65).

3

S-ortogonalnost i konstrukcija kvadraturnih formula Gauss-Turán-ovog tipa

Prve ideje o kvadraturama kod kojih se čvorovi i težinski koeficijenti određuju iz uslova maksimalne moguće tačnosti potiču još iz XVII veka (Newton i Cotes). Oslanjajući se na radove Newton-a i Cotes-a i svoj rad o hipergeometrijskim razvojima iz 1812 godine, C.F. Gauss je 1814 razvio metod za integraciju, koji značajno poboljšava dotad poznate Newton-Cotes-ove formule. Gauss-ove rezultate je po formi pojednostavio Jacobi 1826 godine. U XIX veku Gauss-ove kvadrature su detaljnije razrađivali i dalje razvijali Mehler, Christofell i drugi. Dobijene rezultate su sistematizovali i uobličili u teoriju Chirstoffel 1877, Radau 1880 i Heine 1881. Ovaj metod integracije danas se obično naziva Gauss-Christoffel-ov metod.

Više od sto godina nakon što je Gauss objavio svoj čuveni metod aproksimacije integrala, pojavila se ideja o numeričkoj integraciji koja uključuje višestruke čvorove. Uzimajući bilo koji sistem od n različitih tačaka $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ i n nenegativnih celih brojeva $m_1, m_2, \ldots, m_n$, polazeći od Hermite-ove interpolacione formule L. Chakalov je 1948 izveo kvadraturnu formulu

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{n} \left[A_{0,\nu} f(\tau_\nu) + A_{1,\nu} f'(\tau_\nu) + \cdots + A_{m_\nu-1,\nu} f^{(m_\nu-1)}(\tau_\nu)\right], \tag{3.1}$$

koja je tačna za sve polinome stepena najviše $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - 1$.

Uzimajući u (3.1) $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = k$, Turán je 1950 proučavao kvadraturne formule oblika

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\nu=1}^{n} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + R_{n,k}(f), \tag{3.2}$$

gde je

$$A_{i,\nu} = \int_{-1}^{1} \ell_{\nu,i}(t)\, dt \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n;\ \ i = 0, 1, \dots, k-1)\,,$$

a $\ell_{\nu,i}(t)$ su fundamentalni polinomi Hermite-ove interpolacije. Koeficijenti $A_{i,\nu}$ nazivaju se Cotes-ovi brojevi višeg reda.

Označimo sa $\mathcal{P}_m$ skup svih algebarskih polinoma stepena najviše m. Težinski koeficijenti u formuli (3.2) se mogu odrediti tako da ona bude tačna za sve $f \in \mathcal{P}_{kn-1}$, za bilo koji izbor čvorova $-1 \leqslant \tau_1 < \cdots < \tau_n \leqslant 1$.

Specijalno, za $k = 1$ formula (3.2) postaje

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_{0,\nu} f(\tau_\nu) + R_{n,1}(f)\,.$$

Poslednja formula je tačna za sve polinome stepena ne višeg od $2n-1$ ako za čvorove τ_ν uzmemo nule Legendre-ovog polinoma P_n. To je poznata Gauss-Legendre-ova kvadraturna formula.

Obzirom na stepen tačnosti Gauss-Christoffel-ovih formula, postavlja se pitanje da li se čvorovi u kvadraturnoj formuli (3.2) mogu izabrati tako da ona bude tačna za sve algebarske polinome stepena najviše $(k+1)n - 1$. Turán je pokazao da je odgovor negativan za $k = 2$ i pozitivan za $k = 3$. Dokazao je da za čvorove τ_ν treba uzeti nule moničnog polinoma $\pi_n^* = t^n + \cdots$ koji minimizira integral

$$\int_{-1}^{1} [\pi_n(t)]^4\, dt\,,$$

gde je $\pi_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$.

U opštem slučaju odgovor je negativan za parne, a pozitivan za neparne k i τ_ν su nule polinoma koji minimizira

$$\int_{-1}^{1} [\pi_n(t)]^{k+1}\, dt\,.$$

Dakle, k mora biti neparan broj. Neka je zato $k = 2s + 1$, $(s \geqslant 0)$. Umesto formule (3.2) možemo posmatrati opštije kvadraturne formule Gauss-Turán-ovog tipa

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\lambda(t) = \sum_{i=0}^{2s} \sum_{\nu=1}^{n} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + R_{n,2s}(f)\,, \tag{3.3}$$

gde je $d\lambda(t)$ nenegativna mera na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ sa kompaktnim ili beskonačnim nosačem, za koju svi momenti

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} t^k\, d\lambda(t) \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

postoje i konačni su i $\mu_0 > 0$. Poznato je da je formula (3.3) tačna za sve polinome stepena ne višeg od $2(s+1)n-1$. Čvorovi τ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ in (3.3) su nule moničnog polinoma $\pi_{n,s}(t)$ koji minimizira integral

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}} [\pi_n(t)]^{2s+2} \, d\lambda(t) \,,$$

gde je $\pi_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Minimizacija dovodi do uslova

$$\int_{\mathbb{R}} [\pi_n(t)]^{2s+1} \, t^k \, d\lambda(t) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \,. \tag{3.4}$$

Polinomi $\pi_n = \pi_{n,s}$ koji zadovoljavaju uslov (3.4) poznati su kao s-ortogonalni polinomi na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ sa merom $d\lambda(t)$. Slučaj $d\lambda(t) = w(t)\,dt$ na $[a, b]$ (s-ortogonalni polinomi na intervalu $[a, b]$ sa težinskom funkcijom w) izučavali su italijanski matematičari Ossicini, Ghizzetti, Guerra i drugi. Njihove osobine će biti date detaljnije u narednom poglavlju. Specijalno za $s = 0$ imamo standardne ortogonalne polinome sa merom $d\lambda(t)$ (odnosno sa težinskom funkcijom w).

3.1 S-ortogonalni polinomi sa datom težinskom funkcijom

Neka je na intervalu $[a, b]$ definisana težinska funkcija $w(x)$, koja je merljiva i nenegativna i $w(x) > 0$ na skupu pozitivne mere. Neka je dalje $w(x) \in L[a, b]$ ako je interval $[a, b]$ konačan, odnosno $w(x)x^n \in L[a, b]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ako je interval $[a, b]$ beskonačan. Neka je unapred dat niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ brojeva različitih od nule.

Za fiksirani ceo broj $s > 0$ posmatrajmo niz polinoma $(\pi_{n,s}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, gde je $\pi_{n,s}(x)$ polinom stepena n kod koga je koeficijent uz x^n jednak a_n takav da važi

$$\int_a^b \pi_{m,s}(x) \, [\pi_{n,s}(x)]^{2s+1} \, w(x) \, dx = 0 \quad \text{za sve} \ \ m < n \,, \tag{3.5}$$

ili ekvivalentno

$$\int_a^b \Pi_{n-1}(x) \, [\pi_{n,s}(x)]^{2s+1} \, w(x) \, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \,, \tag{3.6}$$

gde je $\Pi_{n-1}(x)$ proizvoljan polinom iz klase $\mathcal{P}_{n-1}$.

Teorema 3.1. *Postoji niz polinoma* $(\pi_{n,s}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *koji zadovoljava uslov* (3.6).

Ghizzetti i Ossicini [15] su egzistenciju polinoma $\pi_{n,s}(x)$ pokazali korišćenjem sledeće teoreme funkcionalne analize:

Ako je S linearan i normiran prostor, fiksirajući n proizvoljnih linearno nezavisnih njegovih tačaka $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, za svaku tačku $u \in S$ postoji linearna kombinacija $\sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k$ tačaka $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ koja je najbolja aproksimacija tačke u (u smislu da je vrednost $\left|\left|u - \sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k\right|\right|$ minimalna).

Prostor S u ovom slučaju je prostor $L^{2s+2}[a,b]$ svih funkcija $u = u(x)$ merljivih na $[a,b]$ za koje je $\int_a^b [u(x)]^{2s+2} dx < +\infty$. Ovaj prostor je linearan i normiran sa normom

$$||u|| = \left(\int_a^b |u(x)|^{2s+2} dx\right)^{\frac{1}{2s+2}} .$$

Ako u $L^{2s+2}[a,b]$ fiksiramo n tačaka $u_k = x^k [w(x)]^{\frac{1}{2s+2}}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ tada, prema datoj teoremi, za tačku $u = a_n x^n [w(x)]^{\frac{1}{2s+2}}$ postoje konstante $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ takve da je norma

$$\left|\left|u - \sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k\right|\right| = \left(\int_a^b \left[a_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k\right]^{2s+2} w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2s+2}}$$

minimalna, tj. za svako n i za svaki izbor $a_n \neq 0$ postoji polinom stepena n

$$\pi_{n,s}(x) = a_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$$

takav da je vrednost

$$\int_a^b \left[\pi_{n,s}(x)\right]^{2s+2} w(x)\, dx \tag{3.7}$$

minimalna.

Dakle, svaka od n funkcija

$$F_k(\lambda) = \int_a^b \left[\pi_{n,s}(x) + \lambda x^k\right]^{2s+2} w(x)\, dx \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

mora imati izvod jednak nuli za $\lambda = 0$. Kako je

$$F_k'(\lambda) = (2s+2) \int_a^b x^k \left[\pi_{n,s}(x) + \lambda x^k\right]^{2s+1} w(x)\, dx ,$$

to uslov $F_k'(0) = 0$ daje

$$\int_a^b x^k \left[\pi_{n,s}(x)\right]^{2s+1} w(x)\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1) ,$$

što znači da polinom $\pi_{n,s}(x)$ zadovoljava (3.6). Prema tome, za svako n postoji polinom $\pi_{n,s}(x) = a_n x^n + \cdots$ koji zadovoljava tražene uslove.

Teorema 3.2. *Niz polinoma $(\pi_{n,s}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, s-ortogonalnih na intervalu $[a,b]$ sa težinskom funkcijom w, je jedinstven.*

Dokaz: Petpostavimo da postoji drugi niz s-ortogonalnih polinoma $(Q_{n,s}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $Q_{n,s}(x) = a_n x^n + \cdots$. Tada je

$$\deg\left(\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)\right) \leqslant n-1\,,$$

pa je zbog (3.6)

$$\int_a^b \left[\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)\right]\left[\pi_{n,s}(x)\right]^{2s+1} w(x)\,dx = 0$$

i

$$\int_a^b \left[\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)\right]\left[Q_{n,s}(x)\right]^{2s+1} w(x)\,dx = 0\,,$$

odakle je

$$\int_a^b \left[\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)\right]\left\{\left[\pi_{n,s}(x)\right]^{2s+1} - \left[Q_{n,s}(x)\right]^{2s+1}\right\} w(x)\,dx = 0\,,$$

odnosno

$$\int_a^b \left[\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)\right]^2 \sum_{k=0}^{2s} \left[\pi_{n,s}(x)\right]^{2s-k}\left[Q_{n,s}(x)\right]^k w(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1,2,\ldots)\,.$$

U poslednjem integralu, prvi faktor integranda, $[\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)]^2$, je nenegativan, drugi faktor (suma) je pozitivan osim u konačno mnogo tačaka i treći faktor, $w(x)$, je pozitivan na skupu pozitivne mere, pa prethodna jednakost važi samo ako je prvi faktor integranda identički jednak nuli, tj. ako je $Q_{n,s}(x) \equiv \pi_{n,s}(x)$. ■

Iz teoreme 3.2. sledi da ako koeficijenti a_n uz x^n nisu unapred zadati, već samo uslov s-ortogonalnosti (3.5), onda su polinomi $\pi_{n,s}(x)$ jedinstveni do na konstantan faktor.

Teorema 3.3. *Nule s-ortogonalnih polinoma $\pi_{n,s}(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ sa težinskom funkcijom w su realne, različite i leže unutar intervala $[a,b]$.*

Dokaz: Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ moguće realne nule neparne višestrukosti polinoma $\pi_{n,s}(x)$ koje leže unutar intervala $[a,b]$. Dokazaćemo da je $m = n$.

Neka je

$$\Pi_m(x) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ \prod_{i=1}^{m}(x - x_i), & m = 1,2,\ldots,n\,. \end{cases}$$

Tada $\Pi_m(x)\pi_{n,s}(x)$ ne menja znak na intervalu $[a,b]$, pa je

$$\int_a^b \Pi_m(x)[\pi_{n,s}(x)]^{2s+1}w(x)\,dx \neq 0$$

što je nemoguće za $m < n$. Dakle, mora biti $m = n$. ■

Označimo sa $\tau_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ nule polinoma $\pi_{k,s}$ uređene po veličini, tj.

$$\tau_1^{(k)} < \tau_2^{(k)} < \cdots < \tau_k^{(k)}\,.$$

TEOREMA 3.4. (Milovanović [24, Teorema 2.2]) *Za svako $s \in \mathbb{N}_0$ za nule polinoma $\pi_{n,s}$ i $\pi_{n+1,s}$ važi:*

$$\tau_1^{(n+1)} < \tau_1^{(n)} < \tau_2^{(n+1)} < \cdots < \tau_n^{(n+1)} < \tau_n^{(n)} < \tau_{n+1}^{(n+1)}\,.$$

TEOREMA 3.5. *Neka je interval $[a,b]$ oblika $[-c,c]$ i neka je $w(x)$ parna funkcija. Tada su polinomi $\pi_{n,s}(x)$ parni ili neparni u zavisnosti od toga da li je n parno ili neparno.*

DOKAZ: Definišimo I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sa

$$I_n = \int_{-c}^{c} \Pi_{n-1}(x)[\pi_{n,s}(-x)]^{2s+1}w(x)\,dx, \qquad \Pi_{n-1}(x) \in \mathcal{P}_{n-1}\,.$$

Nakon smene $x = -t$ dobija se

$$I_n = \int_{-c}^{c} \Pi_{n-1}(-t)[\pi_{n,s}(t)]^{2s+1}w(t)\,dt\,,$$

odakle je $I_n = 0$. To znači da se polinomi $\pi_{n,s}(-x)$ i $\pi_{n,s}(x)$ razlikuju samo za konstantan faktor, tj. $\pi_{n,s}(-x) = (-1)^n\pi_{n,s}(x)$, odakle sledi tvrđenje teoreme. ■

3.2 Numerička konstrukcija s-ortogonalnih polinoma

Uslov ortogonalnosti za s-ortogonalne polinome $\pi_{n,s} = \pi_{n,s}(\cdot\,; d\lambda)$ dat je, dakle, sa (3.4), tj. sa

$$\int_{\mathbb{R}} [\pi_{n,s}(t)]^{2s+1}\pi_{k,s}(t)\,d\lambda(t) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)\,. \tag{3.8}$$

Na III konferenciji numeričkih metoda i teorije aproksimacija (Niš, 1987) Milovanović [20] je dao stabilan metod za numeričku konstrukciju s-ortogonalnih polinoma i njihovih nula. Korišćen je metod sa kvadratnom konvergencijom baziran na diskretizovanoj Stieltjes-ovoj proceduri i metodu Newton-Kantorovič-a.

Osnovna ideja ovog metoda za numeričku konstrukciju s-ortogonalnih polinoma sa merom $d\lambda(t)$ na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ je u reinterpretaciji uslova ortogonalnosti (3.8). Za date n i s definišimo $d\mu(t) = d\mu^{(n,s)}(t) = (\pi_{n,s}(t))^{2s}\, d\lambda(t)$. Uslov ortogonalnosti se onda svodi na

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_k^{(n,s)}(t) t^{\nu} d\mu(t) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k-1)\,,$$

gde je $(\pi_k^{(n,s)})$ niz moničnih ortogonalnih polinoma sa novom merom $d\mu(t)$. Tada je $\pi_{n,s}(\cdot) = \pi_n^{(n,s)}(\cdot)$. Polinomi $\pi_k^{(n,s)}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ su implicitno definisani, jer mera $d\mu(t)$ zavisi od $\pi_n^{(n,s)}(t)$. Opštu klasu takvih polinoma uveo je i proučavao Engels [8, str. 214-226]. Radi kraćeg zapisa umesto $\pi_k^{(n,s)}(\cdot)$ pisaćemo $\pi_k(\cdot)$. Ovi polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju

$$\begin{aligned} \pi_{\nu+1}(t) &= (t - \alpha_\nu)\pi_\nu(t) - \beta_\nu \pi_{\nu-1}(t) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)\,, \\ \pi_{-1}(t) &= 0, \quad \pi_0(t) = 1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

gde je, zbog ortogonalnosti,

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \alpha_\nu(n, s) = \frac{(t\pi_\nu, \pi_\nu)}{(\pi_\nu, \pi_\nu)} = \frac{\int_{\mathbb{R}} t\pi_\nu^2(t)\, d\mu(t)}{\int_{\mathbb{R}} \pi_\nu^2(t)\, d\mu(t)}\,, \\ \beta_\nu &= \beta_\nu(n, s) = \frac{(\pi_\nu, \pi_\nu)}{(\pi_{\nu-1}, \pi_{\nu-1})} = \frac{\int_{\mathbb{R}} \pi_\nu^2(t)\, d\mu(t)}{\int_{\mathbb{R}} \pi_{\nu-1}^2(t)\, d\mu(t)}\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

i po konvenciji $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t)$.

Koeficijenti α_ν i β_ν su fundamentalne veličine u konstruktivnoj teoriji ortogonalnih polinoma. Oni omogućavaju reprezentovanje ortogonalnih polinoma, zahtevajući linearan niz parametara. Nasuprot njima, koeficijenti ortogonalnih polinoma ili njihove nule zahtevaju dvodimenzionalne nizove. Poznavanje koeficijenata α_ν i β_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ omogućava nalaženje prvih $n+1$ ortogonalnih polinoma $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$. Za dato n poslednji od njih, π_n, je s-ortogonalan polinom $\pi_n^{(n,s)}$.

Stabilna procedura za nalaženje koeficijenata α_ν, β_ν je diskretizovana Stieltjesova procedura (stabilnost posebno dolazi do izražaja u slučaju beskonačnih intervala integracije [9, 11]). Međutim, u slučaju s-ortogonalnih polinoma ova procedura ne može biti direktno primenjena jer mera $d\mu(t)$ zavisi od nepoznatog polinoma $\pi_n^{(n,s)}$. Iz (3.10) se dobija sledeći sistem nelinearnih jednačina sa nepoznatim $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv \beta_0 - \int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s}(t)\, d\lambda(t) = 0\,, \\ f_{2\nu+1} &\equiv \int_{\mathbb{R}} (\alpha_\nu - t)\pi_\nu^2(t)\pi_n^{2s}(t)\, d\lambda(t) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)\,, \\ f_{2\nu} &\equiv \int_{\mathbb{R}} (\beta_\nu \pi_{\nu-1}^2(t) - \pi_\nu^2(t))\pi_n^{2s}(t)\, d\lambda(t) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Obeležimo sa $\boldsymbol{x}$ $2n$-dimenzionalan vektor sa elementima $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$, sa $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ $2n$-dimenzionalan vektor sa elementima $f_0, f_1, \ldots, f_{2n-1}$, datim sa (3.11), gde su $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ predstavljeni na osnovu (3.9). Ako je $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ odgovarajući Jacobian od $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, onda se koeficijenti rekurentne relacije (3.9) mogu odrediti metodom Newton-Kantorovića [14, 27]

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{W}^{-1}\left(\boldsymbol{x}^{[k]}\right) \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{[k]}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{3.12}$$

Za dovoljno dobro odabranu početnu iteraciju $\boldsymbol{x}^{[0]}$ metod (3.12) ima kvadratnu konvergenciju.

Da bi izračunali elemente Jacobiana prvo ćemo odrediti parcijalne izvode $a_{\nu,i} = \dfrac{\partial \pi_\nu}{\partial \alpha_i}$ i $b_{\nu,i} = \dfrac{\partial \pi_\nu}{\partial \beta_i}$. Diferenciranjem rekurentne relacije (3.9) po α_i i β_i dobijamo

$$a_{\nu+1,i} = (t - \alpha_\nu) a_{\nu,i} - \beta_\nu a_{\nu-1,i}\,, \qquad b_{\nu+1,i} = (t - \alpha_\nu) b_{\nu,i} - \beta_\nu b_{\nu-1,i}\,,$$

gde je

$$\begin{aligned} &a_{\nu,i} = 0, \qquad b_{\nu,i} = 0 \qquad (\nu \leqslant i)\,,\\ &a_{i+1,i} = -\pi_i(t), \qquad b_{i+1,i} = -\pi_{i-1}(t). \end{aligned}$$

Elementi Jacobiana su

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{2\nu+1}}{\partial \alpha_i} &= 2\int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s-1}(t)\left[(\alpha_\nu - t) p_{\nu,i}(t) + \frac{1}{2}\delta_{\nu,i}\pi_\nu^2(t)\pi_n(t)\right] d\lambda(t)\,,\\
\frac{\partial f_{2\nu+1}}{\partial \beta_i} &= 2\int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s-1}(t)(\alpha_\nu - t) q_{\nu,i}(t)\, d\lambda(t)\,,\\
\frac{\partial f_{2\nu}}{\partial \alpha_i} &= 2\int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s-1}(t)(\beta_\nu p_{\nu-1,i}(t) - p_{\nu,i}(t))\, d\lambda(t)\,,\\
\frac{\partial f_{2\nu}}{\partial \beta_i} &= 2\int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s-1}(t)\left[(\beta_\nu q_{\nu-1,i}(t) - q_{\nu,i}(t)) + \frac{1}{2}\delta_{\nu,i}\pi_{\nu-1}^2(t)\pi_n(t)\right] d\lambda(t)\,,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

gde je

$$p_{\nu,i}(t) = \pi_\nu(t)(a_{\nu,i}\pi_n(t) + s a_{n,i}\pi_\nu(t))\,, \qquad q_{\nu,i}(t) = \pi_\nu(t)(b_{\nu,i}\pi_n(t) + s b_{n,i}\pi_\nu(t))\,,$$

i $\delta_{\nu,i}$ Kronecker-ova delta.

Svi integrali u (3.11) i (3.13) mogu se izračunati tačno, izuzimajući greške zaokrugljivanja, koristeći Gauss-Christoffel-ove kvadraturne formule sa merom $d\lambda(t)$,

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\, d\lambda(t) = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu^{(N)} g(\tau_\nu^{(N)}) + R_N(g)\,, \tag{3.14}$$

uzimajući $N = (s+1)n$ čvorova. Formula (3.14) je tačna za sve polinome stepena ne višeg od $2N - 1 = 2(s+1)n - 1 = 2(n-1) + 2ns + 1$.

Prema tome, za sva izračunavanja koristi se samo fundamentalna tročlana rekurentna relacija (3.9) za ortogonalne polinome $\pi_k(\cdot\,; d\lambda)$ i Gauss-Christoffel-ove kvadrature (3.14). Za početne vrednosti $\alpha_\nu^{[0]} = \alpha_\nu^{[0]}(n,s)$ i $\beta_\nu^{[0]} = \beta_\nu^{[0]}(n,s)$ uzimaju se vrednosti dobijene za $n-1$, tj. $\alpha_\nu^{[0]} = \alpha_\nu(n-1,s)$, $\beta_\nu^{[0]} = \beta_\nu(n-1,s)$ $(\nu \leqslant n-2)$. Za $\alpha_{n-1}^{[0]}$ i $\beta_{n-1}^{[0]}$ koristimo odgovarajuće ekstrapolirane vrednosti.

U slučaju $n = 1$ rešavamo jednačinu

$$\phi(\alpha_0) = \phi(\alpha_0(1,s)) = \int_{\mathbb{R}} (t-\alpha_0)^{2s+1} d\lambda(t) = 0\,,$$

pa zatim određujemo

$$\beta_0 = \beta_0(1,s) = \int_{\mathbb{R}} (t-\alpha_0)^{2s} d\lambda(t)\,.$$

Znajući koeficijente u tročlanoj rekurentnoj relaciji (3.9) lako se mogu odrediti i nule polinoma $\pi_n^{(n,s)}$, što će biti pokazano u sledećem poglavlju.

3.3 Gauss-Turán-ove kvadraturne formule

U uvodnom delu ove glave bilo je reči o kvadraturnim formulama Gauss-Turán-ovog tipa (3.3), tj.

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\lambda(t) = \sum_{i=0}^{2s} \sum_{\nu=1}^{n} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + R(f)\,, \tag{3.15}$$

koje imaju maksimalni algebarski stepen tačnosti $2(s+1)n-1$.

Čvorovi $\tau_\nu = \tau_\nu(n,s)$ $(\nu = 1,2,\ldots,n)$ u (3.15) su nule s-ortogonalnog polinoma $\pi_n(t) \equiv \pi_n^{(n,s)}(t)$ i mogu se jednostavno izračunati kao sopstvene vrednosti trodijagonalne simetrične Jacobi-eve matrice

$$J_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

QR algoritmom $(\alpha_\nu = \alpha_\nu(n,s),\ \beta_\nu = \beta_\nu(n,s)\ \ (\nu = 0,1,\ldots,n-1))$.

Da bi odredili koeficijente $A_{i,\nu}$ u kvadraturnim formulama Gauss-Turán-ovog tipa (3.15) definišimo najpre

$$\Omega_\nu(t) = \left(\frac{\pi_n(t)}{t-\tau_\nu}\right)^{2s+1} = \prod_{i\neq\nu} (t-\tau_i)^{2s+1} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{3.16}$$

Tada se koeficijenti $A_{i,\nu}$ mogu predstaviti u obliku

$$A_{i,\nu} = \frac{1}{i!(2s-i)!}\left[D^{2s-i}\frac{1}{\Omega_\nu(t)}\int_{\mathbb{R}}\frac{\pi_n^{2s+1}(x)-\pi_n^{2s+1}(t)}{x-t}\,d\lambda(x)\right]_{t=\tau_\nu},$$

gde je D operator diferenciranja. Specijalno, za $i = 2s$ je

$$A_{2s,\nu} = \frac{1}{(2s)!(\pi_n'(\tau_\nu))^{2s+1}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\pi_n^{2s+1}(x)}{x-\tau_\nu}\,d\lambda(x)\,,$$

odnosno

$$A_{2s,\nu} = \frac{B_\nu^{(s)}}{(2s)!(\pi_n'(\tau_\nu))^{2s}} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,n)\,,$$

gde su $B_\nu^{(s)}$ Christoffel-ovi brojevi Gauss-ove kvadraturne formule

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\,d\mu(t) = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^{(s)} g(\tau_\nu) + R_n(g)\,, \qquad R_n(\mathcal{P}_{2n-1}) = 0\,,$$

sa merom $d\mu(t) = \pi_n^{2s}(t)\,d\lambda(t)$.

Pošto je $B_\nu^{(s)} > 0$ to je i $A_{2s,\nu} > 0$. Izrazi za ostale koeficijente $A_{i,\nu}$ $(i < 2s)$ su vrlo komplikovani. Za njihovo numeričko računanje Gautschi [9] je koristio trougaoni sistem linearnih jednačina dobijen iz formule (3.15) zamenjujući funkciju f Newton-ovim polinomima:

$$1, t-\tau_1, \ldots, (t-\tau_1)^{2s+1}, (t-\tau_1)^{2s+1}(t-\tau_2), \ldots, (t-\tau_1)^{2s+1}(t-\tau_2)^{2s+1}\cdots(t-\tau_n)^{2s}.$$

Gautschi i Milovanović [14] su umesto Newton-ovih polinoma koristili polinome

$$\begin{aligned} f_{k,\nu}(t) &= (t-\tau_\nu)^k\Omega_\nu(t) \\ &= (t-\tau_\nu)^k\prod_{i\neq\nu}(t-\tau_i)^{2s+1} \end{aligned} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2s,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n)\,. \tag{3.17}$$

Kako je kvadraturna formula (3.15) tačna za sve polinome stepena ne višeg od $2(s+1)n-1$ i $\deg f_{k,\nu} = (n-1)(2s+1)+k \leqslant (2s+1)n-1$, to je formula (3.15) tačna za polinome (3.17), odnosno $R(f_{k,\nu}) = 0$ $(0 \leqslant k \leqslant 2s,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n)$. Prema tome, važi

$$\sum_{i=0}^{2s}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} f_{k,\nu}^{(i)}(\tau_j) = \int_{\mathbb{R}} f_{k,\nu}(t)\,d\lambda(t) \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2s,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n)\,. \tag{3.18}$$

Definišimo momente

$$\mu_{k,\nu} = \int_{\mathbb{R}} f_{k,\nu}(t)\,d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}}(t-\tau_\nu)^k\prod_{i\neq\nu}(t-\tau_i)^{2s+1}d\lambda(t)\,.$$

Tada iz sistema (3.18) dobijamo sistem

$$\sum_{i=0}^{2s} A_{i,\nu} f_{k,\nu}^{(i)}(\tau_\nu) = \mu_{k,\nu} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2s,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n)\,, \tag{3.19}$$

jer je za svako $j \neq \nu$ i $0 \leqslant i \leqslant 2s$ $\;f_{k,\nu}^{(i)}(\tau_j) = 0$.

Za svako ν imamo u (3.19) sistem od $2s+1$ linearnih jednačina sa nepoznatim $A_{i,\nu}$ $\;(i = 0, 1, \ldots, 2s)$.

Korišćenjem Leibniz-ove formule lako se dokazuje sledeći rezultat.

Lema 3.1 *Za polinome $f_{k,\nu}$ date sa* (3.17) *važi*

$$f_{k,\nu}^{(i)}(\tau_\nu) = \begin{cases} 0, & i < k, \\ i^{(k)} \Omega_\nu^{(i-k)}(\tau_\nu), & i \geqslant k, \end{cases}$$

gde je $i^{(k)} = i(i-1)\cdots(i-k+1)$ $\;(0^{(0)} = 1)$, a Ω_ν je definisano sa (3.16).

Na osnovu leme 3.1 zaključujemo da je svaki sistem linearnih jednačina (3.19) (za svako ν) gornje trougaoni. Pošto su sve nule s-ortogonalnog polinoma π_n (svi čvorovi kvadraturne formule (3.15)) poznate to se određivanje koeficijenata $A_{i,\nu}$ svodi na rešavanje n linearnih sistema od $2s+1$ jednačina

$$\begin{bmatrix} f_{0,\nu}(\tau_\nu) & f'_{0,\nu}(\tau_\nu) & \cdots & f_{0,\nu}^{(2s)}(\tau_\nu) \\ & f'_{1,\nu}(\tau_\nu) & \cdots & f_{1,\nu}^{(2s)}(\tau_\nu) \\ & & \ddots & \\ & & & f_{2s,\nu}^{(2s)}(\tau_\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0,\nu} \\ A_{1,\nu} \\ \vdots \\ A_{2s,\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{0,\nu} \\ \mu_{1,\nu} \\ \vdots \\ \mu_{2s,\nu} \end{bmatrix}.$$

Ako uvedemo oznake $a_{k,k+j} = f_{k-1,\nu}^{(k-1+j)}(\tau_\nu)$, tada matrica sistema ima elemente $a_{\ell,j}$, $(1 \leqslant \ell,\ j \leqslant 2s+1)$. Pri tom je $a_{\ell,j} = 0$ za $j < \ell$. Tada je prema lemi 3.1

$$a_{\ell,j} = (j-1)^{(\ell-1)} \Omega_\nu^{(j-\ell)}(\tau_\nu) \qquad (1 \leqslant \ell \leqslant j \leqslant 2s+1)\,. \tag{3.20}$$

Lema 3.2 *Neka su $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ nule s-ortogonalnog polinoma π_n. Za elemente $a_{\ell,j}$, definisane sa* (3.20) *važe sledeće relacije:*

$$a_{k,k} = (k-1)!\, a_{1,1} \qquad (1 \leqslant k \leqslant 2s+1)\,,$$

$$a_{k,k+j} = -(2s+1)(k+j-1)^{(k-1)} \sum_{\ell=1}^{j} u_\ell a_{\ell,j} \quad (1 \leqslant k \leqslant 2s-j+1,\ j = 1, \ldots, 2s)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \Omega_\nu(\tau_\nu) = [\pi'_n(\tau_\nu)]^{2s+1}, \\ u_l &= \sum_{i \neq \nu} (\tau_i - \tau_\nu)^{-\ell} \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, 2s)\,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

DOKAZ: Prva relacija je neposredna posledica definicije $a_{k,k}$ i leme 3.1. Da bi dokazali drugu relaciju definišimo $v(t) = \sum_{i\neq\nu}(t-\tau_i)^{-1}$. Pošto je $\Omega_\nu(t) = \prod_{i\neq\nu}(t-\tau_i)^{2s+1}$ to je

$$\Omega_\nu'(t) = (2s+1)v(t)\Omega_\nu(t)$$

i

$$\begin{aligned}\Omega_\nu^{(j)}(t) &= \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\left(\Omega_\nu'(t)\right) = (2s+1)\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\left(v(t)\Omega_\nu(t)\right) \\ &= (2s+1)\sum_{\ell=0}^{j-1}\binom{j-1}{\ell}\Omega_\nu^{(j-1-\ell)}(t)v^{(\ell)}(t)\,.\end{aligned}$$

Sada, (3.20) postaje

$$a_{k,k+j} = (k+j-1)^{(k-1)}(2s+1)\sum_{\ell=1}^{j}\binom{j-1}{\ell-1}v^{(\ell-1)}(\tau_\nu)\Omega_\nu^{(j-\ell)}(\tau_\nu)\,.$$

Pošto je

$$v^{(\ell-1)}(\tau_\nu) = (-1)^{\ell-1}(\ell-1)!\sum_{i\neq\nu}(\tau_\nu-\tau_i)^{-\ell} = -(\ell-1)!\,u_\ell$$

i

$$\Omega_\nu^{(j-\ell)}(\tau_\nu) = \frac{a_{\ell,j}}{(j-1)^{(\ell-1)}} = \frac{(j-\ell)!}{(j-1)!}\,a_{\ell,j}\,,$$

to je

$$a_{k,k+j} = -(2s+1)(k+j-1)^{(k-1)}\sum_{\ell=1}^{j}u_\ell a_{\ell,j}\,. \qquad \blacksquare$$

Uvešćemo sledeće oznake:

$$\hat{a}_{k,j} = \frac{a_{k,j}}{(j-1)!\,a_{1,1}} \qquad (1\leqslant k,j\leqslant 2s+1)\,, \tag{3.22}$$

$$b_k = (k-1)A_{k-1,\nu} \qquad (1\leqslant k\leqslant 2s+1)\,,$$

$$\hat{\mu}_{k,\nu} = \frac{\mu_{k,\nu}}{(\pi_n'(\tau_\nu))^{2s+1}} = \int_{\mathbb{R}}(t-\tau_\nu)^k\left(\prod_{i\neq\nu}\frac{t-\tau_i}{\tau_\nu-\tau_i}\right)^{2s+1}d\lambda(t)\,. \tag{3.23}$$

TEOREMA 3.6. *Za fiksirano ν $(1\leqslant\nu\leqslant n)$, koeficijenti $A_{i,\nu}$ u kvadraturnim formulama Gauss-Turán-ovog tipa* (3.15) *određeni su relacijama*

$$\begin{aligned}b_{2s+1} &= (2s)!\,A_{2s,\nu} = \hat{\mu}_{2s,\nu}\,, \\ b_k &= (k-1)!\,A_{k-1,\nu} = \hat{\mu}_{k-1,\nu} - \sum_{j=k+1}^{2s+1}\hat{a}_{k,j}b_j \qquad (k=2s,\ldots,1)\,,\end{aligned}$$

gde je $\hat{\mu}_{k,\nu}$ dato sa (3.23) *i*

$$\begin{aligned}\hat{a}_{k,k} &= 1 && (k=1,\ldots,2s) \\ \hat{a}_{k,k+j} &= -\frac{2s+1}{j}\sum_{\ell=1}^{j}u_\ell\hat{a}_{\ell,j} && (k=1,\ldots,2s,\ \ j=1,\ldots,2s-k+1)\,,\end{aligned} \tag{3.24}$$

a u_ℓ je definisano sa (3.21).

Dokaz: Relacija (3.24) dobija se direktno iz leme 3.2 i normalizacije (3.22).

Koeficijenti b_k $(1 \leqslant k \leqslant 2s+1)$ dobijaju se iz odgovarajućeg gornje trougaonog sistema jednačina $\widehat{A}\,\mathbf{b} = \mathbf{c}$, gde je

$$\widehat{A} = [\hat{a}_{i,j}]\ , \qquad \mathbf{b} = [b_1 \ \ \cdots \ \ b_{2s+1}]^T, \qquad \mathbf{c} = [\hat{\mu}_{0,\nu} \ \ \cdots \ \ \hat{\mu}_{2s,\nu}]^T. \qquad \blacksquare$$

Normalizovani momenti $\hat{\mu}_{k,\nu}$ (3.23) mogu se računati tačno, izuzimajući greške zaokrugljivanja, koristeći Gauss-Christoffel-ovu kvadraturnu formulu (3.14) sa $N = (s+1)n$ čvorova.

4

Višestruko ortogonalni polinomi

Višestruko ortogonalni polinomi (eng. *multiple orthogonal polynomials*) predstavljaju generalizaciju ortogonalnih polinoma u smislu da oni zadovoljavaju $r \in \mathbb{N}$ uslova ortogonalnosti. Izučavanje višestruko ortogonalnih polinoma je intenzivno poslednjih desetak godina i to najpre usko povezano sa izučavanjem Hermite-Padé-ove racionalne aproksimacije sistema Markov-ih funkcija u radovima Nikishin-a, Sorokin-a, Piñeiro-a, Aptekarev-a i drugih.

Poslednje četiri godine veliki doprinos ovoj oblasti dali su Belgijanci Van Assche i Coussement. Oni su posebno proučavali neke klase klasičnih višestruko ortogonalnih polinoma, kao i njihovu primenu u teoriji brojeva, pre svega za dokazivanje iracionalnosti i transcedentnosti određenih realnih brojeva [35, 36, 37, 3].

Neka je $r \geqslant 1$ ceo broj i neka su $w_1, w_2, \ldots, w_r$ težinske funkcije na realnoj pravoj, takve da je nosač svake funkcije w_i podskup nekog intervala E_i. Neka je $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ vektor (uređena r-torka) nenegativnih celih brojeva, koja se zove *multi-indeks*, a $|\vec{n}| = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ njegova dužina.

Postoje dva tipa višestruko ortogonalnih polinoma.

- **Višestruko ortogonalni polinomi tipa I**

  Višestruko ortogonalni polinom tipa I predstavlja vektor

  $$(A_{\vec{n},1}, A_{\vec{n},2}, \ldots, A_{\vec{n},r}), \tag{4.1}$$

  gde je $A_{\vec{n},i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ polinom stepena $n_i - 1$ i važe sledeći uslovi ortogonalnosti:

  $$\sum_{j=1}^{r} \int_{E_j} A_{\vec{n},j}(x)\, x^k w_j(x) dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, |\vec{n}| - 2). \tag{4.2}$$

  Svaki polinom $A_{\vec{n},i}$ ima n_i koeficijenata. Vektor (4.1) je kompletno određen ako možemo naći svih $|\vec{n}|$ nepoznatih koeficijenata. Uslovi ortogonalnosti (4.2) daju sistem od $|\vec{n}|-1$ homogenih linearnih jednačina za računanje ovih $|\vec{n}|$ koeficijenata. Ako je matrica tog sistema regularna tada možemo odrediti višestruko ortogonalne polinome tipa I jedinstveno do na multiplikativnu konstantu.

Za $r=1$ imamo obične ortogonalne polinome.

- **Višestruko ortogonalni polinomi tipa II**

  Pod višestruko ortogonalnim polinomom tipa II podrazumeva se moničan polinom $P_{\vec{n}}$ stepena $|\vec{n}|$ takav da zadovoljava sledeće uslove ortogonalnosti:

$$
\begin{aligned}
&(4.3) \qquad \int_{E_1} P_{\vec{n}}(x)\, x^k w_1(x)dx = 0 \qquad (k=0,1,\ldots,n_1-1)\,,\\
&(4.4) \qquad \int_{E_2} P_{\vec{n}}(x)\, x^k w_2(x)dx = 0 \qquad (k=0,1,\ldots,n_2-1)\,,\\
&\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&(4.5) \qquad \int_{E_r} P_{\vec{n}}(x)\, x^k w_r(x)dx = 0 \qquad (k=0,1,\ldots,n_r-1)\,.
\end{aligned}
$$

  Za $r=1$ opet imamo obične ortogonalne polinome.

  Uslovi ortogonalnosti (4.3)–(4.5) zajedno daju sistem od $|\vec{n}|$ linearnih jednačina za računanje $|\vec{n}|$ nepoznatih koeficijenata $a_{k,\vec{n}}$ polinoma $P_{\vec{n}}(x)=\sum_{k=0}^{|\vec{n}|} a_{k,\vec{n}}\, x^k$, gde je $a_{|\vec{n}|,\vec{n}}=1$. Obzirom da matrica tog sistema može biti singularna, r težinskih funkcija moraju zadovoljavati dodatne uslove da bi višestruko ortogonalni polinomi tipa II bili jedinstveni.

  Ako je polinom $P_{\vec{n}}(x)$ jedinstven tada kažemo da je $\vec{n}$ *normalan multi-indeks*, a ako su svi multi-indeksi normalni tada kažemo da r težinskih funkcija čini *kompletan sistem.*

Nadalje ćemo detaljno razmatrati višestruko ortogonalne polinome tipa II.

Za svaku težinsku funkciju w_k $(k=1,2,\ldots,r)$

$$
\langle f,g\rangle_k = \int_{E_k} f(x)g(x)\, w_k(x)dx \tag{4.6}
$$

označava odgovarajući skalarni proizvod funkcija f i g.

4.1 Višestruko ortogonalni polinomi tipa II

Posmatraćemo sisteme od r težinskih funkcija za koje su svi multi-indeksi normalni. Postoje dva različita tipa sistema težinskih funkcija za koje se definišu višestruko ortogonalni polinomi tipa II.

1. *Angelesco sistemi* su takvi sistemi za koje su intervali E_i (nosači težinskih funkcija) disjunktni, tj. $E_i \cap E_j = \emptyset$ za $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

   Napomena: Dovoljno je da otvoreni intervali $\overset{\circ}{E_i}$ budu disjunktni.

2. *AT sistemi* su takvi sistemi u kojima sve težinske funkcije imaju nosače u istom intervalu E i sledećih $|\vec{n}|$ funkcija

$$w_1(x), xw_1(x), \ldots, x^{n_1-1}w_1(x), w_2(x),\ xw_2(x), \ldots, x^{n_2-1}w_2(x),$$
$$\ldots, w_r(x), xw_r(x), \ldots, x^{n_r-1}w_r(x)$$

   čine Chebyshev-ljev sistem na E za sve multi-indekse $\vec{n}$. To znači da svaka linearna kombinacija

$$\sum_{j=1}^{r} Q_{n_j-1}(x)w_j(x)\,,$$

   gde je Q_{n_j-1} polinom stepena ne većeg od $n_j - 1$, ima najviše $|\vec{n}| - 1$ nula u E.

Za navedene sisteme važe sledeće teoreme [37]:

Teorema 4.1. *Za Angelesco sistem višestruko ortogonalni polinom tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ može se predstaviti kao proizvod r polinoma, $P_{\vec{n}}(x) = \prod_{j=1}^{r} q_{n_j}(x)$, gde svaki polinom q_{n_j} ima tačno n_j nula na E_j.*

Dokaz: Pretpostavimo da $P_{\vec{n}}(x)$ ima $m_j < n_j$ promena znaka na E_j u tačkama $x_1, \ldots, x_{m_j}$. Neka je

$$Q_{m_j}(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_{m_j})\,.$$

Tada $P_{\vec{n}}(x)Q_{m_j}(x)$ ne menja znak na E_j, pa je

$$\int_{E_j} P_{\vec{n}}(x)Q_{m_j}(x)\,w_j(x)dx \neq 0\,.$$

Međutim, to je u kontradikciji sa uslovom ortogonalnosti na E_j. Prema tome $P_{\vec{n}}(x)$ ima najmanje n_j nula na E_j. Obzirom da su svi intervali E_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ disjunktni, to $P_{\vec{n}}(x)$ ima najmanje $|\vec{n}|$ nula na realnoj pravoj. Kako je stepen polinoma $P_{\vec{n}}(x)$ jednak $|\vec{n}|$, to on ima tačno n_j nula na E_j. ∎

Teorema 4.2. *Za AT sistem višestruko ortogonalni polinom tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ ima tačno $|\vec{n}|$ nula na E.*

Dokaz: Pretpostavimo da polinom $P_{\vec{n}}(x)$ ima $m < |\vec{n}|$ promena znaka na E u tačkama $x_1, \ldots, x_m$. Neka je $\vec{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ multi-indeks takav da je $m_i \leqslant n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ i $m_j < n_j$ za neko j, $m = |\vec{m}|$. Konstruišimo funkciju

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} Q_i(x)w_i(x)\,,$$

gde je Q_i polinom stepena $m_i - 1$ za sve $i \neq j$, a Q_j polinom stepena m_j, tako da ona zadovoljava interpolacione uslove

$$Q(x_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

i $Q(x_0) = 1$ za neku dodatnu tačku $x_0 \in E$. Pošto radimo sa Chebyshev-ljevim sistemom ovaj interpolacioni problem ima jedinstveno rešenje, a kako funkcija Q već ima m nula ona ne može imati dodatnih promena znaka. Zbog $Q(x_0) = 1$ funkcija Q nije identički jednaka nuli. Očigledno $P_{\vec{n}}(x)Q(x)$ ne menja znak na E, pa je

$$\int_E P_{\vec{n}}(x)Q(x)\,dx \neq 0\,,$$

što je u kontradikciji sa uslovima ortogonalnosti (4.3)–(4.5) za višestruko ortogonalne polinome tipa II. Prema tome, polinom $P_{\vec{n}}(x)$ ima tačno $|\vec{n}|$ nula na E. ■

4.2 Numerička konstrukcija višestruko ortogonalnih polinoma tipa II

Neka težinske funkcije $w_1, w_2, \ldots, w_r$ čine jedan od posmatranih sistema u poglavlju 4.1. Neka je $P_{\vec{n}}(x)$ višestruko ortogonalan polinom tipa II, $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$. Koristeći ideju Borges-a [5] daćemo jedan metod za konstrukciju polinoma $P_{\vec{n}}(x)$.

Neka je (p_n^*) niz ortonormiranih polinoma u odnosu na težinsku funkciju $w_1(x)$. Tada će svaki element lineala $\mathcal{L}\{p_{n_1}^*, p_{n_1+1}^*, \ldots, p_{|\vec{n}|}^*\}$ biti ortogonalan na svim polinomima stepena ne većeg od $n_1 - 1$ u odnosu na skalarni proizvod (4.6) za $k = 1$. Otuda polinom $P_{\vec{n}}(x)$ možemo predstaviti u obliku

$$P_{\vec{n}}(x) = \sum_{i=n_1}^{|\vec{n}|} \gamma_i p_i^*(x) \tag{4.7}$$

za neke realne koeficijente γ_i.

Uslovi ortogonalnosti (4.3) će biti zadovoljeni za polinom $P_{\vec{n}}(x)$ iz (4.7) za sve realne brojeve $\gamma_i \;\; (i = n_1, n_1 + 1, \ldots, |\vec{n}|)$. Da bi taj polinom bio višestruko ortogonalan polinom tipa II on mora zadovoljavati i uslove ortogonalnosti (4.4)–(4.5), tj. mora važiti

$$\langle P_{\vec{n}}, q_k \rangle_k = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, r)\,, \tag{4.8}$$

za sve polinome $q_k(x) \in \mathcal{P}_{n_k - 1} \;\; (k = 2, 3, \ldots, r)$. Ako za bazu prostora $\mathcal{P}_m$ uzmemo $\{p_0^*, p_1^*, \ldots, p_m^*\}$ onda se uslovi ortogonalnosti (4.8) svode na

$$\langle P_{\vec{n}}, p_i^* \rangle_k = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, r\,; \;\; i = 0, 1, \ldots, n_k - 1)\,. \tag{4.9}$$

Iz (4.7) i (4.9), kao i osobina linearnosti skalarnog proizvoda sledi

$$(4.10)\qquad \sum_{j=n_1}^{|\vec{n}|} \gamma_j \left\langle p_j^*, p_i^* \right\rangle_k = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, r\,;\;\; i = 0, 1, \ldots, n_k - 1)\,.$$

Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je $\gamma_{|\vec{n}|} = 1$. Tada (4.10) možemo zapisati u obliku

$$(4.11)\qquad \sum_{j=n_1}^{|\vec{n}|-1} \gamma_j \left\langle p_j^*, p_i^* \right\rangle_k = -\left\langle p_{|\vec{n}|}^*, p_i^* \right\rangle_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, r\,;\;\; i = 0, 1, \ldots, n_k - 1)\,.$$

Ako uvedemo oznake

$$\mu_{i,j}^{(k)} = \left\langle p_i^*, p_j^* \right\rangle_k$$

tada iz (4.11) dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina za nepoznate koeficijente γ_i:

$$\begin{bmatrix} \mu_{n_1,0}^{(2)} & \mu_{n_1+1,0}^{(2)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,0}^{(2)} \\ \mu_{n_1,1}^{(2)} & \mu_{n_1+1,1}^{(2)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,1}^{(2)} \\ \mu_{n_1,2}^{(2)} & \mu_{n_1+1,2}^{(2)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n_1,n_2-1}^{(2)} & \mu_{n_1+1,n_2-1}^{(2)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,n_2-1}^{(2)} \\ \mu_{n_1,0}^{(3)} & \mu_{n_1+1,0}^{(3)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,0}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n_1,n_r-1}^{(r)} & \mu_{n_1+1,n_r-1}^{(r)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,n_r-1}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{n_1} \\ \gamma_{n_1+1} \\ \vdots \\ \gamma_{|\vec{n}|-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mu_{|\vec{n}|,0}^{(2)} \\ \mu_{|\vec{n}|,1}^{(2)} \\ \mu_{|\vec{n}|,2}^{(2)} \\ \vdots \\ \mu_{|\vec{n}|,n_2-1}^{(2)} \\ \mu_{|\vec{n}|,0}^{(3)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_{|\vec{n}|,n_r-1}^{(r)} \end{bmatrix}.$$

Radi elegantnijeg zapisa gornjeg sistema definisaćemo matrice $M_{i,j,m}^{(k)}$ sa

$$M_{i,j,m}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mu_{j,0}^{(k)} & \mu_{j+1,0}^{(k)} & \cdots & \mu_{m,0}^{(k)} \\ \mu_{j,1}^{(k)} & \mu_{j+1,1}^{(k)} & \cdots & \mu_{m,1}^{(k)} \\ \mu_{j,2}^{(k)} & \mu_{j+1,2}^{(k)} & \cdots & \mu_{m,2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{j,i-1}^{(k)} & \mu_{j+1,i-1}^{(k)} & \cdots & \mu_{m,i-1}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Tada koeficijente γ_i $\;(i = n_1, n_1+1, \ldots, |\vec{n}|-1)$ dobijamo iz sistema

$$(4.12)\qquad \begin{bmatrix} M_{n_2,n_1,|\vec{n}|-1}^{(2)} \\ M_{n_3,n_1,|\vec{n}|-1}^{(3)} \\ \vdots \\ M_{n_r,n_1,|\vec{n}|-1}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{n_1} \\ \gamma_{n_1+1} \\ \vdots \\ \gamma_{|\vec{n}|-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{n_2,|\vec{n}|,|\vec{n}|}^{(2)} \\ M_{n_3,|\vec{n}|,|\vec{n}|}^{(3)} \\ \vdots \\ M_{n_r,|\vec{n}|,|\vec{n}|}^{(r)} \end{bmatrix}.$$

Znajući γ_i $(i = n_1, n_1+1, \ldots, |\vec{n}|-1)$ $(\gamma_{|\vec{n}|} = 1)$ možemo naći nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ (određenog sa (4.7)) rešavajući problem sopstvenih vrednosti. Naime, poznato je da niz ortonormiranih polinoma (p_i^*) u odnosu na težinsku funkciju w_1 zadovoljava tročlanu rekurentnu relaciju oblika

$$\sqrt{\beta_{m+1}^{(1)}}\, p_{m+1}^*(x) = (x - \alpha_m^{(1)}) p_m^*(x) - \sqrt{\beta_m^{(1)}}\, p_{m-1}^*(x) \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

$$p_{-1}^*(x) = 0, \qquad p_0^*(x) = \left(\mu_{0,0}^{(1)}\right)^{-1/2},$$

odnosno

$$x\mathbf{p}(x) = J^{(1)}\mathbf{p}(x) + \sqrt{\beta_{|\vec{n}|}^{(1)}}\, p_{|\vec{n}|}^*(x)\, \mathbf{e}_{|\vec{n}|},$$

gde je $J^{(1)}$ simetrična trodijagonalna matrica (Jacobi-eva matrica) sa elementima $\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{|\vec{n}|-1}^{(1)}$ na dijagonali i elementima $\sqrt{\beta_1^{(1)}}, \sqrt{\beta_2^{(1)}}, \ldots, \sqrt{\beta_{|\vec{n}|-1}^{(1)}}$ na subdijagonali,

$$\mathbf{p}(x) = [p_0^* \;\; p_1^* \;\ldots\; p_{|\vec{n}|-1}^*]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{e}_{|\vec{n}|} = [\underbrace{0 \;\; 0 \;\ldots\; 0 \;\; 1}_{|\vec{n}|}]^T.$$

Jednakost (4.7), uz činjenicu da je $\gamma_{|\vec{n}|} = 1$, daje

$$p_{|\vec{n}|}^* = P_{\vec{n}}(x) - \sum_{i=n_1}^{|\vec{n}|-1} \gamma_i p_i^*(x).$$

Ako obeležimo

$$\boldsymbol{\gamma} = [\underbrace{0 \;\; 0 \;\ldots\; 0}_{n_1} \;\; \gamma_{n_1} \;\ldots\; \gamma_{|\vec{n}|-1}]^T$$

tada je

$$x\mathbf{p}(x) = J^{(1)}\mathbf{p}(x) + \sqrt{\beta_{|\vec{n}|}^{(1)}}\left(P_{\vec{n}}(x) - \boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{p}(x)\right)\mathbf{e}_{|\vec{n}|}.$$

Sada nije teško videti da su nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ upravo sopstvene vrednosti matrice

$$J^{(1)} - \sqrt{\beta_{|\vec{n}|}^{(1)}}\mathbf{e}_{|\vec{n}|}\boldsymbol{\gamma}^T,$$

koje se lako mogu naći QR algoritmom [17, 34]. Takođe, mogu se koristiti i Matlab ili Mathematica.

Opisani metod omogućava jednostavnu konstrukciju višestruko ortogonalnih polinoma tipa II, ali često pokazuje i karakteristike slabe uslovljenosti. Naime, u mnogim primerima se pokazalo da je faktor uslovljenosti matrice sistema (4.12) jako veliki.

4.3 Rekurentne relacije

Kao što ortogonalni polinomi na realnoj pravoj uvek zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju, tako postoje i rekurentne relacije reda $r+1$ za višestruko ortogonalne polinome tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksom.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zapisaćemo ga u obliku $n = \ell r + j$, gde je $0 \leqslant j < r$. *Skoro dijagonalan multi-indeks* $\vec{s}(n)$, koji odgovara prirodnom broju n, je multi-indeks

$$\vec{s}(n) = (\underbrace{\ell+1, \ell+1, \dots, \ell+1}_{j \text{ puta}}, \underbrace{\ell, \ell, \dots, \ell}_{r-j \text{ puta}}) . \tag{4.13}$$

Označimo odgovarajuće višestruko ortogonalne polinome tipa II sa

$$P_n(x) = P_{\vec{s}(n)}(x).$$

Teorema 4.3. *Višestruko ortogonalni polinomi tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksma zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju:*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^{r} a_{n,r-i} P_{n-i}(x) \qquad (n \geqslant 0) \tag{4.14}$$

sa početnim uslovima $P_0(x) = 1$ i $P_i(x) = 0$ za $i = -1, -2, \dots, -r$.

Dokaz: Predstavićemo polinom $xP_n(x)$ kao linearnu kombinaciju polinoma $P_k(x)$ $(k = 0, 1, \dots, n+1)$:

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i(n) P_i(x) , \tag{4.15}$$

sa $a_{n+1}(n) = 1$.

Pretpostavimo da je $n = \ell r + j$. Treba pokazati da je $a_{mr+k}(n) = 0$ za $m = 0, 1, \dots, \ell-2$ i $k = 0, 1, \dots, r-1$ i kada je $m = \ell - 1$ takođe za $k = 0, 1, \dots, j-1$, tako da se suma iz (4.15) redukuje na $\sum\limits_{i=n-r}^{n+1} a_i(n) P_i(x)$, koja je oblika kao u (4.14).

Dokazaćemo prethodno tvrđenje indukcijom po m [36].

Neka je $m = 0$. Treba pokazati da je $a_k(n) = 0$ $(k = 0, 1, \dots, r-1)$. Pomnožimo obe strane jednakosti (4.15) sa $w_1(x)$ i integralimo na intervalu E_1. Zbog uslova ortogonalnosti (4.3) desna strana se redukuje na $a_0(n) \int_{E_1} w_1(x)\,dx$, a leva strana je jednaka 0 kad god je $n > r$, pa je $a_0(n) = 0$. Da bi pokazali da je $a_1(n) = 0$ pomnožimo jednakost (4.15) sa $w_2(x)$ i integralimo na intervalu E_2. Uopšteno, za proizvoljno $k = 0, 1, \dots, r-1$, pomnožimo jednakost (4.15) sa $w_{k+1}(x)$ i integralimo na intervalu E_{k+1}. Iz uslova ortogonalnosti (4.3)–(4.5) sledi da je $a_k(n) = 0$.

Pretpostavimo sada da za $M \leqslant m-1$ i $k = 0, 1, \dots, r-1$ $(m \leqslant \ell - 2)$ važi $a_{Mr+k}(n) = 0$. Pokažimo da je tada $a_{mr+k}(n) = 0$ za $k = 0, 1, \dots, r-1$.

Pomnožimo obe strane jednakosti (4.15) sa $x^m w_1(x)$ i integralimo na intervalu E_1. Zbog uslova ortogonalnosti (4.3) leva strana je jednaka 0, a desna strana se redukuje na $a_{mr}(n) \int_{E_1} x^m P_{mr}(x)\, w_1(x)\, dx$. Prethodni integral je različit od 0 (jer bi u suprotnom imali jedan uslov ortogonalnosti više što bi impliciralo $P_{mr}(x) \equiv 0$). Prema tome, $a_{mr}(n) = 0$. Slično, ako jednakost (4.15) pomnožimo sa $x^m w_{k+1}(x)$ i integralimo na intervalu E_{k+1}, iz uslova ortogonalnosti (4.3)–(4.5) dobijamo da je $a_{mr+k}(n) = 0$ za $k = 0, 1, \ldots, r-1$.

Konačno, neka je $m = \ell - 1$. Ako pomnožimo jednakost (4.15) sa $x^{\ell-1} w_{k+1}(x)$ i integralimo na intervalu E_{k+1} leva strana će biti jednaka 0 samo za $k = 0, 1, \ldots, j-1$, dok će desna strana biti proporcionalna sa $a_{(\ell-1)r+k}(n)$. Dakle, $a_{(\ell-1)r+k}(n) = 0$ za $k = 0, 1, \ldots, j-1$, što je i trebalo pokazati. ∎

Stavljajući $m = 0, 1, \ldots, n-1$ u (4.14) dobijamo

$$H_n \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} - P_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tj.

$$H_n \mathbf{P}_n(x) = x \mathbf{P}_n(x) - P_n(x) \mathbf{e}_n \,, \tag{4.16}$$

gde je

$$\mathbf{P}_n(x) = [P_0(x) \;\; P_1(x) \;\; \ldots \;\; P_{n-1}(x)]^T, \qquad \mathbf{e}_n = [0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 1]^T$$

i H_n sledeća donja (sa trakom) Hessenberg-ova matrica reda n

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{0,r} & 1 & & & & & & & \\ a_{1,r-1} & a_{1,r} & 1 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ a_{r,0} & \cdots & a_{r,r-1} & a_{r,r} & 1 & & & & \\ & a_{r+1,0} & \cdots & a_{r+1,r-1} & a_{r+1,r} & 1 & & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{n-2,0} & \cdots & a_{n-2,r-1} & a_{n-2,r} & 1 \\ & & & & a_{n-1,0} & \cdots & a_{n-1,r-1} & a_{n-1,r} \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Ova vrsta matrice dobija se i u konstrukciji ortogonalnih polinoma na radijalnim zracima u kompleksnoj ravni [25].

Neka su $x_i \equiv x_i^{(n)}$ nule polinoma $P_n(x)$. Tada se rekurentna relacija (4.16) svodi na problem sopstvenih vrednosti

$$x_i \mathbf{P}_n(x_i) = H_n \mathbf{P}_n(x_i)\,.$$

Prema tome, x_i su sopstvene vrednosti matrice H_n, a $\mathbf{P}_n(x_i)$ odgovarajući sopstveni vektori.

Prema (4.16) može se izvesti i sledeća reprezentacija višestruko ortogonalnih polinoma tipa II (slično je urađeno i u radu [25])

$$P_n(x) = \det(xI_n - H_n)\,,$$

gde je I_n jedinična matrica reda n.

Nule polinoma $P_n(x)$, kao sopstvene vrednosti matrice H_n možemo dobiti QR algoritmom (EISPACK rutina COMQR [34, pp. 277–284]). Takođe mogu se koristiti i MATLAB ili MATHEMATICA.

Matrica H_n nije simetrična i ne može se na jednostavan način svesti na neku simetričnu matricu (sem za slučaj $r = 1$). Zbog toga u opštem slučaju ne postoji razlog zbog koga bi njene sopstvene vrednosti bile realne. Međutim, kako su u mnogim slučajevima te sopstvene vrednosti realne (Angelesco sistemi, AT sistemi) to ukazuje da postoji neka veza između nizova koeficijenata $a_{i,0}, a_{i,1}, \ldots, a_{i,r}$. Takođe, pitanje je i da li svaka Hessenberg-ova matrica oblika (4.17) (kod koje su nenula elementi u traci) daje sistem višestruko ortogonalnih polinoma tipa II.

Dakle, polinom $P_n(x)$ možemo jednostavno konstruisati ako znamo koeficijente rekurentne relacije (4.14), tj. elemente matrice H_n. Samo za najjednostavniji slučaj višestruke ortogonalnosti, tj. za $r = 2$, za neke klasične težinske funkcije (Jacobi-eve, Laguerre-ove, Hermite-ove) u radovima [37], [3], [35] dati su eksplicitno koeficijenti rekurentne relacije (4.14).

Mi ćemo u poglavlju 4.4 dati jedan opšti postupak za numeričko računanje koeficijenata rekurentne relacije (4.14) korišćenjem tzv. diskretizovane Stieltjes-Gautschi-eve procedure.

4.4 Numerička konstrukcija višestruko ortogonalnih polinoma tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksima

U ovom poglavlju prikazaćemo jedan efikasan numerički metod za konstrukciju Hessenberg-ove matrice H_n date sa (4.17) [29]. Koristićemo jednu vrstu Stieltjes-ove procedure, date u [11], koju ćemo nazvati *diskretizovana Stieltjes-Gautschi-eva procedura*. Ona se sastoji u tome da najpre elemente matrice H_n prikažemo u terminima skalarnih proizvoda [1] (4.6), a zatim koristimo odgovarajuće Gauss-ove formule da diskretizujemo te skalarne proizvode. Naravno, pretpostavljamo da višestruko ortogonalni polinomi tipa II postoje u odnosu na skalarne proizvode $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$, date sa (4.6).

Razmotrićemo najpre detaljno najjednostavniji slučaj $r = 2$. U ovom slučaju imamo multi-indekse $\vec{s}(n) = (n_1(n), n_2(n))$ gde je $n_1(n) = [(n+1)/2]$ i $n_2(n) = [n/2]$, ($[t]$ – ceo deo od t), $n_1(n)+n_2(n) = n$. Odgovarajuća Hessenberg-ova matrica H_n je

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{02} & 1 & & & & & \\ a_{11} & a_{12} & 1 & & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & 1 & & & \\ & a_{30} & a_{31} & a_{32} & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \end{bmatrix},$$

tako da su rekurentne relacije za višestruko ortogonalne polinome tipa II

$$\begin{cases} P_1(x) = xP_0(x) - a_{02}P_0(x), \\ P_2(x) = xP_1(x) - a_{11}P_0(x) - a_{12}P_1(x), \\ P_3(x) = xP_2(x) - a_{20}P_0(x) - a_{21}P_1(x) - a_{22}P_2(x), \\ P_4(x) = xP_3(x) - a_{30}P_1(x) - a_{31}P_2(x) - a_{32}P_3(x), \\ \qquad\vdots \end{cases} \tag{4.18}$$

tj.

$$P_{n+1}(x) = (x - a_{n,2})P_n(x) - a_{n,1}P_{n-1}(x) - a_{n,0}P_{n-2}(x) \qquad (n \geqslant 0)\,, \tag{4.19}$$

sa početnim uslovima $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = P_{-2}(x) = 0$.

Da bismo odredili koeficijente rekurentne relacije koristićemo (4.18), tj. (4.19) i uslove ortogonalnosti

$$\langle P_n, P_i\rangle_1 = 0 \quad \text{za} \quad i \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right] \qquad \text{i} \qquad \langle P_n, P_i\rangle_2 = 0 \quad \text{za} \quad i \leqslant \left[\frac{n-2}{2}\right].$$

Kako je $\langle P_1, P_0\rangle_1 = 0$, iz prve jednakosti u (4.18) dobijamo

$$a_{02} = \frac{\langle xP_0, P_0\rangle_1}{\langle P_0, P_0\rangle_1}\,. \tag{4.20}$$

[1] Takve formule za koeficijente tročlane rekurentne relacije za obične ortogonalne polinome na realnoj pravoj poznate su kao Darboux-ove formule.

U sledećem koraku koristimo drugu jednakost u (4.18), kao i činjenice da je $\langle P_2, P_0 \rangle_1 = 0$ i $\langle P_2, P_0 \rangle_2 = 0$. Tako iz

$$\langle P_2, P_0 \rangle_1 = \langle xP_1, P_0 \rangle_1 - a_{11} \langle P_0, P_0 \rangle_1 - a_{12} \langle P_1, P_0 \rangle_1 ,$$

zbog $\langle P_1, P_0 \rangle_1 = 0$, dobijamo

$$a_{11} = \frac{\langle xP_1, P_0 \rangle_1}{\langle P_0, P_0 \rangle_1} . \tag{4.21}$$

Slično, iz $\langle P_2, P_0 \rangle_2 = \langle xP_1 - a_{11}P_0, P_0 \rangle_2 - a_{12} \langle P_1, P_0 \rangle_2$ dobijamo

$$a_{12} = \frac{\langle xP_1 - a_{11}P_0, P_0 \rangle_2}{\langle P_1, P_0 \rangle_2} . \tag{4.22}$$

Obzirom da je $\langle P_3, P_0 \rangle_1 = 0$, $\langle P_3, P_0 \rangle_2 = 0$ i $\langle P_3, P_1 \rangle_1 = 0$, koristeći treću jednakost u (4.18), dobijamo sukcesivno

$$a_{20} = \frac{\langle xP_2, P_0 \rangle_1}{\langle P_0, P_0 \rangle_1} \qquad (\text{zbog } \langle P_1, P_0 \rangle_1 = 0,\ \langle P_2, P_0 \rangle_1 = 0), \tag{4.23}$$

$$a_{21} = \frac{\langle xP_2 - a_{20}P_0, P_0 \rangle_2}{\langle P_1, P_0 \rangle_2} \qquad (\text{zbog } \langle P_2, P_0 \rangle_2 = 0), \tag{4.24}$$

$$a_{22} = \frac{\langle xP_2 - a_{20}P_0 - a_{21}P_1, P_1 \rangle_1}{\langle P_2, P_1 \rangle_1} . \tag{4.25}$$

Slično, četvrta jednakost u (4.18) i uslovi ortogonalnosti

$$\langle P_4, P_0 \rangle_1 = 0, \quad \langle P_4, P_0 \rangle_2 = 0, \quad \langle P_4, P_1 \rangle_1 = 0 \quad \text{i} \quad \langle P_4, P_1 \rangle_2 = 0$$

daju

$$a_{30} = \frac{\langle xP_3, P_0 \rangle_2}{\langle P_1, P_0 \rangle_2} \qquad (\text{zbog } \langle P_2, P_0 \rangle_2 = 0,\ \langle P_3, P_0 \rangle_2 = 0), \tag{4.26}$$

$$a_{31} = \frac{\langle xP_3 - a_{30}P_1, P_1 \rangle_1}{\langle P_2, P_1 \rangle_1} \qquad (\text{zbog } \langle P_3, P_1 \rangle_1 = 0), \tag{4.27}$$

$$a_{32} = \frac{\langle xP_3 - a_{30}P_1 - a_{31}P_2, P_1 \rangle_2}{\langle P_3, P_1 \rangle_2} . \tag{4.28}$$

Nastavljajući ovu proceduru dalje možemo pokazati sledeći rezultat:

Teorema 4.4. *Neka je* $n = 2\ell + \nu$, *gde je* $\ell = [n/2]$ *i* $\nu \in \{0, 1\}$. *Koeficijenti rekurentne relacije* (4.19) *mogu se predstaviti u obliku*

$$a_{n,0} = \frac{\left\langle xP_n, P_{[(n-2)/2]}\right\rangle_{\nu+1}}{\left\langle P_{n-2}, P_{[(n-2)/2]}\right\rangle_{\nu+1}}, \tag{4.29}$$

$$a_{n,1} = \frac{\left\langle xP_n - a_{n,0}P_{n-2}, P_{[(n-1)/2]}\right\rangle_{\nu}}{\left\langle P_{n-1}, P_{[(n-1)/2]}\right\rangle_{\nu}}, \tag{4.30}$$

$$a_{n,2} = \frac{\left\langle xP_n - a_{n,0}P_{n-2} - a_{n,1}P_{n-1}, P_{[n/2]}\right\rangle_{\nu-1}}{\left\langle P_n, P_{[n/2]}\right\rangle_{\nu-1}}, \tag{4.31}$$

gde je $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{j+2m} = \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_j$ $(j = 1, 2)$ *za svako* $m \in \mathbb{Z}$.

Dokaz: Formule (4.29)–(4.31) su dokazane prethodno za $n \leqslant 3$. Za proizvoljno n polazimo od rekurentne relacije (4.19) i uzimamo skalarne proizvode $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_j$ u odnosu na težinske funkcije w_j $(j = 1, 2)$.

Neka je $n = 2\ell + \nu$, pri čemu je $\ell = [n/2]$ i $\nu \in \{0, 1\}$. Uslovi ortogonalnosti, u ovom slučaju, su

$$\langle P_n, P_i\rangle_1 = 0 \quad \left(i \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) \qquad \text{i} \qquad \langle P_n, P_i\rangle_2 = 0 \quad \left(i \leqslant \left[\frac{n-2}{2}\right]\right).$$

Iz

$$\langle P_{n+1}, P_i\rangle_j = \langle xP_n - a_{n,0}P_{n-2} - a_{n,1}P_{n-1} - a_{n,2}P_n, P_i\rangle_j\,, \tag{4.32}$$

tj.

$$\langle P_{n+1}, P_i\rangle_j = \langle xP_n, P_i\rangle_j - a_{n,0}\langle P_{n-2}, P_i\rangle_j - a_{n,1}\langle P_{n-1}, P_i\rangle_j - a_{n,2}\langle P_n, P_i\rangle_j\,,$$

za $i = [(n-2)/2]$ i $j = \nu+1$ zaključujemo da (4.29) važi, zbog $\left\langle P_m, P_{[(n-2)/2]}\right\rangle_{\nu+1} = 0$ for $m = n-1, n, n+1$.

Dalje, za $i = [(n-1)/2]$ i $j = \nu$, ista jednakost se svodi na

$$\begin{aligned}\left\langle P_{n+1}, P_{[(n-1)/2]}\right\rangle_{\nu} \;=\; &\left\langle xP_n - a_{n,0}P_{n-2}, P_{[(n-1)/2]}\right\rangle_{\nu} - a_{n,1}\left\langle P_{n-1}, P_{[(n-1)/2]}\right\rangle_{\nu} \\ &- a_{n,2}\left\langle P_n, P_{[(n-1)/2]}\right\rangle_{\nu},\end{aligned}$$

odakle, zbog $\left\langle P_m, P_{[(n-1)/2]}\right\rangle_{\nu} = 0$ za $m = n, n+1$, dobijamo (4.30).

Konačno, za $i = [n/2]$ i $j = \nu - 1$, imamo $\left\langle P_{n+1}, P_{[n/2]}\right\rangle_{\nu-1} = 0$, pa iz (4.32) sledi (4.31). ∎

Prethodna teorema se može proširiti na slučaj $r \in \mathbb{N}$ $(r \geqslant 3)$ težinskih funkcija w_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Uzimajući za skalarne proizvode $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{j+mr} = \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_j$ $(m \in \mathbb{Z})$, važi sledeći rezultat:

TEOREMA 4.5. *Višestruko ortogonalni polinomi tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksima* (P_n) *zadovoljavaju rekurentnu relaciju*

$$P_{n+1}(x) = (x - a_{n,r})P_n(x) - \sum_{k=0}^{r-1} a_{n,k} P_{n-r+k}(x) \qquad (n \geqslant 0)\,, \tag{4.33}$$

gde je

$$a_{n,0} = \frac{\big\langle xP_n, P_{[(n-r)/r]}\big\rangle_{\nu+1}}{\big\langle P_{n-r}, P_{[(n-r)/r]}\big\rangle_{\nu+1}}$$

i

$$a_{n,k} = \frac{\Big\langle xP_n - \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_{n,i}P_{n-r+i}, P_{[(n-r+k)/r]}\Big\rangle_{\nu+k+1}}{\big\langle P_{n-r+k}, P_{[(n-r+k)/r]}\big\rangle_{\nu+k+1}}$$

za $k = 1, 2, \ldots, r$.

Dokaz ove teoreme je analogan dokazu prethodne (za $r = 2$). Ovde uzimamo $n = \ell r + \nu$, gde je $\ell = [n/r]$ i $\nu \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ i koristimo odgovarajuće uslove ortogonalnosti.

Napomena. Koeficijenti rekurentne relacije (4.33) se mogu odrediti i na sledeći način:

Za $0 \leqslant k < r$

$$a_{k,r-k} = \frac{\langle xP_k, P_0\rangle_1}{\langle P_0, P_0\rangle_1}$$

i za $m = k-1, k-2, \ldots, 0$

$$a_{k,r-m} = \frac{\Big\langle xP_k - \sum\limits_{i=r-k}^{r-m-1} a_{r,i}P_{k-r+i}, P_0\Big\rangle_{k-m+1}}{\langle P_{k-m}, P_0\rangle_{k-m+1}}\,.$$

Za $n \geqslant r$ ($n = \ell r + \nu$, $\ell = [n/r]$ i $\nu \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$) imamo

$$a_{n,0} = \frac{\langle xP_n, P_{\ell-1}\rangle_{\nu+1}}{\langle P_{n-r}, P_{\ell-1}\rangle_{\nu+1}}$$

i za $1 \leqslant k \leqslant r$

$$a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{\Big\langle xP_n - \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_{n,k}P_{n-r+i}, P_{\ell-1}\Big\rangle_{\nu+k+1}}{\langle P_{n-r+k}, P_{\ell-1}\rangle_{\nu+k+1}}, & \nu+k+1 \leqslant r, \\[2ex] \dfrac{\Big\langle xP_n - \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_{n,k}P_{n-r+i}, P_{\ell}\Big\rangle_{\nu+k+1-r}}{\langle P_{n-r+k}, P_{\ell}\rangle_{\nu+k+1-r}}, & \nu+k+1 > r\,. \end{cases}$$

Svi potrebni skalarni proizvodi mogu se računati tačno, izuzimajući jedino greške zaokrugljivanja, korišćenjem Gauss-Christoffel-ovih kvadraturnih formula za odgovarajuće težinske funkcije

$$\int_{E_i} g(t)w_i(t)dt = \sum_{\nu=1}^{N} A_{i,\nu}^{(N)} g\left(\tau_{i,\nu}^{(N)}\right) + R_{i,N}(g) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{4.34}$$

Dakle, za sva računanja koristimo jedino rekurentnu relaciju (4.14) za višestruko ortogonalne polinome tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksom i Gauss-Christoffel-ove kvadraturne formule (4.34).

Nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_n(x)$ se sada mogu lako izračunati kao sopstvene vrednosti Hessenberg-ove matrice (4.17), kao što je opisano u prethodnom poglavlju. Problem slabe uslovljenosti algoritma opisanog u poglavlju 4.2 se ovde ne javlja.

4.5 Odgovarajuće kvadraturne formule Gauss-ovog tipa

Polazeći od problema koji se javljaju u kompjuterskoj grafici, Borges [5] je razmatrao problem numeričkog računanja skupa od r određenih integrala u odnosu na različite težinske funkcije, ali sa istim integrandom i intervalom integracije.

Korišćenje skupa od r Gauss-Christoffel-ovih kvadraturnih formula nije optimalno jer zahteva veliki broj izračunavanja vrednosti integranda u odnosu na postignuti stepen tačnosti.

Borges je posmatrao tzv. "količnik performanse" (*eng. performance ratio*) definisan sa:

$$R = \frac{\text{Ukupan stepen tačnosti} + 1}{\text{Broj izračunavanja vrednosti integranda}}\,.$$

Ako koristimo skup od r Gauss-Christoffel-ovih kvadraturnih formula tada je

$$R = \frac{2n - 1 + 1}{rn} = \frac{2}{r}\,,$$

pa je $R < 1$ za sve $r > 2$.

Ako izaberemo skup od n različitih čvorova $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, zajedničkih za svih r kvadraturnih formula, tada se za svako $m = 1, 2, \ldots, r$ težinski koeficijenti $A_{m,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kvadraturne formule

$$\widehat{\mathbf{Q}}_m f = \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} f(x_i)$$

mogu izabrati tako da zadovoljavaju sledeći Vandermonde-ov sistem

$$(4.35) \qquad V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{bmatrix} A_{m,1} \\ A_{m,2} \\ \vdots \\ A_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0^{(m)} \\ \mu_1^{(m)} \\ \vdots \\ \mu_{n-1}^{(m)} \end{bmatrix} \qquad (m = 1, 2, \ldots, r),$$

gde je

$$\mu_i^{(m)} = \int_E x^i \, w_m(x) dx \qquad (m = 1, 2, \ldots, r; \;\; i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Tada je

$$R = \frac{n - 1 + 1}{n} = 1.$$

Kako su čvorovi izabrani proizvoljno, to dobijene kvadraturne formule neće biti "najbolje moguće".

Cilj je naći optimalan skup čvorova, simulirajući razvoj Gauss-Christoffel-ovih kvadraturnih formula.

Označimo sa $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ AT sistem težinskih funkcija.

Uvešćemo sledeću definiciju (analogno [5, Definicija 3.]):

Definicija 4.1. *Neka je W AT sistem (težinske funkcije w_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sve imaju nosač u intervalu E), neka je $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ multi-indeks i $n = |\vec{n}|$. Skup kvadraturnih formula oblika:*

$$(4.36) \qquad \int_E f(x) \, w_m(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} f(x_i) \qquad (m = 1, 2, \ldots, r)$$

ćemo zvati optimalan skup u odnosu na $(W, \vec{n})$ ako i samo ako težinski koeficijenti $A_{m,i}$ i čvorovi x_i zadovoljavaju sledeće uslove:

$$(4.37) \qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} &= \int_E w_m(x) dx \\ \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} \, x_i &= \int_E x \, w_m(x) dx \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} \, x_i^{n+n_m-1} &= \int_E x^{n+n_m-1} \, w_m(x) dx \end{aligned}$$

za svako $m = 1, 2, \ldots, r$.

Sada možemo dokazati uopštenje fundamentalne teoreme za Gauss-Christoffel-ove kvadraturne formule.

TEOREMA 4.6. *Neka je W AT sistem, $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$, $n = |\vec{n}|$. Posmatrajmo kvadraturne formule*

$$\int_E f(x)\, w_m(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} f(x_i) \qquad (m = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{4.38}$$

Ove formule čine optimalan skup u odnosu na $(W, \vec{n})$ ako i samo ako važi:
1. Tačne su za sve polinome stepena $\leqslant n-1$.
2. Polinom $q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ je višestruko ortogonalan polinom tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ u odnosu na W.

DOKAZ: Pretpostavimo prvo da kvadraturne formule (4.38) čine optimalan skup u odnosu na $(W, \vec{n})$.
Za tvrđenje *1* primetimo da za je svako m odgovarajuća kvadraturna formula (4.38) tačna za sve polinome stepena $\leqslant n+n_m-1$, pa samim tim i za sve polinome stepena $\leqslant n-1$.
Pokažimo da važi tvrđenje *2*. Za svako $m = 1, 2, \ldots r$ pretpostavimo da je $p_m(x)$ polinom stepena $\leqslant n_m - 1$. Onda je polinom $q(x)p_m(x)$ stepena $\leqslant n+n_m-1$. Pošto je odgovarajuća kvadraturna formula tačna za sve takve polinome sledi da je

$$\int_E q(x)p_m(x)\, w_m(x) dx = \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} q(x_i) p_m(x_i)\,. \tag{4.39}$$

Kako je $q(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ suma sa desne strane jednakosti (4.39) je identički jednaka 0, pa je

$$\int_E q(x)p_m(x)\, w_m(x) dx = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots, r)\,,$$

odakle sledi tvrđenje *2*.

Pretpostavimo sada da za kvadraturne formule (4.38) tvrđenja *1* i *2* važe. Za svako $m = 1, 2, \ldots, r$ neka je $p_m(x)$ polinom stepena $\leqslant n + n_m - 1$. Polinom $p_m(x)$ možemo zapisati u obliku $p_m(x) = q(x)s_m(x) + r(x)$, gde je $s_m(x)$ polinom stepena $\leqslant n_m - 1$ i $r(x)$ stepena $\leqslant n-1$. Tada je

$$\begin{aligned} \int_E p_m(x)\, w_m(x) dx &= \int_E [q(x)s_m(x) + r(x)]\, w_m(x) dx \\ &= \int_E q(x)s_m(x)\, w_m(x) dx + \int_E r(x)\, w_m(x) dx\,. \end{aligned}$$

Iz tvrđenja *2* je $\int_E q(x)s_m(x)\, w_m(x)dx = 0$, pa je

$$\int_E p_m(x)\, w_m(x) dx = \int_E r(x)\, w_m(x) dx\,.$$

Pošto je $r(x)$ polinom stepena $\leqslant n-1$ iz tvrđenja *1* sledi

$$\int_E r(x)\, w_m(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} r(x_i)\,,$$

odnosno

$$\int_E p_m(x)\, w_m(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} r(x_i)\,.$$

Kako je $q(x_i) = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ to je

$$\begin{aligned}\int_E p_m(x)\, w_m(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} A_{m,i}[q(x_i)s_m(x_i) + r(x_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} p_m(x_i)\,,\end{aligned}$$

tj. kvadraturna formula je tačna za sve polinome stepena $\leqslant n + n_m - 1$. ■

Specijalno, za $r = 1$ u definiciji 4.1. dobija se Gauss-Christoffel-ova kvadraturna formula.

Prema teoremi 4.6. čvorovi optimalnog skupa kvadraturnih formula (kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa) u odnosu na $(W, \vec{n})$ su nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ za dati AT sistem W. Kada nađemo čvorove, onda težinske koeficijente $A_{m,i}$ $\ (m = 1, 2, \ldots, r\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n)$ možemo dobiti rešavanjem Vandermonde-ovih sistema (4.35). Svaki takav Vandermonde-ov sistem ima jedinstveno rešenje jer su sve nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ međusobno različite (teorema 4.2.).

U slučaju kada je multi-indeks skoro dijagonalan čvorove $x_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa možemo dobiti kao sopstvene vrednosti odgovarajuće Hessenberg-ove matrice (4.17). Iz (4.16) sledi da je sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti x_i dat sa $\mathbf{P}_n(x_i)$, gde je

$$\mathbf{P}_n(x) = [P_0(x) \ \ P_1(x) \ \ \ldots \ \ P_{n-1}(x)]^T\,.$$

Iskoristićemo tu činjenicu da izračunamo težinske koeficijente $A_{m,i}$ zahtevajući da svaka od r kvadraturnih formula generiše tačno prvih n modifikovanih momenata [29].

Označimo sa $V_n = [\mathbf{P}_n(x_1) \quad \mathbf{P}_n(x_2) \ \ \ldots \ \ \mathbf{P}_n(x_n)]$ matricu sopstvenih vektora Hessenberg-ove matrice (4.17), normalizovanih tako da su im prve komponente jednake 1. Tada težinske koeficijente $A_{m,i}$ možemo dobiti rešavanjem r sistema linearnih jednačina:

$$V_n \cdot \begin{bmatrix} A_{m,1} \\ A_{m,2} \\ \vdots \\ A_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0^{*(m)} \\ \mu_1^{*(m)} \\ \vdots \\ \mu_{n-1}^{*(m)} \end{bmatrix} \qquad (m = 1, 2, \ldots, r)\,, \tag{4.40}$$

gde su

$$\mu_i^{*(m)} = \int_E P_i(x)\, w_m(x) dx \qquad (m = 1, 2, \ldots, r\,;\;\; i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

modifikovani momenti i $P_i(x) = P_{\vec{s}(i)}(x)$ višestruko ortogonalni polinomi tipa II.

Svi modifikovani momenti se mogu izračunati tačno, izuzimajući greške zaokrugljivanja, korišćenjem Gauss-Christoffel-ovih quadraturnih formula za odgovarajuće težinske funkcije $w_m \;\; (m = 1, 2, \ldots r)$.

4.6 Numerički primeri

U ovom poglavlju ćemo dati primere nekih višestruko ortogonalnih polinoma tipa II za neke klasične težinske funkcije. Sva numerička izračunavanja su vršena primenom algoritma opisanog u poglavlju 4.4 za višestruko ortogonalne polinome i u poglavlju 4.5 za odgovarajuće kvadraturne formule Gauss-ovog tipa.

4.6.1 Višestruko ortogonalni Jacobi-evi polinomi

Kao prvi primer višestruko ortogonalnih polinoma tipa II uzećemo višestruko ortogonalne Jacobi-eve polinome. To su višestruko ortogonalni polinomi tipa II u odnosu na AT sistem koji se sastoji od Jacobi-evih težinskih funkcija na intervalu $[-1, 1]$ sa različitim singularitetima u -1 i istim singularitetima u 1.

Dakle, tažinske funkcije su

$$w_m(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, r)\,, \tag{4.41}$$

gde su $\alpha, \beta_m > -1 \;\; (m = 1, 2, \ldots, r)$ i $\beta_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ kadgod je $i \neq j$ da bi imali AT sistem.

Ove polinome je prvi izučavao Piñeiro za specijalan slučaj $\alpha = 0$. Često u literaturi se višestruko ortogonalni Jacobi-evi polinomi nazivaju i Jacobi-Piñeiro-vi polinomi.

U tabeli 4.1 dati su keoficijenti rekurentne relacije za jedan primer višestruko ortogonalnih Jacobi-evih polinoma.

U tabelama 4.2, 4.3 i 4.4 dati su čvorovi i težinski koeficijenti za kvadraturne formule Gauss-ovog tipa u odnosu na AT sistem koji se sastoji od Jacobi-evih težinskih funkcija (4.41) sa skoro dijagonalnim multi-indeksima.

Brojevi u zagradama u svim tabelama predstavljaju decimalni eksponent.

4.6.2 Višestruko ortogonalni Laguerre-ovi polinomi

Višestruko ortogonalni Laguerre-ovi polinomi su višestruko ortogonalni polinomi tipa II u odnosu na AT sistem koji se sastoji od r generalisanih Laguerre-ovih težinskih funkcija na $[0, \infty)$ sa različitim singularitetima u 0.

Prema tome, težinske funkcije su:

$$w_m(x) = x^{s_m} e^{-x} \qquad (m = 1, 2, \dots, r)\,, \tag{4.42}$$

gde su $s_m > -1 \;\; (m = 1, 2, \dots, r)$ uz uslov $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ kadgod je $i \neq j$ da bi imali AT sistem.

U tabeli 4.5 dati su čvorovi i težinski koeficijenti za kvadraturne formule Gauss-ovog tipa u odnosu na AT sistem koji se sastoji od Laguerre-ovih težinskih funkcija (4.42) sa skoro dijagonalnim multi-indeksima.

Tabela 4.1: Koeficijenti $a_{n,k}$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$ za višestruko ortogonalne Jacobi-eve polinome; $r = 3$, $\alpha = 1$, $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1/4$, $\beta_3 = -1/4$; $n \leqslant 20$

i	$\alpha_{i,3}$	$\alpha_{i,2}$	$\alpha_{i,1}$	$\alpha_{i,0}$
0	−1.4285714285714286(−1)			
1	−2.8851540616246499(−1)	2.1768707482993197(−1)		
2	−3.8544221516357739(−1)	2.4885533536052567(−1)	5.4324760207113148(−2)	
3	−9.4489583642901721(−2)	2.5558194822003397(−1)	8.6774057165275854(−2)	1.6315423013987607(−2)
4	−1.6673090667975578(−1)	2.5701587367507144(−1)	1.6443964001352355(−2)	2.6675531012774156(−3)
5	−2.3917669428505342(−1)	2.6044916232539520(−1)	3.7021425677769084(−2)	9.3611909096357025(−5)
6	−1.1675493268393866(−1)	2.6354196522803514(−1)	5.6926131661188442(−2)	5.3653620722313774(−3)
7	−1.5805969659825489(−1)	2.6335336044273302(−1)	2.5309273618079248(−2)	2.2709691393999234(−3)
8	−2.0585232191457832(−1)	2.6413791455531671(−1)	3.6650017572954548(−2)	5.6560604717520359(−4)
9	−1.2741821376445422(−1)	2.6533854996293367(−1)	4.9582124305304638(−2)	3.8361194660048999(−3)
10	−1.5612993377662020(−1)	2.6512203005415770(−1)	2.8981366184597451(−2)	2.1639728364239452(−3)
11	−1.9145697954087840(−1)	2.6540589436380828(−1)	3.6765551681749009(−2)	8.8783317461228555(−4)
12	−1.3357792695166176(−1)	2.6601855379084442(−1)	4.6270196508266970(−2)	3.2511017686051238(−3)
13	−1.5553744375047290(−1)	2.6585132520725863(−1)	3.0966883005005431(−2)	2.1143133877612638(−3)
14	−1.8348871061253406(−1)	2.6598104740033892(−1)	3.6886585572864122(−2)	1.0966845714025530(−3)
15	−1.3757717226728043(−1)	2.6634705046296363(−1)	4.4386333038230584(−2)	2.9447307424077395(−3)
16	−1.5534192543920438(−1)	2.6622059700938253(−1)	3.2207381758124402(−2)	2.0856866464893746(−3)
17	−1.7844389078361894(−1)	2.6628881061328641(−1)	3.6981744226277791(−2)	1.2402019680140608(−3)
18	−1.4038002152177360(−1)	2.6653039931011929(−1)	4.3171017016114228(−2)	2.7567838441883074(−3)
19	−1.5529015667141288(−1)	2.6643295689567229(−1)	3.3055076847041242(−2)	2.0670810214041445(−3)
20	−1.7496809628326628(−1)	2.6647232016548233(−1)	3.7055003346066915(−2)	1.3442305416000771(−3)

Tabela 4.2: Parametri kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa; $r = 2$, $\alpha = -1/4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1/2$

n	i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$
4	1	$-9.363803514553(-1)$	$1.510869112286(-2)$	$8.507039212840(-1)$
	2	$-4.582349100977(-1)$	$3.288800922900(-1)$	$8.271187908480(-1)$
	3	$2.858146299038(-1)$	1.040155878374	$7.131276432992(-1)$
	4	$8.759963988450(-1)$	1.178587270415	$4.587234284060(-1)$
5	1	$-9.595739732964(-1)$	$6.085528646610(-3)$	$6.792157651536(-1)$
	2	$-6.429557235013(-1)$	$1.448828264237(-1)$	$6.808231614855(-1)$
	3	$-8.563321535083(-2)$	$5.546715987146(-1)$	$6.341969901657(-1)$
	4	$5.139342213734(-1)$	$9.766942509866(-1)$	$5.243590871209(-1)$
	5	$9.193715479180(-1)$	$8.803977274303(-1)$	$3.310787799115(-1)$
6	1	$-9.763650757517(-1)$	$2.049797491247(-3)$	$5.231693814831(-1)$
	2	$-7.779228623312(-1)$	$5.835107309355(-2)$	$5.582115897381(-1)$
	3	$-3.801432801669(-1)$	$2.731946113853(-1)$	$5.597593346685(-1)$
	4	$1.361177426328(-1)$	$6.241401620412(-1)$	$5.154089057680(-1)$
	5	$6.258082404992(-1)$	$8.808613543314(-1)$	$4.249153713749(-1)$
	6	$9.389388015514(-1)$	$7.241349338591(-1)$	$2.682092008046(-1)$
8	1	$-9.886995595675(-1)$	$4.657060697402(-4)$	$3.636423493026(-1)$
	2	$-8.890000823095(-1)$	$1.495796500577(-2)$	$4.047480255191(-1)$
	3	$-6.692705951078(-1)$	$8.133867893733(-2)$	$4.276372272958(-1)$
	4	$-3.397509595584(-1)$	$2.282259252626(-1)$	$4.254067482829(-1)$
	5	$5.519134932225(-2)$	$4.353613810197(-1)$	$4.016547542013(-1)$
	6	$4.498518834434(-1)$	$6.235260087583(-1)$	$3.571652132341(-1)$
	7	$7.729307134229(-1)$	$6.817427718958(-1)$	$2.887904888088(-1)$
	8	$9.638670760628(-1)$	$4.971134952526(-1)$	$1.806289771926(-1)$
16	1	$-9.982593521223(-1)$	$1.098552045505(-5)$	$1.441066772881(-1)$
	2	$-9.817291574247(-1)$	$4.226450510599(-4)$	$1.711788751056(-1)$
	3	$-9.407756176104(-1)$	$2.780997620514(-3)$	$1.929514233662(-1)$
	4	$-8.695291944228(-1)$	$9.759829836089(-3)$	$2.070962723425(-1)$
	5	$-7.655502123735(-1)$	$2.448418898469(-2)$	$2.156805365210(-1)$
	6	$-6.294503342599(-1)$	$4.960732841303(-2)$	$2.199258100412(-1)$
	7	$-4.645800212282(-1)$	$8.640162903920(-2)$	$2.205362939405(-1)$
	8	$-2.766686612890(-1)$	$1.340638010684(-1)$	$2.179242732461(-1)$
	9	$-7.338464711499(-2)$	$1.893823545890(-1)$	$2.123196914279(-1)$
	10	$1.361863364297(-1)$	$2.468423207685(-1)$	$2.038192868004(-1)$
	11	$3.421285501631(-1)$	$2.991521205656(-1)$	$1.923981595665(-1)$
	12	$5.343218013065(-1)$	$3.380778041836(-1)$	$1.778860841360(-1)$
	13	$7.030721540670(-1)$	$3.553567251522(-1)$	$1.598876674383(-1)$
	14	$8.397122251226(-1)$	$3.432706621804(-1)$	$1.375662333964(-1)$
	15	$9.371372223537(-1)$	$2.937586824518(-1)$	$1.089557444265(-1)$
	16	$9.902623590388(-1)$	$1.893598567773(-1)$	$6.744075479414(-2)$

Tabela 4.3: Parametri kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa; $r = 2$, $\alpha = 1$, $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1/4$

n	i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$
8	1	−9.807736962906(−1)	1.325904689018(−2)	3.587388796878(−2)
	2	−8.876182343170(−1)	8.993704645232(−2)	1.553022696100(−1)
	3	−6.936308793740(−1)	2.295086020893(−1)	3.084910553923(−1)
	4	−4.044677498567(−1)	3.557671050559(−1)	4.049850264214(−1)
	5	−5.085190374679(−2)	3.796403494806(−1)	3.846262824921(−1)
	6	3.192334275974(−1)	2.814356509000(−1)	2.626023899340(−1)
	7	6.503798123970(−1)	1.318293702509(−1)	1.163097742511(−1)
	8	8.904965191882(−1)	2.711729541200(−2)	2.312609971188(−2)
16	1	−9.967548537764(−1)	9.571585241732(−4)	4.031747449071(−3)
	2	−9.795318390040(−1)	7.766425149231(−3)	2.053152048929(−2)
	3	−9.396786824126(−1)	2.531111328266(−2)	5.107333208301(−2)
	4	−8.720737165847(−1)	5.520108488960(−2)	9.230126343675(−2)
	5	−7.745128722855(−1)	9.488967509297(−2)	1.377014527333(−1)
	6	−6.473891617926(−1)	1.381068532201(−1)	1.792219984018(−1)
	7	−4.934188362486(−1)	1.764094860064(−1)	2.091027166881(−1)
	8	−3.173466546442(−1)	2.014702594072(−1)	2.216465061887(−1)
	9	−1.255985677984(−1)	2.074591770035(−1)	2.145383497353(−1)
	10	7.412472926200(−2)	1.927938882876(−1)	1.893780251966(−1)
	11	2.733053271928(−1)	1.606915590066(−1)	1.512724794181(−1)
	12	4.630996337573(−1)	1.183079493369(−1)	1.075710607730(−1)
	13	6.348413954801(−1)	7.468921452913(−2)	6.605245832617(−2)
	14	7.805309103214(−1)	3.814550835763(−2)	3.302220184458(−2)
	15	8.932842079742(−1)	1.385392337033(−2)	1.181051479537(−2)
	16	9.677130399651(−1)	2.441191067272(−3)	2.061158222603(−3)
20	1	−9.982288278661(−1)	3.889716609793(−4)	1.905456134189(−3)
	2	−9.886386626720(−1)	3.265598826328(−3)	1.000188652666(−2)
	4	−9.659739987498(−1)	1.106728185934(−2)	2.576847013301(−2)
	4	−9.266485635472(−1)	2.530651619545(−2)	4.862730454695(−2)
	5	−8.684551170402(−1)	4.611534787923(−2)	7.657323581180(−2)
	6	−7.904178223677(−1)	7.212856742355(−2)	1.066028263922(−1)
	7	−6.926855921082(−1)	1.006552949043(−1)	1.351888566766(−1)
	8	−5.764377040286(−1)	1.281177978289(−1)	1.588108395622(−1)
	9	−4.437840060752(−1)	1.506866430235(−1)	1.744873269866(−1)
	10	−2.976510800276(−1)	1.649957834108(−1)	1.802331262685(−1)
	11	−1.416511021178(−1)	1.687964514393(−1)	1.753667885305(−1)
	12	2.006639866446(−2)	1.614137925633(−1)	1.606140492565(−1)
	13	1.829773548203(−1)	1.439055859944(−1)	1.379855295136(−1)
	14	3.423564271674(−1)	1.188814661907(−1)	1.104452877589(−1)
	15	4.934555482719(−1)	9.001142762434(−2)	8.142346401480(−2)
	16	6.316819336592(−1)	6.131880499982(−2)	5.425438018451(−2)
	17	7.527694731197(−1)	3.640059955758(−2)	3.163569186502(−2)
	18	8.529374177090(−1)	1.773603342592(−2)	1.520167035575(−2)
	19	9.290303254075(−1)	6.227991495789(−3)	5.284613709794(−3)
	20	9.786309311142(−1)	1.074510227844(−3)	9.059815536125(−4)

Tabela 4.4: Parametri kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa; $r = 3$, $\alpha = -1/2$, $\beta_1 = -1/4$, $\beta_2 = 1/4$, $\beta_3 = 1$

n	i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$	$A_{3,i}$
11	1	−9.966785646(−1)	3.442149651(−2)	1.951556079(−3)	2.720558716(−5)
	2	−9.662634283(−1)	8.977660019(−2)	1.648959244(−2)	1.298133852(−3)
	3	−8.814124617(−1)	1.469505021(−1)	5.060483585(−2)	1.022634133(−2)
	4	−7.270877761(−1)	2.004829910(−1)	1.047343060(−1)	3.954633319(−2)
	5	−5.028256153(−1)	2.484956734(−1)	1.752157763(−1)	1.037420359(−1)
	6	−2.221392615(−1)	2.902311734(−1)	2.559734862(−1)	2.120173353(−1)
	7	8.985875974(−2)	3.253336240(−1)	3.396362684(−1)	3.622778028(−1)
	8	4.003588018(−1)	3.536032653(−1)	4.184426362(−1)	5.386608643(−1)
	9	6.738410761(−1)	3.749099341(−1)	4.850472636(−1)	7.137887927(−1)
	10	8.774690236(−1)	3.891634987(−1)	5.332348057(−1)	8.552598300(−1)
	11	9.860923411(−1)	3.963050252(−1)	5.585078705(−1)	9.343914914(−1)
12	1	−9.974811524(−1)	2.810008759(−2)	1.388617673(−3)	1.572046874(−5)
	2	−9.739859787(−1)	7.443901179(−2)	1.200592842(−2)	7.777376381(−4)
	3	−9.071961425(−1)	1.232067053(−1)	3.753345287(−2)	6.310914631(−3)
	4	−7.832459896(−1)	1.696209126(−1)	7.897014315(−2)	2.508639684(−2)
	5	−5.987263856(−1)	2.119646565(−1)	1.342714734(−1)	6.769618715(−2)
	6	−3.605735941(−1)	2.495388662(−1)	1.995416142(−1)	1.426843714(−1)
	7	−8.483874835(−2)	2.820263912(−1)	2.697978982(−1)	2.524420974(−1)
	8	2.055087375(−1)	3.092625226(−1)	3.395568337(−1)	3.906521754(−1)
	9	4.835626142(−1)	3.311480808(−1)	4.033436115(−1)	5.421938574(−1)
	10	7.219299052(−1)	3.476162357(−1)	4.561501128(−1)	6.856766939(−1)
	11	8.962385423(−1)	3.586203404(−1)	4.938344729(−1)	7.979967645(−1)
	12	9.882624536(−1)	3.641299732(−1)	5.134442385(−1)	8.597032497(−1)
16	1	−9.990645905(−1)	1.359957597(−2)	4.107720109(−4)	2.207350025(−6)
	2	−9.897252337(−1)	3.822098318(−2)	3.874101569(−3)	1.250323707(−4)
	3	−9.613827512(−1)	6.601278305(−2)	1.297236418(−2)	1.130069111(−3)
	4	−9.053607379(−1)	9.401654185(−2)	2.892277403(−2)	4.935071489(−3)
	5	−8.161716356(−1)	1.209473016(−1)	5.185640968(−2)	1.455833932(−2)
	6	−6.918365299(−1)	1.462012874(−1)	8.115995076(−2)	3.356816813(−2)
	7	−5.338737024(−1)	1.694783484(−1)	1.157087031(−1)	6.527452645(−2)
	8	−3.470762763(−1)	1.906200687(−1)	1.540280602(−1)	1.118785123(−1)
	9	−1.390976210(−1)	2.095365180(−1)	1.944180920(−1)	1.737609201(−1)
	10	8.014188024(−2)	2.261719198(−1)	2.350601923(−1)	2.490518036(−1)
	11	2.991981615(−1)	2.404882744(−1)	2.741142447(−1)	3.335708970(−1)
	12	5.059521993(−1)	2.524575643(−1)	3.098089654(−1)	4.211650958(−1)
	13	6.885071431(−1)	2.620581536(−1)	3.405250990(−1)	5.044014247(−1)
	14	8.360700406(−1)	2.692732405(−1)	3.648697162(−1)	5.755124883(−1)
	15	9.397533816(−1)	2.740902944(−1)	3.817393381(−1)	6.274466492(−1)
	16	9.932364582(−1)	2.765009286(−1)	3.903696141(−1)	6.548549611(−1)

Tabela 4.5: Parametri kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa; $r = 2$, $s_1 = -1/2$, $s_2 = -1/4$

n	i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$
6	1	1.221185842900(1)	9.858095463414(−6)	1.843100435350(−5)
	2	6.905310670462	1.563569554670(−3)	2.534438809695(−3)
	3	3.607225605398	3.719978319820(−2)	5.127172367743(−2)
	4	1.555796061048	2.616823832489(−1)	2.921560902816(−1)
	5	4.370925795316(−1)	7.068628435927(−1)	5.763948219949(−1)
	6	3.271665455717(−2)	7.651354132156(−1)	3.030411966972(−1)
8	1	1.789194218928(1)	3.193875186493(−8)	6.568831380045(−8)
	2	1.162324061288(1)	1.319532098932(−5)	2.436407133309(−5)
	3	7.406393364003	7.868009006937(−4)	1.297980363260(−3)
	4	4.422678545320	1.422101928894(−2)	2.062288509169(−2)
	5	2.348979881582	1.048667333974(−1)	1.298273199963(−1)
	6	1.009338591487	3.685487493263(−1)	3.693596621292(−1)
	7	2.776163582753(−1)	6.733489587467(−1)	4.896454916262(−1)
	8	1.981045717206(−2)	6.106683619857(−1)	2.146389334989(−1)
10	1	2.374640867016(1)	8.795230932886(−11)	1.941544428023(−10)
	2	1.669744109177(1)	7.901670810442(−8)	1.597280805403(−7)
	3	1.175507935366(1)	9.715595498207(−6)	1.798978180453(−5)
	4	8.051691947679	3.610222289100(−4)	6.081429065695(−4)
	5	5.246321006744	5.573313571205(−3)	8.434849771005(−3)
	6	3.158685164349	4.230364001316(−2)	5.639671708629(−2)
	7	1.675573856630	1.749916107880(−1)	1.990952264994(−1)
	8	7.130658414963(−1)	4.223858744392(−1)	3.881185109686(−1)
	9	1.924563246847(−1)	6.193806385029(−1)	4.107800791245(−1)
	10	1.327674282629(−2)	5.074479566621(−1)	1.619650264048(−1)
14	1	3.577621460223(1)	4.938285007123(−16)	1.207743629179(−15)
	2	2.748162705584(1)	1.534759928489(−12)	3.513994366646(−12)
	3	2.140866187152(1)	5.826491343489(−10)	1.253298404042(−9)
	4	1.660843936134(1)	6.473553611834(−8)	1.306847631604(−7)
	5	1.270874455889(1)	2.988803634155(−6)	5.643168855451(−6)
	6	9.513909324042	6.907399354967(−5)	1.213121549323(−4)
	7	6.904524446266	8.955693150986(−4)	1.451719292540(−3)
	8	4.800298056284	7.031017607299(−3)	1.040723196996(−2)
	9	3.142842229190	3.530344004030(−2)	4.700539200856(−2)
	10	1.886099900786	1.181631265299(−1)	1.384755478709(−1)
	11	9.897696742877(−1)	2.724468351054(−1)	2.717477154375(−1)
	12	4.133127038655(−1)	4.439458842477(−1)	3.559497043197 − 1)
	13	1.084025628499(−1)	5.158367555060(−1)	2.962453188849(−1)
	14	7.153652610415(−3)	3.787590944369(−1)	1.040069854158(−1)

5

S-ortogonalni polinomi na polukrugu

U glavi 3 smo videli da mnoge osobine ortogonalnih polinoma na intervalu sa datom merom važe i za odgovarajuće s-ortogonalne polinome. Prirodno se nameće pitanje da li nešto slično važi i za polinome ortogonalne na polukrugu.

Neka je, kao i u glavi 2

$$D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \mathrm{Im}\ z > 0\}, \quad \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\ \mathrm{Im}\ z > 0\}\,.$$

Za težinsku funkciju ćemo uzeti

$$w(z) = (1 - z^2)^{-1/2}\,.$$

U glavi 2 pokazano je da za svaki polinom g važi:

$$\int_\Gamma \frac{g(z)w(z)}{iz}\,dz - \pi g(0)w(0) + \frac{1}{i} \fint_{-1}^{1} \frac{g(x)w(x)}{x}\,dx = 0\,,$$

odnosno

$$\fint_{-1}^{1} \frac{g(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = i\pi g(0) - \int_\Gamma \frac{g(z)}{z\sqrt{1-z^2}}\,dz\,, \quad \text{za sve} \ \ g \in \mathcal{P}. \tag{5.1}$$

Neka su $\pi_{n,s}$ monični polinomi koji zadovoljavaju uslov s-ortogonalnosti:

$$\int_\Gamma \pi_{n,s}^{2s+1}(z) z^k (1 - z^2)^{-1/2}\,\frac{dz}{iz} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{5.2}$$

Za $s = 0$ dobijamo obične polinome ortogonalne na polukrugu (glava 2).

Tada, prema (5.1), važi:

(i) Za $k=0$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\pi_{n,s}^{2s+1}(x)}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = i\pi\, \pi_{n,s}^{2s+1}(0)\,. \tag{5.3}$$

(ii) Za $k=1,2,\dots,n-1$:

$$\int_{-1}^{1} \pi_{n,s}^{2s+1}(x) x^\nu \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad (\nu = 0,1,\dots,n-2)\,. \tag{5.4}$$

Iz (5.4) vidimo da je polinom $\pi_{n,s}^{2s+1}$ ortogonalan na svim polinomima stepena ne višeg od $n-2$ u odnosu na $w(x)$ na $[-1,1]$, pa ga možemo predstaviti na sledeći način:

$$\pi_{n,s}^{2s+1}(z) = C_{n-1}T_{n-1}(z) + C_nT_n(z) + \ldots + C_{(2s+1)n}T_{(2s+1)n}(z)\,, \tag{5.5}$$

gde su T_i Chebyshev-ljevi polinomi prve vrste i $C_{(2s+1)n} = \dfrac{1}{2^{(2s+1)n-1}}$.

S druge strane je

$$\pi_{n,s}(z) = a_0T_0(z) + a_1T_1(z) + \cdots + a_nT_n(z)\,, \qquad a_n = \frac{1}{2^{n-1}}\,. \tag{5.6}$$

Iz (5.5) i (5.6) je

$$(a_0T_0 + a_1T_1 + \cdots + a_nT_n)^{2s+1} = C_{n-1}T_{n-1} + \cdots + C_{(2s+1)n}T_{(2s+1)n}\,. \tag{5.7}$$

Korišćenjem polinomne formule:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$$

gde se sumiranje vrši po svim m-torkama $(k_1,k_2,\dots,k_m)$ nenegativnih celih brojeva za koje važi $k_1+k_2+\cdots+k_m = n$ i činjenice da za Chebyshev-ljeve polinome važi

$$T_m \cdot T_n = \frac{1}{2}(T_{m+n} + T_{|m-n|})$$

leva strana jednakosti (5.7) može se zapisati u obliku

$$(a_0T_0 + a_1T_1 + \cdots + a_nT_n)^{2s+1} = C_0T_0 + C_1T_1 + \cdots + C_{(2s+1)n}T_{(2s+1)n}\,, \tag{5.8}$$

odakle zbog (5.7) mora biti $C_0 = C_1 = \ldots = C_{n-2} = 0$, što zajedno sa (5.3) daje sistem od $n-1+1=n$ jednačina za određivanje nepoznatih koeficijenata a_ν $(\nu = 0,1,\dots,n-1)$:

$$\begin{cases} C_\nu = 0 \quad (\nu = 0,1,\dots,n-2) \\[2ex] \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\pi_{n,s}^{2s+1}(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = i\pi\, \pi_{n,s}^{2s+1}(0)\,. \end{cases} \tag{5.9}$$

Razmotrimo sada slučaj $s = 1$.

Jednakost (5.7) postaje

$$(a_0T_0 + a_1T_1 + \cdots + a_nT_n)^3 = C_{n-1}T_{n-1} + \cdots + C_{3n}T_{3n}\,. \tag{5.10}$$

Na levoj strane jednakosti (5.10) javljaju se sabirci tipa

$$\begin{array}{rl} a_iT_i^3 & (i = 0, 1, \ldots, n), \\ 3a_ia_j^2T_iT_j^2 & (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, n\,;\ i \neq j), \\ 6a_ia_ja_kT_iT_jT_k & (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 2, 3, \ldots, n;\ \ i, j, k \text{ različiti})\,, \end{array}$$

za koje važi

$$T_i^3 = \frac{1}{4}T_{3i} + \frac{3}{4}T_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$T_iT_j^2 = \frac{1}{4}T_{2j+i} + \frac{1}{4}T_{|2j-i|} + \frac{1}{2}T_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, n;\ \ i \neq j),$$

$$T_iT_jT_k = \frac{1}{4}T_{i+j+k} + \frac{1}{4}T_{|j+k-i|} + \frac{1}{4}T_{i+|j-k|} + \frac{1}{4}T_{||j-k|-i|} \quad \begin{array}{l}(i = 0, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n; \\ k = 2, \ldots, n;\ i, j, k \text{ različiti}).\end{array}$$

Kako za svako $k \in \mathbb{N}$ važi $T_{2k+1}(0) = 0$ i $T_{2k}(0) = (-1)^k$ to je

$$\pi_{n,1}^3(0) = C_0 - C_2 + C_4 - C_6 + \cdots\,.$$

Neka je $n = 1$. Tada je $\pi_{1,1}(z) = T_1 + a_0T_0$ i

$$\begin{aligned} \pi_{1,1}^3(z) &= T_1^3(z) + 3a_0T_0(z)T_1^2(z) + 3a_0^2T_0^2(z)T_1(z) + a_0^3T_0^3(z) \\ &= \frac{1}{4}T_3(z) + \frac{3}{2}\,a_0T_2(z) + \left(\frac{3}{4} + 3a_0^2\right)T_1(z) + \frac{3}{2}a_0 + a_0^3\,, \end{aligned}$$

pa je

$$\pi_{1,1}^3(0) = -\frac{3}{2}\,a_0 + \frac{3}{2}\,a_0 + a_0^3 = a_0^3\,.$$

Koeficijent a_0 određujemo iz uslova (5.3), odnosno iz

$$\frac{1}{4}\fint_{-1}^{1} \frac{T_3(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{3}{2}\,a_0\fint_{-1}^{1} \frac{T_2(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx + \left(\frac{3}{4} + 3a_0^2\right)\fint_{-1}^{1} \frac{T_1(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx +$$
$$+ \left(\frac{3}{2}\,a_0 + a_0^3\right)\fint_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = i\pi\,a_0^3\,,$$

tj.

$$-\frac{\pi}{4} + \left(\frac{3}{4} + 3a_0^2\right)\pi = i\pi\,a_0^3\,.$$

Dakle, koeficijent a_0 je rešenje jednačine

$$1 + 6a_0^2 - 2ia_0^3 = 0\,.$$

Rešenja prethodne jednačine su:

$$\begin{array}{rl} -3.330669074 \cdot 10^{-16} & +0.3843671526\,i \\ 3.330669074 \cdot 10^{-16} & -0.4421253017\,i \\ -1.110223025 \cdot 10^{-16} & -2.9422418510\,i \quad . \end{array}$$

Prema tome, za $n = 1$ imamo tri monična polinoma koji zadovoljavaju uslov s-ortogonalnosti na polukrugu (5.2).

Neka je sada $n = 2$. Prema (5.6) je

$$\pi_{2,1}(z) = a_2 T_2(z) + a_1 T_1(z) + a_0 T_0(z)\,.$$

Tada je na osnovu prethodnog i zbog $a_2 = \dfrac{1}{2}$:

$$C_0 = \frac{3}{8}\,a_1^2 + a_0^3 + \frac{3}{2}\,a_0 a_1^2 + \frac{3}{8}\,a_0$$

$$C_1 = \frac{3}{4}\,a_1^3 + 3a_0^2 a_1 + \frac{3}{8}\,a_1 + \frac{3}{2}\,a_0 a_1$$

$$C_2 = \frac{3}{2}\,a_0 a_1^2 + \frac{3}{32} + \frac{3}{2}\,a_0^2 + \frac{3}{4}\,a_1^2$$

$$C_3 = \frac{1}{4}\,a_1^3 + \frac{3}{16}\,a_1 + \frac{3}{2}\,a_0 a_1$$

$$C_4 = \frac{3}{8}\,a_0 + \frac{3}{8}\,a_1^2$$

$$C_5 = \frac{3}{16}\,a_1$$

$$C_6 = \frac{1}{32}\,,$$

pa je

$$\pi_{2,1}^3(0) = C_0 - C_2 + C_4 - C_6 = a_0^3 + \frac{3}{4}\,a_0 - \frac{3}{2}\,a_0^2 - \frac{1}{8}\,.$$

Koeficijente a_0 i a_1 dobijamo iz sistema

$$\text{(5.11)} \qquad \begin{cases} C_0 = 0 \\[2ex] \displaystyle \fint_{-1}^{1} \frac{\pi_{2,1}^3(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = i\pi\,\pi_{2,1}^3(0)\,. \end{cases}$$

Kako je

$$\pi^3_{2,1}(x) = C_1T_1(x) + C_2T_2(x) + \cdots + C_6T_6(x)$$

i

$$\fint_{-1}^{1} \frac{T_{2k}(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0 \quad \text{za sve } k \in \mathbb{N}\,,$$

to je druga jednačina sistema (5.11) ekvivalentna sa

$$C_1 \fint_{-1}^{1} \frac{T_1(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx + C_3 \fint_{-1}^{1} \frac{T_3(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx + C_5 \fint_{-1}^{1} \frac{T_5(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = i\pi\, \pi^3_{2,1}(0)\,,$$

odnosno sa

$$C_1\,\pi - C_3\,\pi + C_5\,\pi = i\pi\,\pi^3_{2,1}(0)\,,$$

tj.

$$\frac{1}{2}\,a_1^3 + 3a_0^2a_1 + \frac{3}{8}\,a_1 = i\left(a_0^3 + \frac{3}{4}\,a_0 - \frac{3}{2}\,a_0^2 - \frac{1}{8}\right).$$

Sistem (5.11) je prema tome ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{cases} 3a_1^2 + 8a_0^3 + 12a_0a_1^2 + 3a_0 = 0 \\ 4a_1^3 + 24a_0^2a_1 + 3a_1 = i(8a_0^3 + 6a_0 - 12a_0^2 - 1)\,. \end{cases} \tag{5.12}$$

Iz prve jednačine prethodnog sistema je

$$a_1^2 = \frac{-3a_0 - 8a_0^3}{3 + 12a_0}\,. \tag{5.13}$$

Obzirom na (5.13) iz druge jednačine sistema (5.12) dobijamo a_0, a onda iz (5.13) i a_1. Među svim tako dobijenim polinomima sistem (5.11) zadovoljavaju sledećih 9 polinoma:

$$0.5\,(2z^2-1) - 1.255041679\,i\,z - 1.2273728340$$
$$0.5\,(2z^2-1) + 1.410610320\,i\,z - 0.2958451886$$
$$0.5\,(2z^2-1) - 0.2280444577\,i\,z + 0.06474935317$$
$$0.5\,(2z^2-1) - (0.3573159034 + 0.7273322236\,i)\,z - 0.2570758901 - 0.1246144376\,i$$
$$0.5\,(2z^2-1) + (0.3573159034 - 0.7273322236\,i)\,z - 0.2570758901 + 0.1246144376\,i$$
$$0.5\,(2z^2-1) + (0.1321606183 + 0.3519722699\,i)\,z + 0.1404065541 - 0.2708240895\,i$$
$$0.5\,(2z^2-1) - (0.1321606183 - 0.3519722699\,i)\,z + 0.1404065541 + 0.2708240895\,i$$
$$0.5\,(2z^2-1) - (0.2511981689 + 0.2567189698\,i)\,z + 0.1887254527 - 0.5743377565\,i$$
$$0.5\,(2z^2-1) + (0.2511981689 - 0.2567189698\,i)\,z + 0.1887254527 + 0.5743377565\,i\,.$$

Nule tih polinoma su redom:

$$\begin{array}{lcl}
-1.154811859 + 0.627520840\,i & \text{i} & 1.154811859 + 0.627520840\,i \\
-0.546250693 - 0.705305160\,i & \text{i} & 0.546250693 - 0.705305160\,i \\
-0.649807339 + 0.114022229\,i & \text{i} & 0.649807339 + 0.114022229\,i \\
-0.646294092 + 0.209379493\,i & \text{i} & 1.003609995 + 0.517952731\,i \\
-1.003609995 + 0.517952731\,i & \text{i} & 0.646294092 + 0.209379493\,i \\
-0.689477474 - 0.411857056\,i & \text{i} & 0.557316855 + 0.059884785\,i \\
-0.557316855 + 0.059884785\,i & \text{i} & 0.689477474 - 0.411857056\,i \\
-0.578687886 - 0.302275647\,i & \text{i} & 0.829886055 + 0.558994616\,i \\
-0.829886055 + 0.558994616\,i & \text{i} & 0.578687886 - 0.302275647\,i\,.
\end{array}$$

Sva izračunavanja rađena su u programskom paketu MATHEMATICA.

Dakle, za $n = 2$ uslov s-ortogonalnosti na polukrugu (5.2) zadovoljava 9 moničnih polinoma. **Prema tome, nema jedinstvenosti kao u realnom slučaju.**

Iz ovog primera se vidi da i nule tih polinoma nisu u D_+, kao što je u slučaju $s = 0$, tj. za obične polinome ortogonalne na polukrugu.

6

Višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu

Višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu predstavljaju generalizaciju polinoma ortogonalnih na polukrugu, uvedenih u glavi 2 u smislu da oni zadovoljavaju $r \in \mathbb{N}$ uslova ortogonalnosti u odnosu na nehermitski skalarni proizvod (2.4).

Neka je $r \geqslant 1$ ceo broj i neka je $\{w_1(x), w_2(x), \ldots, w_r(x)\}$ jedan AT sistem težinskih funkcija, koje su pozitivne i integrabilne na otvorenom intervalu $(-1, 1)$ sa eventualnim singularitetima u krajnjim tačkama, takve da se mogu analitički produžiti na gornji poludisk $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. Neka su ta analitička produženja funkcije $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_r(z)$. Pretpostavimo još da sve težinske funkcije zadovoljavaju i uslove (2.5) i (2.7).

Neka je dalje, kao i u glavi 4, $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ multi-indeks dužine $|\vec{n}| = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$. Višestruko ortogonalan polinom na polukrugu je moničan (kompleksan) polinom $\pi_{\vec{n}}(z)$ stepena $|\vec{n}|$ takav da zadovoljava sledeće uslove ortogonalnosti:

$$\int_\Gamma \pi_{\vec{n}}(z)\, z^k \frac{w_1(z)}{iz}\, dz = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n_1 - 1), \tag{6.1}$$

$$\int_\Gamma \pi_{\vec{n}}(z)\, z^k \frac{w_2(z)}{iz}\, dz = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n_2 - 1), \tag{6.2}$$

$$\vdots$$

$$\int_\Gamma \pi_{\vec{n}}(z)\, z^k \frac{w_r(z)}{iz}\, dz = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n_r - 1). \tag{6.3}$$

Za $r = 1$ imamo obične polinome ortogonalne na polukrugu.

Označimo sa

$$(f, g)_j = \int_\Gamma f(z) g(z) w_j(z) (iz)^{-1}\, dz = \int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right) g\left(e^{i\theta}\right) w_j\left(e^{i\theta}\right) d\theta, \tag{6.4}$$

odgovarajuće skalarne proizvode. Neka je takođe $(f,g)_{j+mr} = (f,g)_j$ za sve $m \in \mathbb{Z}$.

Analogno kao u glavi 2 može se pokazati da za bilo koji polinom g važe sledeće jednakosti

$$0 = \int_\Gamma g(z)w_m(z)\,dz + \int_{-1}^{1} g(x)w_m(x)\,dx \qquad (m = 1,2,\ldots,r) \tag{6.5}$$

i

$$\int_\Gamma \frac{g(z)w_m(z)}{iz}\,dz = \pi g(0)w_m(0) + i \fint_{-1}^{1} \frac{g(x)w_m(x)}{x}\,dx \qquad (m = 1,2,\ldots,r). \tag{6.6}$$

Razmatraćemo samo skoro dijagonalne multi-indekse $\vec{s}(n)$ date sa (4.13). Odgovarajuće višestruko ortogonalne polinome na polukrugu ćemo obeležavati sa

$$\pi_n(z) = \pi_{\vec{s}(n)}(z)\,.$$

Odgovarajući višestruko ortogonalni polinomi tipa II (realni), kao što smo videli u glavi 4 zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^{r} a_{n,r-i}P_{n-i}(x) \qquad (n \geqslant 0) \tag{6.7}$$

sa početnim uslovima $P_0(x) = 1$ i $P_j(x) = 0$ za $j = -1,-2,\ldots,-r$.

Za svako $m = 1,2,\ldots,r$ pridruženi polinomi druge vrste

$$Q_n^{(m)}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x}\, w_m(x)\,dx \qquad (n = 0,1,\ldots) \tag{6.8}$$

zadovoljavaju istu rekurentnu relaciju (ali sa drugim početnim uslovima).

Označimo nulte momente sa $\mu_0^{(m)}$, tj.

$$\mu_0^{(m)} = \int_\Gamma \frac{w_m(z)}{iz}\,dz = \pi w_m(0) + i \fint_{-1}^{1} \frac{w_m(x)}{x}\,dx \qquad (m = 1,2,\ldots,r)\,. \tag{6.9}$$

Neka je

$$D_n = \begin{bmatrix} Q_{n-1}^{(1)}(0) - i\mu_0^{(1)}P_{n-1}(0) & \cdots & Q_{n-r}^{(1)}(0) - i\mu_0^{(1)}P_{n-r}(0) \\ Q_{n-1}^{(2)}(0) - i\mu_0^{(2)}P_{n-1}(0) & \cdots & Q_{n-r}^{(2)}(0) - i\mu_0^{(2)}P_{n-r}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{n-1}^{(r)}(0) - i\mu_0^{(r)}P_{n-1}(0) & \cdots & Q_{n-r}^{(r)}(0) - i\mu_0^{(r)}P_{n-r}(0) \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

6.1 Egzistencija i jedinstvenost

Analogno kao u dokazu egzistencije i jedistvenosti polinoma ortogonalnih na polukrugu u poglavlju 2.1 (teorema 2.1.), možemo dokazati egzistenciju i jedinstvenost višestruko ortogonalnih polinoma na polukrugu, uz uslov da su sve matrice D_n, date sa (6.10), regularne.

TEOREMA 6.1. *Neka su* $w_j \quad (j = 1, 2, \dots, r)$ *težinske funkcije, pozitivne na intervalu* $(-1, 1)$*, analitičke u* D_+*, takve da zadovoljavaju uslove* (2.5) *i* (2.7) *i da integrali u* (6.5) *postoje* (*moguće i kao nesvojstveni*)*. Pretpostavimo još da su sve matrice* D_n (6.10) *regularne. Tada postoji jedinstveni niz višestruko ortogonalnih polinoma na polukrugu* (π_k)*. Tada je*

$$\pi_n(z) = P_n(z) + \theta_{n,1}P_{n-1}(z) + \theta_{n,2}P_{n-2}(z) + \cdots + \theta_{n,r}P_{n-r}(z)\,, \tag{6.11}$$

gde su (P_k) *odgovarajući višestruko ortogonalni polinomi tipa II* (*realni*)*, a konstante* $\theta_{n,j} \quad (j = 1, 2, \dots, r)$ *rešenja sledećeg sistema linearnih jednačina:*

$$\sum_{j=1}^{r} \theta_{n,j} \left(Q_{n-j}^{(m)}(0) - i\mu_0^{(m)} P_{n-j}(0) \right) = i\mu_0^{(m)} P_n(0) - Q_n^{(m)}(0) \qquad (m = 1, 2, \dots, r).$$

DOKAZ: Pretpostavimo prvo da višestruko ortogonalni polinomi (π_k) postoje. Stavljajući

$$g(z) = \frac{1}{i}\pi_n(z) z^{k_m-1} \qquad (1 \leqslant k_m < n_m)$$

u (6.5) za $m = 1, 2, \dots, r$ dobijamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma \pi_n(z) z^{k_m} (iz)^{-1} w_m(z)\, dz - i \int_{-1}^{1} \pi_n(x) x^{k_m-1} w(x)\, dx \\ &= \left(\pi_n, z^{k_m}\right)_m - i \left\langle \pi_n, x^{k_m-1} \right\rangle_m , \end{aligned}$$

odakle sledi reprezentacija (6.11) polinoma $\pi_n(z)$.

Za određivanje konstanti $\theta_{n,j} \quad (j = 1, 2, \dots, r)$, stavljajući

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{\pi_n(z) - \pi_n(0)}{iz} \\ &= \frac{1}{i} \left[\frac{P_n(z) - P_n(0)}{z} + \theta_{n,1} \frac{P_{n-1}(z) - P_{n-1}(0)}{z} + \cdots + \theta_{n,r} \frac{P_{n-r}(z) - P_{n-r}(0)}{z} \right] \end{aligned}$$

u (6.5) (za svako $m = 1, 2, \dots, r$), koristeći prvi izraz za g za računanje prvog integrala i drugi za računanje drugog integrala u (6.5), slično kao u dokazu teoreme 2.1., za $n \geqslant r$ dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina:

$$\sum_{j=1}^{r} \theta_{n,j} \left(Q_{n-j}^{(m)}(0) - i\mu_0^{(m)} P_{n-j}(0) \right) = i\mu_0^{(m)} P_n(0) - Q_n^{(m)}(0) \qquad (m = 1, 2, \dots, r).$$

Iz (6.5) i (6.6), uzimajući za polinom g redom $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{r-1}$, koristeći (6.11), (6.7) i (6.8), dobijaju se koeficijenti $\theta_{n,j}$ za $n < r$ (tj. sistemi linearnih jednačina istog oblika kao i za $n \geqslant r$).

Kako je matrica prethodnog sistema po pretpostavci regularna za svako n, to sistem ima jedinstveno rešenje.

Slično kao u dokazu teoreme 2.1., ako definišemo π_n sa (6.11), gde su $\theta_{n,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ rešenja gornjeg sistema jednačina, pokazuje se da je

$$\left(\pi_n, z^{k_m}\right)_m = 0 \qquad (0 \leqslant k_m < n_m)\,. \qquad \blacksquare$$

Težinske funkcije koje zadovoljavaju sve uslove navedene u teoremi 6.1. zvaćemo prihvatljivim.

6.2 Rekurentne relacije i numerička konstrukcija višestruko ortogonalnih polinoma na polukrugu

Na sličan način kao u realnom slučaju (poglavlje 4.3) možemo pokazati da višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$\pi_{m+1}(z) = z\pi_m(z) - \sum_{j=0}^{r} \alpha_{m,r-j}\pi_{m-j}(z) \qquad (m \geqslant 0), \tag{6.12}$$

sa početnim uslovima $\pi_0(z) = 1$ i $\pi_{-1}(z) = \pi_{-2}(z) = \cdots = \pi_{-r}(z) = 0$.

Stavljajući $m = 0, 1, \ldots, n-1$ u (6.12) dobijamo

$$H_n^C \begin{bmatrix} \pi_0(z) \\ \pi_1(z) \\ \vdots \\ \pi_{n-1}(z) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \pi_0(z) \\ \pi_1(z) \\ \vdots \\ \pi_{n-1}(z) \end{bmatrix} - \pi_n(z) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tj.

$$H_n^C \boldsymbol{\pi}_n(z) = z\boldsymbol{\pi}_n(z) - \pi_n(x)\mathbf{e}_n, \tag{6.13}$$

gde je

$$\boldsymbol{\pi}_n(z) = [\pi_0(z) \;\; \pi_1(z) \;\; \ldots \;\; \pi_{n-1}(z)]^T, \qquad \mathbf{e}_n = [0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 1]^T,$$

i H_n^C donja (kompleksna) Hessenberg-ova matrica

$$
(6.14)\qquad H_n^C = \begin{bmatrix}
\alpha_{0,r} & 1 & & & & & & & \\
\alpha_{1,r-1} & \alpha_{1,r} & 1 & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
\alpha_{r,0} & \cdots & \alpha_{r,r-1} & \alpha_{r,r} & 1 & & & & \\
 & \alpha_{r+1,0} & \cdots & \alpha_{r+1,r-1} & \alpha_{r+1,r} & 1 & & & \\
 & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \alpha_{n-2,0} & \cdots & \alpha_{n-2,r-1} & \alpha_{n-2,r} & 1 \\
 & & & & \alpha_{n-1,0} & \cdots & \alpha_{n-1,r-1} & \alpha_{n-1,r}
\end{bmatrix}.
$$

Neka su $\xi_\nu \equiv \xi_\nu^{(n)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ nule polinoma $\pi_n(z)$. Tada se relacija (6.13) svodi na problem sopstvenih vrednosti

$$\xi_\nu \boldsymbol{\pi}_n(\xi_\nu) = H_n^C \boldsymbol{\pi}_n(\xi_\nu).$$

Dakle, ξ_ν su sopstvene vrednosti matrice H_n^C, a $\boldsymbol{\pi}_n(\xi_\nu)$ odgovarajući sopstveni vektori. Prema (6.13) može se izvesti sledeća reprezentacija polinoma $\pi_n(z)$

$$\pi_n(z) = \det(zI_n - H_n^C),$$

gde je I_n jedinična matrica reda n.

Analogno kao u realnom slučaju, u poglavlju 4.4, koeficijente rekurentne relacije (6.12) možemo dobiti primenom diskretizovane Stieltjes-Gautschi-eve procedure.

Teorema 6.2. *Višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu (π_n) sa skoro dijagonalnim multi-indeksima zadovoljavaju rekurentnu relaciju*

$$(6.15)\qquad \pi_{n+1}(z) = (z - \alpha_{n,r})\pi_n(z) - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{n,k}\pi_{n-r+k}(z) \qquad (n \geqslant 0),$$

gde je

$$\alpha_{n,0} = \frac{\big(z\pi_n, \pi_{[(n-r)/r]}\big)_{\nu+1}}{\big(\pi_{n-r}, \pi_{[(n-r)/r]}\big)_{\nu+1}}$$

i

$$\alpha_{n,k} = \frac{\left(z\pi_n - \sum\limits_{\lambda=0}^{k-1} \alpha_{n,\lambda}\pi_{n-r+\lambda}, \pi_{[(n-r+k)/r]}\right)_{\nu+k+1}}{\big(\pi_{n-r+k}, \pi_{[(n-r+k)/r]}\big)_{\nu+k+1}}$$

za $k = 1, 2, \ldots, r$.

Ovde je $n = \ell r + \nu$, gde je $\ell = [n/r]$ i $\nu \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$.

Da bi dobili koeficijente rekurentne relacije (6.12) moramo izračunati skalarne proizvode koji se javljaju u prethodnoj teoremi. Pri tom, zapravo, treba izračunati integrale sledećeg tipa

$$\int_\Gamma \frac{z^j \pi_l(z) w_k(z)}{iz}\, dz\,. \tag{6.16}$$

Za $j \geqslant 1$ iz (6.5) imamo

$$\int_\Gamma \frac{z^j \pi_l(z) w_k(z)}{iz}\, dz = i \int_{-1}^{1} z^{j-1} \pi_l(z) w_k(z)\, dz\,.$$

Dobijene integrale možemo računati tačno, izuzimajući greške zaokrugljivanja, koristeći odgovarajuće Gauss-Chirstoffel-ove kvadraturne formule.

Za $j = 0$ prema (6.6) imamo

$$\int_\Gamma \frac{\pi_l(z) w_k(z)}{iz}\, dz = \mu_0^{(k)} \pi_l(0) + i \int_{-1}^{1} \frac{\pi_l(x) - \pi_l(0)}{x}\, w_k(x)\, dx\,.$$

Momenti $\mu_0^{(k)}$ se mogu računati prema (6.9), a za računanje integrala

$$\int_{-1}^{1} \frac{\pi_l(x) - \pi_l(0)}{x}\, w_k(x)\, dx$$

možemo opet koristiti Gauss-Chirstoffel-ove kvadraturne formule.

U slučaju Jacobi-evih težinskih funkcija za računanje momenata $\mu_0^{(k)}$ bolje je koristiti postupak opisan u poglavlju 2.5 i oblik (2.62).

6.3 Kvadraturne formule Gauss-ovog tipa

Primenjujući proceduru opisanu u poglavlju 6.2 na Jacobi-eve težinske funkcije dobijeni su numerički rezultati koji, kao i u slučaju običnih polinoma ortogonalnih na polukrugu, sugerišu da su sve nule polinoma $\pi_n(z)$ $(n \geqslant 2)$ proste i da se nalaze u gornjem poludisku D_+.

Znajući koeficijente rekurentne relacije (6.12), tj. znajući elemente matrice H_n^C, date sa (6.14), možemo generisati i optimalni skup kvadraturnih formula (kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa) u smislu analiziranom u poglavlju 4.5 za realni slučaj. Analogna definicija je:

Definicija 6.1. *Neka je $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ skup prihvatljivih težinskih funkcija, neka je $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ multi-indeks i $n = |\vec{n}|$. Skup kvadraturnih formula oblika:*

$$\int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right) w_m\left(e^{i\theta}\right)\, d\theta \approx \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_{m,\nu} f(\zeta_\nu), \qquad (m = 1, 2, \ldots, r) \tag{6.17}$$

ćemo zvati optimalan skup u odnosu na $(W, \vec{n})$ *ako i samo ako težinski koeficijenti* $\sigma_{m,\nu}$ *i čvorovi* ζ_ν *zadovoljavaju sledeće uslove:*

$$
(6.18) \qquad
\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_{m,\nu} &= \int_0^\pi w_m\left(e^{i\theta}\right) d\theta \\
\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_{m,\nu}\, \zeta_\nu &= \int_0^\pi e^{i\theta}\, w_m\left(e^{i\theta}\right) d\theta \\
&\ \ \vdots \\
\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_{m,\nu}\, \zeta_\nu^{n+n_m-1} &= \int_0^\pi e^{(n+n_m-1)i\theta}\, w_m\left(e^{i\theta}\right) d\theta
\end{aligned}
$$

za svako $m = 1, 2, \ldots, r$.

Analogno teoremi 4.6. možemo dokazati sledeću teoremu za optimalan skup kvadraturnih formula u smislu definicije 6.1.

Teorema 6.3. *Neka je* $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ *skup prihvatljivih težinskih funkcija,* $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$, $n = |\vec{n}|$. *Posmatrajmo kvadraturne formule*

$$
(6.19) \qquad \int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right) w_m\left(e^{i\theta}\right) d\theta \approx \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_{m,\nu} f(\zeta_\nu), \qquad (m = 1, 2, \ldots, r).
$$

Ove formule čine optimalan skup u odnosu na $(W, \vec{n})$ *ako i samo ako važi:*
1. Tačne su za sve polinome stepena $\leqslant n-1$.
2. Polinom $q(z) = \prod_{\nu=1}^{n} (z - \zeta_\nu)$ *je višestruko ortogonalan polinom na polukrugu* $\pi_{\vec{n}}(z)$ *u odnosu na* W.

U slučaju skoro dijagonalnih multi-indeksa čvorove ζ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa možemo dobiti kao sopstvene vrednosti odgovarajuće kompleksne Hessenberg-ove matrice (6.14). Kao i u realnom slučaju, računaćemo težinske koeficijente $\sigma_{m,\nu}$ zahtevajuću da svaka od r kvadraturnih formula generiše tačno prvih n modifikovanih momenata.

Označimo sa $V_n^C = [\boldsymbol{\pi}_n(\zeta_1) \ \ \boldsymbol{\pi}_n(\zeta_2) \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{\pi}_n(\zeta_n)]$ matricu sopstvenih vektora Hessenberg-ove matrice (6.14), normalizovanih tako da su im prve komponente jednake 1. Tada težinske koeficijente $\sigma_{m,\nu}$ možemo dobiti rešavanjem r sistema linearnih jednačina:

$$
(6.20) \qquad V_n^C \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{m,1} \\ \sigma_{m,2} \\ \vdots \\ \sigma_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0^{*(m)} \\ \mu_1^{*(m)} \\ \vdots \\ \mu_{n-1}^{*(m)} \end{bmatrix} \qquad (m = 1, 2, \ldots, r),
$$

gde su

$$\mu_\nu^{*(m)} = \int_\Gamma \frac{\pi_\nu(z)}{iz}\, w_m(z)\, dz \qquad (m = 1, 2, \ldots, r\,; \;\; \nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

modifikovani momenti i $\pi_\nu(z) = \pi_{\vec{s}(\nu)}(z)$ višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu.

Računanje modifikovanih momenata se opet svodi na izračunavanje integrala tipa (6.16) za $j = 0$, pa se može koristiti postupak opisan u poglavlju 6.2.

6.4 Numerički primeri

U ovom poglavlju daćemo parametre kvadratura Gauss-ovog tipa za prihvatljiv sistem težinskih funkcija koji se sastoji od dve Jacobi-eve težinske funkcije (2.57) $w^{(\alpha,\beta_1)}(z)$ i $w^{(\alpha,\beta_2)}(z)$ (tabela 6.1).

Tabela 6.1: Parametri kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa za $n = 8, 10$; $r = 2$, $\alpha = 1$, $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1/4$

ν	ζ_ν	$\sigma_{1,\nu}$	$\sigma_{2,\nu}$
1	$-0.9788997+0.0026247\,i$	$0.0580377 - 0.3542335\,i$	$-0.0188189 - 0.3832973\,i$
2	$-0.8760521+0.0159867\,i$	$-0.3374499 + 0.9347142\,i$	$-0.2794998 + 0.9968886\,i$
3	$-0.6630103+0.0461827\,i$	$0.0739024 - 1.5920321\,i$	$-0.2597682 - 1.7364585\,i$
4	$-0.3560514+0.0994357\,i$	$-2.4651138 + 1.8318576\,i$	$-2.2947968 + 2.1521091\,i$
5	$-0.0384815+0.1615833\,i$	$4.0225993 + 0.2344999\,i$	$4.4344593 - 0.3611610\,i$
6	$0.2730107+0.1200963\,i$	$1.7070884 - 1.8265961\,i$	$1.5093451 - 2.0000640\,i$
7	$0.6153346+0.0567013\,i$	$0.0142094 - 0.0333422\,i$	$-0.0129471 + 0.0126075\,i$
8	$0.8781496+0.0170913\,i$	$0.0683192 - 0.0148059\,i$	$0.0636190 - 0.0182020\,i$
1	$-0.9880607+0.0012045\,i$	$-0.2444479 + 0.3791317\,i$	$-0.2090496 + 0.4295410\,i$
2	$-0.9278047+0.0074739\,i$	$0.5579302 - 0.9679792\,i$	$0.3858939 - 1.1059521\,i$
3	$0.9180556+0.0092898\,i$	$0.0053745 - 0.0079086\,i$	$0.0018335 - 0.0057780\,i$
4	$-0.7967483+0.0218339\,i$	$-1.0054363 + 1.2162234\,i$	$-0.9308388 + 1.3867825\,i$
5	$0.7356568+0.0308872\,i$	$0.1766943 - 0.0092201\,i$	$0.1691405 - 0.0162823\,i$
6	$-0.5916927+0.0466799\,i$	$0.7261829 - 1.5490023\,i$	$0.4441955 - 1.7913086\,i$
7	$0.4779421+0.0651869\,i$	$-0.0093143 - 0.1648483\,i$	$-0.0616815 - 0.1002179\,i$
8	$-0.3288006+0.0861789\,i$	$-3.0832225 + 1.3083385\,i$	$-3.0114444 + 1.7142267\,i$
9	$0.1891105+0.1151987\,i$	$2.3710585 - 2.1396074\,i$	$2.1832689 - 2.4192835\,i$
10	$-0.0616346+0.1363395\,i$	$3.6467732 + 1.1149342\,i$	$4.1702746 + 0.5706947\,i$

Literatura

[1] A.I. Aptekarev, *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 423–447.

[2] A.I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials for classical weights*, Trans. Amer. Math. Soc.

[3] B. Beckermann, J. Coussement, W. Van Assche, *Multiple Wilson and Jacobi-Piñeiro polynomials*

[4] B.D. Bojanov, D. Braess, N. Dyn, *Generalized Gaussian quadrature formulas*, J. Approx. Theory **48** (1986), 335-353.

[5] C.F. Borges, *On a class of Gauss-like quadrature rules*, Numr. Math. **67** (1994) 271–288.

[6] L. Chakalov, *General quadrature formulae of Gaussian type*, Bulgar. Akad. Nauk Izv. Mat. Inst. **1** (1954), 67-84 (na bugarskom) [Engleski prevod East J. Approx. **2** (1995), 261-276].

[7] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[8] H. Engels, *Numerical Quadrature and Cubature*, Academic Press, London, 1980.

[9] W. Gautschi, *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*, P.L. Butzer, F. Fehér (Eds.), E.B. Christoffel, Birkhäuser, Basel, 1981, 72-147.

[10] W. Gautschi, *On the zeros of polynomials orthogonal on the semicircle*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 20, No. 3., 1989, 738-743.

[11] W. Gautschi, *Orthogonal polynomials: applications and computation*, Acta Numerica (1996), 45–119.

[12] W. Gautschi, H.J. Landau and G.V. Milovanović, *Polynomials Orthogonal on the Semicircle, II*, Constr. Approx., **3** (1987), 389-404.

[13] W. Gautschi, G.V. Milovanović, *Polynomials Orthogonal on the Semicircle*, J. Approx. Theory, **46** (1986), 230-250.

[14] W. Gautschi, G.V. Milovanović, *S-orthogonality and construction of Gauss-Turán-type quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. **86** (1997), 205-218.

[15] A. Ghizzetti, A. Ossicini, *Quadrature Formulae*, Akademie Verlag, Berlin, 1970.

[16] A. Ghizzetti, A. Ossicini, *Sull' esistenza e unicitá delle formule di quadratura gaussiane*, Rend. Mat.(6) **8** (1975), 1-15.

[17] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland,1983

[18] D. Kershaw, *A note on orthogonal polynomials*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **127** (1970), 83–93.

[19] G.V. Milovanović, *Some application of the polynomials orthogonal on the semicircle*, Numerical Methods (Miskolc, 1986.), 625-634, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Vol. **50**, Nort-Holland, Amsterdam-New York, 1987.

[20] G.V. Milovanović, *Construction of s-orthogonal polynomials and Turán quadrature formulae*, G.V. Milovanović (Ed.), Numerical Methods and Approximation Theory III (Niš, 1987), Univ. Niš, Niš, 1988, 311-328.

[21] G.V. Milovanović, *Complex Orthogonality on the semicircle with respect to Gegenbauer weight: Theory and aplications*, In: Topics in Mathematical Analysis (T. M. Rassias, ed.), 695-722, Ser. Pure Math., 11, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.

[22] G.V. Milovanović, *On polynomials orthogonal on the semicircle and applications*, J. Comput. Appl. Math. **49** (1993), 193-199.

[23] G.V. Milovanović, *S-orthogonality and generalized Turán quadratures: construction and applications*, D.D. Stancu, Ch. Coman, W.W. Breckner, P. Blaga (Eds.), Approximation and Optimization, Vol. I (Cluj-Napoca, 1996), Transilvania Press, Cluj-Napoca, Romania, 1997, 91-106.

[24] G.V. Milovanović, *Quadratures with multiple nodes, power orthogonality, and moment-preserving spline approximation*, Numerical analysis 2000, Vol.V, Quadrature and orthogonal polynomials (W. Gautschi, F. Marcellan, and L. Reichel, eds.), J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 267-286.

[25] G.V. Milovanović, *Orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane and applications*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Suppl. **68** (2002), 65–94.

[26] G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović, Th.M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalites, Zeros*, World Scientific–Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1994).

[27] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *Construction of Chakalov-Popoviciu's type quadrature formulae*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., no. **52**, Vol. II (1998), 625-636.

[28] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *Quadrature formulae connected to σ-orhogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **140** (2002), 619-637.

[29] G.V. Milovanović, M. Stanić, *Construction of Multiple Orthogonal Polynomials by Discretized Stieltjes-Gautschi Procedure and Corresponding Gaussian Quadratures*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **18** (2003), 9–29.

[30] A. Morelli, I. Verna, *Formula di quadratura in cui compaiono i valori della funzione e delle derivate con ordine massimo variabile da nodo a nodo*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **18** (1969), 91-98 (na italijanskom).

[31] A. Morelli, I. Verna, *Sulla convergenza di formule di quadratura collegate con i polinomi σ-ortogonali*, Note Mat. **6** (1986), 35-48 (na italijanskom).

[32] Y.G. Shi, *A kind of extremal problems of integrations on an arbitrary measure*, Acta Sci. Math. (Szeged), **65** (1999), 567-575.

[33] Y.G. Shi, *Generalized Gaussian quadrature formulas for Tchebycheff systems*, Far East J. Appl. Math. **3(2)** (1999), 153-170.

[34] B.T. Smith, *et al.*: *Matrix Eigensystem Routines – EISPACK Guide* Lect. Notes Comp. Science Vol. **6**, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1976.

[35] W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence*, in 'Continued Fractions: from analytic number theory to constructive approximation' (B.C. Berndt et al., eds.), Contemporary Mathematics **236**, Amer. Math. Soc. providence, RI, 1999, pp. 325–342.

[36] W. Van Assche, *Non-symmetric linear difference equations for multiple orthogonal polynomials*, CRM Proceedings and Lecture Notes **25** (2000), pp. 391–405.

[37] W. Van Assche, E. Coussement, *Some classical multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 317–347.