Univerzitet u Kragujevcu
Prirodno-matematički fakultet

Marija Stanić

GENERALISANE KVADRATURNE FORMULE GAUSS-OVOG TIPA

Doktorska disertacija

Kragujevac
2007

Sadržaj

Lista slika

Lista tabela

Predgovor

Ova doktorska disertacija je zapravo deo rezultata, objedinjenih u celinu, dobijenih tokom višegodišnjeg rada pod mentorstvom profesora Gradimira V. Milovanovića. Oblast istraživanja u okviru ove disertacije je razmatranje nekih nestandardnih tipova ortogonalnosti i njihova primena na konstrukciju kvadraturnih formula maksimalnog stepena tačnosti. S jedne strane radi se o istraživanjima povezanim sa Teorijom ortogonalnih sistema, što po prirodi pripada Teoriji aproksimacija, a sa druge strane konstrukciji kvadraturnih formula za numeričku integraciju funkcija, kao važnom delu Numeričke analize.

Moja istraživanja u ovoj oblasti započeta su izradom magistarske teze "*Nestandardne ortogonalnosti i odgovarajuće kvadrature Gauss-ovog tipa*" ([86]), a u okviru projekta "*Primenjeni ortogonalni sistemi, konstruktivne aproksimacije i numerički metodi*" (finansiranog od strane Ministarstva nauke i zaštite životne sredine Republike Srbije u periodu 2002–2005). U tom periodu publikovano je nekoliko radova ([65]–[67], [87]), u kojima su objedinjena tri različita pravca istraživanja: ortogonalnost na polukrugu u kompleksnoj ravni u odnosu na nehermitski skalarni proizvod, koncept s-ortogonalnosti, kao i koncept višestruke ortogonalnosti.

Istraživanja su dalje nastavljena u okviru projekata "*Ortogonalni sistemi i primene*" (Ministarstvo nauke i zaštite životne sredine Republike Srbije, 2006–2010) i "*New Methods for Quadrature*" (Swiss National Science Foundation, 2006–2008) i, naravno, još uvek traju. U poslednje dve godine, radeći sa profesorom Gradimirom Milovanovićem i docentom Aleksandrom Cvetkovićem, dobili smo dosta novih rezultata, od kojih je jedan deo publikovan ili se nalazi u štampi, jedan deo radova je trenutno na recenziji ([56]–[60]) i jedan deo je u pripremi za publikovanje. Deo tih rezultata, objedinjen u jednu celinu, predstavlja ova doktorska disertacija.

Čuveni Gauss-ov metod za aproksimaciju integrala iz 1814. godine može se generalisati na razne načine. Navešćemo dva izdvojena pravca. Prvi pravac je generalizacija Gauss-ovog metoda na ne-polinomske sisteme funkcija. Na taj način dobijaju se generalisane kvadraturne formule Gauss-ovog tipa. Drugi pravac je generalizacija Gauss-ovog metoda korišćenjem višetrukih čvorova. Oba ova pravca su opisana u glavi 1, poglavlje 1.3.

U ovoj disertaciji će dva pomenuta pravca generalizacije biti objedinjena na sistemima trigonometrijskih funkcija. Takođe, razmatraju se generalisane kvadraturne formule Gauss-ovog tipa dobijene za neke sisteme brzo oscilatornih funkcija.

Ova disertacija je organizovana na sledeći način. U glavi 1 dat je kratak pregled osnovnih rezultata Teorije ortogonalnosti, sa posebnim akcentom na ortogonalne polinome na realnoj pravoj. Ukratko su opisane interpolacione kvadraturne formule, Gauss-ove kvadraturne formule, kao i pomenuta dva pravca generalizacije (na ne-polinomske funkcije i korišćenjem višestrukih čvorova).

U glavi 2 detaljno su proučavani ortogonalni trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena i dat numerički metod za njihovu konstrukciju. Odgovarajuće kvadraturne formule Gauss-ovog tipa sa maksimalnim trigonometrijskim stepenom tačnosti analizirane su u glavi 3. Najpre su razmatrane kvadraturne formule sa prostim čvorovima u poglavlju 3.1. Dat je i metod za njihovu konstrukciju, baziran na dokazanim osobinama trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena, kao i numerički primeri. U odeljku 3.3.1 su uvedeni i analizirani $s-$ortogonalni trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena, a odgovarajuće kvadraturne formule sa višestrukim čvorovima kod kojih svi čvorovi imaju istu višestrukost u odeljku 3.3.2. Kvadraturne formule kod kojih čvorovi imaju različite višestrukosti, kao i $\sigma-$ortogonalni trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena, razmatrani su u odeljku 3.3.3. U odeljku 3.3.4 dat je numerički metod za konstrukciju kvadraturnih formula sa višestrukim čvorovima, a u odeljku 3.3.5 i numerički primeri.

Konačno, u glavi 4 razmatrane su kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za oscilatorne integrande, bazirane na ideji tzv. eksponencijalnog fitovanja, dat numerički metod za njihovu konstrukciju i odgovarajući numerički primeri.

U celoj disertaciji, sva tvrđenja preuzeta iz literature data su sa odgovarajućim referencama, ali bez dokaza.

* * *

Ovom prilikom posebno želim da se zahvalim svom mentoru, akademiku Gradimiru Milovanoviću, na pomoći i podršci koja je prisutna od početka naše saradnje, a koja je u mom radu bila od presudnog značaja. Takođe, zahvalnost dugujem i dr Aleksandru Cvetkoviću, jer mi je saradnja sa njim bila od velike pomoći. Na kraju, zahvalila bih se na pomoći, razumevanju i strpljenju svojim kolegama, prijateljima i porodici.

Kragujevac, februar 2007. *Marija Stanić*

Glava 1

Ortogonalnost i kvadraturne formule

1.1 Ortogonalni sistemi

U ovom poglavlju ćemo dati kratak pregled osnovnih rezultata Teorije ortogonalnosti. Posebna pažnja biće posvećena ortogonalnim polinomima. Pritom, ograničićemo se samo na one osobine ortogonalnih polinoma koje su važne za konstrukciju određenih tipova kvadraturnih formula, kao i na osobine koje su interesantne za upoređivanje sa trigonometrijskim ortogonalnim polinomima polucelobrojnog stepena koji će biti detaljno analizirani u glavi 2. Više detalja može se naći, na primer, u knjigama [44], [62], [47], [19], [7], [88].

1.1.1 Skalarni proizvod i ortogonalni sistemi

Neka je X linearan (vektorski) prostor funkcija nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ se naziva *skalarni proizvod* ako zadovoljava sledeće uslove:

(a)	$\langle f+g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$	(linearnost),
(b)	$\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$	(homogenost),
(c)	$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$	(hermitska simetrija),
(d)	$\langle f, f\rangle \geq 0,\ \langle f, f\rangle = 0 \iff f = 0$	(pozitivna definitnost),

za sve $f, g, h \in X$ i sve kompleksne skalare α. Prostor X u koji je uveden skalarni proizvod naziva se *unitaran*.

Ako je X realan linearni prostor, tada se osobina (c) skalarnog proizvoda svodi na simetriju $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$.

Od velikog značaja za skalarni proizvod je *nejednakost Cauchy–Schwarz–Buniakowsky-og* (videti [70], [47, p. 87]):

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|, \quad f, g \in X, \tag{1.1}$$

gde je *norma* od f definisana sa $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

Skup S elemenata unitarnog prostora obrazuje *ortogonalni sistem* ako za svake dve različite funkcije $f, g \in S$ važi $\langle f, g\rangle = 0$. Ako je, pritom, $\langle f, f\rangle = 1$ za sve $f \in S$, tada se sistem S naziva *ortonormiranim*.

Neka je $U = \{g_0, g_1, \ldots\}$ sistem linearno nezavisnih funkcija u unitarnom prostoru X. Startujući sa ovim sistemom, korišćenjem *Gram–Schmidt-ovog metoda ortogonalizacije*, možemo konstruisati odgovarajući ortogonalni (ortonormirani) sistem $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$, gde su funkcije φ_n zapravo linearne kombinacije funkcija $g_0, g_1, \ldots, g_n$, takve da važi $\langle \varphi_n, \varphi_k\rangle = 0$ za sve $n \ne k$. Ortogonalne funkcije φ_n mogu se eksplicitno predstaviti koristeći sistem funkcija U i *Gram-ovu matricu* reda $n+1$

$$G_{n+1} = \begin{bmatrix} \langle g_0, g_0\rangle & \langle g_0, g_1\rangle & \cdots & \langle g_0, g_n\rangle \\ \langle g_1, g_0\rangle & \langle g_1, g_1\rangle & & \langle g_1, g_n\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle g_n, g_0\rangle & \langle g_n, g_1\rangle & & \langle g_n, g_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Poznato je da važi $\Delta_{n+1} = \det G_{n+1} \ne 0$ ako i samo ako je sistem funkcija $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ linearno nezavisan. Tada važi i $\det G_{n+1} \ge 0$.

Dokaz sledeće teoreme može se naći npr. u [44].

Teorema 1.1. *Ortonormirane funkcije φ_n date su sa*

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n+1}}} \begin{vmatrix} \langle g_0, g_0\rangle & \langle g_0, g_1\rangle & \cdots & \langle g_0, g_{n-1}\rangle & g_0(z) \\ \langle g_1, g_0\rangle & \langle g_1, g_1\rangle & & \langle g_1, g_{n-1}\rangle & g_1(z) \\ \vdots & & & & \\ \langle g_n, g_0\rangle & \langle g_n, g_1\rangle & & \langle g_n, g_{n-1}\rangle & g_n(z) \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

gde je $\Delta_n = \det G_n$ *i* $\Delta_0 = 1$.

1.1.2 Fourier-ov razvoj i najbolja aproksimacija

Fourier-ov razvoj date funkcije $f \in X$ po funkcijama iz ortonormiranog sistema $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$, je

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \varphi_k(z). \tag{1.3}$$

Direktno iz (1.3) dobijamo *Fourier-ove koeficijente* f_k

$$f_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots . \tag{1.4}$$

Niz koeficijenata je ograničen. Primenom nejednakosti Cauchy–Schwarz–Buniakowsky-og (1.1) na (1.4), dobijamo

$$|f_k| = |\langle f, \varphi_k \rangle| \leq \|f\| \|\varphi_k\| = \|f\|.$$

Parcijalne sume Fourier-ovog reda u (1.3)

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k \varphi_k(z) \tag{1.5}$$

imaju veliku ulogu u teoriji aproksimacija.

Neka je X_n potprostor prostora X, takav da je $X_n = \mathfrak{L}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Očigledno je $\dim X_n = n + 1$. Tada je s_n *najbolja aproksimacija* za funkciju $f \in X$ u potprostoru X_n, tj. među svim elementima potprostora X_n parcijalna suma s_n je najbliži element funkciji $f \in X$ obzirom na metriku indukovanu normom. Naime, važi sledeća teorema (videti [44]).

Teorema 1.2. *Neka je $f \in X$ i $X_n = \mathfrak{L}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ potprostor od X. Tada je*

$$\min_{\varphi \in X_n} \|f - \varphi\|^2 = \|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2, \tag{1.6}$$

gde je s_n dato sa (1.5).

Lako se vidi da je *greška najbolje aproksimacije* $e_n = f - s_n$ ortogonalna na ceo potprostor X_n, jer za sve $k = 0, 1, \dots, n$ važi

$$\langle f - s_n, \varphi_k \rangle = \left\langle f - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \varphi_\nu, \varphi_k \right\rangle = \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \langle \varphi_\nu, \varphi_k \rangle = 0, \tag{1.7}$$

1.1.3 Primeri ortogonalnih sistema

Navešćemo ovde nekoliko primera ortogonalnih sistema koje ćemo kasnije koristiti. Svakako najznačajniji primeri ortogonalnih sistema su ortogonalni polinomi na realnoj pravoj o kojima će biti više reči u poglavlju 1.2. Međutim, ovde ćemo posebno izdvojiti Chebyshev-ljeve polinome zbog njihovog značaja u numeričkoj analizi. Najbolji pokazatelj toga je sledeća rečenica kojom počinje kniga [46]:

"Chebyshev polynomials are everywhere dense in numerical analysis."

Chebyshev-ljevi polinomi.

Posmatrajmo skalarni proizvod

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}\,\mathrm{d}x, \quad \lambda > -1/2. \tag{1.8}$$

Chebyshev-ljevi polinomi prve i druge vrste $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ su ortogonalni na segmentu $[-1,1]$ u odnosu na skalarni proizvod (1.8) za $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$, respektivno. Za $|x| \le 1$ mogu se zapisati u obliku

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \quad \text{i} \quad U_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\arccos x\big)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1.9}$$

respektivno. Lako se dobija $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ i $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$. Korišćenjem identiteta

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta,$$

za $x = \cos\theta$, zaključujemo da polinomi T_n i U_n zadovoljavaju rekurentne relacije

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1,2,\dots, \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n = 1,2,\dots. \end{aligned}$$

Korišćenjem navedenih rekurentnih relacija, uz $T_0(x) = 1$ i $T_1(x) = x$ ili $U_0(x) = 1$ i $U_1(x) = 2x$, dobijamo nizove polinoma $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Odgovarajući ortonormirani sistemi su

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_1, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_2, \dots\right\} \quad \text{i} \quad \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,U_1, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,U_2, \dots\right\}, \tag{1.10}$$

respektivno.

Trigonometrijski sistem. Trigonometrijski sistem

$$\mathcal{T} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$$

je ortogonalan u odnosu na skalarni proizvod

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odgovarajući ortonormirani sistem je

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}.$$

Müntz-ovi ortogonalni polinomi. Neka je $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots\}$ dati niz kompleksnih brojeva, takvih da je $\mathrm{Re}(\lambda_k) > -1/2$, $k \in \mathbb{N}_0$, i $\Lambda_n = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. *Müntz-Legendre-ovi polinomi* na $(0, 1]$ dati su sa (videti [3], [50])

$$P_n(x) = P_n(x; \Lambda_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma W_n(z) x^z \,\mathrm{d}z, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.11}$$

gde je Γ prosta kontura unutar koje su svi polovi racionalne funkcije

$$W_n(z) = \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{z + \overline{\lambda}_\nu + 1}{z - \lambda_\nu} \cdot \frac{1}{z - \lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Prazan proizvod za $n = 0$ jednak je 1.

Polinomi (1.11) su ortogonalni u odnosu na skalarni proizvod

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x.$$

Odgovarajući ortonormirani polinomi su $P_n^*(x) = (1 + \lambda_n + \overline{\lambda}_n)^{1/2} P_n(x)$.

1.2 Ortogonalni polinomi na realnoj pravoj

Neka je μ neopadajuća ograničena funkcija na realnoj pravoj $\mathbb{R}$, takva da indukovana pozitivna mera $\mathrm{d}\mu$ ima sve momente

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} t^k \,\mathrm{d}\mu(t), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.12}$$

konačne i $\mu_0 > 0$. Pretpostavimo sem toga da distribucija μ ima beskonačno mnogo tačaka rasta, tj. da skup

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x + \varepsilon) - \mu(x - \varepsilon) > 0 \ \text{ za sve } \ \varepsilon > 0\}$$

ima beskonačno mnogo elemenata. Skup tačaka rasta funkcije μ zove se *nosač* mere $\mathrm{d}\mu$ i obeležava se sa $\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$. Kažemo da je $\mathrm{d}\mu$ mera na $[a, b]$ ako je interval $[a, b]$ nosač mere $\mathrm{d}\mu$, tj. ako je $\mathrm{d}\mu(t) = 0$ za sve t van intervala $[a, b]$.

Neka je $\mathcal{P}$ prostor svih realnih polinoma i $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}_0$, prostor svih polinoma stepena ne višeg od n. Sa $\widehat{\mathcal{P}}_n$ obeležavaćemo skup svih moničnih polinoma stepena n, tj. $\widehat{\mathcal{P}}_n = \{x^n + q(x) \mid q(x) \in \mathcal{P}_{n-1}\}$.

Definišimo skalarni proizvod u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$ sa

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(t) \,\mathrm{d}\mu(t), \quad u, v \in \mathcal{P}. \tag{1.13}$$

Napomenimo da pretpostavka da distribucija μ ima beskonačno mnogo tačaka rasta garantuje pozitivnu definitnost skalarnog proizvoda (1.13).

Norma indukovana skalarnim proizvodom (1.13) je

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}} u(t)^2 \, \mathrm{d}\mu(t)\right)^{1/2} \tag{1.14}$$

Ako želimo da naglasimo meru $\mathrm{d}\mu$, za skalarni proizvod (1.13) i normu (1.14) koristićemo redom oznake $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathrm{d}\mu}$ i $\|\cdot\|_{\mathrm{d}\mu}$.

Definicija 1.1. *Sistem polinoma $\{p_n\}$, gde je*

$$\begin{aligned} &p_n(t) = \gamma_n t^n + \text{termi nižeg stepena}, \quad \gamma_n > 0, \\ &\langle p_n, p_k\rangle_{\mathrm{d}\mu} = \delta_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k, \end{cases} \qquad n, k \geq 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

zove se sistem orthonormiranih polinoma u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$. *Broj γ_n je vodeći koeficijent polinoma p_n.*

Često se koristi i *sistem moničnih ortogonalnih polinoma* u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$

$$\pi_n(t) = \frac{p_n(t)}{\gamma_n} = t^n + \text{termi nižeg stepena}. \tag{1.16}$$

Lako se dobija da je

$$\langle \pi_n, \pi_n\rangle_{\mathrm{d}\mu} = \left\langle \frac{p_n}{\gamma_n}, \frac{p_n}{\gamma_n}\right\rangle_{\mathrm{d}\mu} = \frac{1}{\gamma_n^2} > 0.$$

Navedimo dve leme koje se mogu vrlo jednostavno dokazati (videti [19]).

Lema 1.1. *Neka su π_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, monični ortogonalni polinomi u odnosu na meru* $\mathrm{d}\mu$. *Ako je $\pi \in \mathcal{P}_n$ polinom takav da za sve $k = 0, 1, \ldots, n$ važi $\langle \pi, \pi_k\rangle_{\mathrm{d}\mu} = 0$, tada je $\pi \equiv 0$.*

Lema 1.2. *Skup $\{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n\}$ moničnih ortogonalnih polinoma u odnosu na meru* $\mathrm{d}\mu$ *formira jednu bazu prostora $\mathcal{P}_n$.*

Napomenimo da iz pozitivne definitnosti skalarnog proizvoda (1.13) sledi jedinstvenost niza $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ moničnih ortogonalnih polinoma definisanih sa (1.16) (videti [19]).

Ako želimo da naglasimo meru tada umesto $p_n(\cdot)$, $\pi_n(\cdot)$ i γ_n koristimo oznake $p_n(\,\cdot\,;\mathrm{d}\mu)$, $\pi_n(\,\cdot\,;\mathrm{d}\mu)$ i $\gamma_n(\mathrm{d}\mu)$, respektivno. Ovi polinomi mogu se dobiti Gram–Schmidt-ovim metodom ortogonalizacije polazeći od $U = \{1, t, t^2, \ldots\}$.

Odgovarajuća Gram-ova matrica, uvedena u poglavlju 1.1.1, može se predstaviti pomoću momenata μ_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, u obliku

$$G_{n+1} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \mu_n & \mu_{n+1} & & \mu_{2n} \end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

Kako je sistem $U = \{1, t, t^2, \ldots\}$ linearno nezavisan, to je $\Delta_n = \det G_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Prema teoremi 1.1, odgovarajući ortonormirani polinom stepena $n \in \mathbb{N}$, definisan sa (1.15), može se predstaviti kao

$$p_n(t) = p_n(t; \mathrm{d}\mu) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n+1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_n & t \\ \vdots & & & & \\ \mu_n & \mu_{n+1} & & \mu_{2n-1} & t^n \end{vmatrix},$$

gde je $\Delta_0 = 1$. Vodeći koeficijent je $\gamma_n = \gamma_n(\mathrm{d}\mu) = \sqrt{\Delta_n/\Delta_{n+1}}$.

Matrice oblika (1.17) su poznate kao *Hankel-ove matrice*, a odgovarajuće determinante *Hankel-ove determinante*.

Kod mnogih mera koje se javljaju u primenama, distribucija μ je *apsolutno neprekidna funkcija*. Tada se funkcija $w(t) = \mu'(t)$ zove *težinska funkcija*. U tom slučaju meru $\mathrm{d}\mu$ možemo predstaviti u obliku $\mathrm{d}\mu(t) = w(t)\mathrm{d}t$, gde je $t \mapsto w(t)$ nenegativna funkcija, merljiva u Lebesgue-ovom smislu na $\mathbb{R}$, za koju svi momenti μ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, postoje i $\mu_0 > 0$. Tada umesto $p_n(\,\cdot\,; \mathrm{d}\mu)$, $\pi_n(\,\cdot\,; \mathrm{d}\mu)$, $\gamma_n(\mathrm{d}\mu)$, $\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathrm{d}\mu}$ i $\|\cdot\|_{\mathrm{d}\mu}$ pišemo redom $p_n(\,\cdot\,; w)$, $\pi_n(\,\cdot\,; w)$, $\gamma_n(w)$, $\mathrm{supp}(w)$, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_w$ i $\|\cdot\|_w$. Nosač $\mathrm{supp}(w)$ je interval, koji može biti konačan, polu-beskonačan ili beskonačan. Ako je $\mathrm{supp}(w) = [a, b]$, gde je $-\infty < a < b < +\infty$, tada kažemo da je w težinska funkcija na $[a, b]$, a za polinome $p_n(\,\cdot\,; w)$, odnosno $\pi_n(\,\cdot\,; w)$, kažemo da su ortonormirani, odnosno monični ortogonalni, na $[a, b]$ u odnosu na težinsku funkciju w. Interval (a, b) zove se *interval ortogonalnosti*.

1.2.1 Tročlana rekurentna relacija

Svojstvo ortogonalnih polinoma da zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju je najznačajnija informacija za konstrukciju ortogonalnih polinoma. Glavni razlog egzistencije tročlane rekurentne relacije leži u svojstvu

$$\langle tu, v \rangle_{\mathrm{d}\mu} = \langle u, tv \rangle_{\mathrm{d}\mu}, \quad u, v \in \mathcal{P},$$

koje zadovoljava skalarni proizvod (1.13).

Teorema 1.3. *Sistem $\{p_k\}$ ortonormiranih polinoma u odnosu na meru* $\mathrm{d}\mu$ *zadovoljava tročlanu rekurentnu relaciju*

$$tp_k(t) = b_{k+1}p_{k+1}(t) + a_kp_k(t) + b_{k-1}p_{k-1}(t), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.18}$$

gde je $p_{-1}(t) = 0$, a koeficijenti $a_k = a_k(\mathrm{d}\mu)$ i $b_k = b_k(\mathrm{d}\mu)$ su dati sa

$$a_k = \int_{\mathbb{R}} tp_k(t)^2 \,\mathrm{d}\mu(t) \quad i \quad b_k = \int_{\mathbb{R}} tp_{k-1}(t)p_k(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_k}.$$

Pošto je $p_0(t) = \gamma_0 = 1/\sqrt{\mu_0}$ i $\gamma_{n-1} = b_n\gamma_n$, to je $\gamma_n = \gamma_0/(b_1b_2\cdots b_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ je $b_n > 0$.

Obratno, za bilo koja dva data niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gde je $b_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, može se konstruisati niz polinoma korišćenjem tročlane rekurentne relacije (1.18), polazeći od $p_{-1}(t) = 0$ i $p_0(t) = 1$. Na osnovu Favard-ove teoreme (videti [7]), postoji pozitivna mera $\mathrm{d}\sigma$ na $\mathbb{R}$ takva da je

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(t)p_m(t)\,\mathrm{d}\sigma(t) = c_n\delta_{nm}, \quad c_n > 0,\ n, m \geq 0.$$

Dovoljan uslov za jedinstvenost mere $\mathrm{d}\sigma$ je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{b_n} = +\infty$ (Carleman-ov kriterijum).

Teorema 1.4. *Sistem moničnih ortogonalnih polinoma $\{\pi_k\}$ zadovoljava tročlanu rekurentnu relaciju*

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \pi_{-1}(t) = 0, \tag{1.19}$$

gde je $\alpha_k = a_k$ i $\beta_k = b_k^2 > 0$.

Zbog ortogonalnosti je

$$\alpha_n = \frac{\langle t\pi_n, \pi_n\rangle}{\langle \pi_n, \pi_n\rangle} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad \beta_n = \frac{\langle \pi_n, \pi_n\rangle}{\langle \pi_{n-1}, \pi_{n-1}\rangle} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Koeficijent β_0 može se uzeti proizvoljno, a obično se uzima $\beta_0 = \mu_0 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu(t)$. Tada je $\|\pi_n\| = \sqrt{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}$.

Dokazi teorema 1.3 i 1.4 mogu se naći gotovo u svim knjigama koje se bave ortogonalnim polinomima (na primer [47], [7], [19], [44]). Jedna od važnih posledica tročlane rekurentne relacije (1.18) je sledeća teorema.

Teorema 1.5. *Neka je $\{p_k\}$ sistem ortonormiranih polinoma u odnosu na meru* $\mathrm{d}\mu$*. Tada je*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(t) = b_{n+1}\frac{p_{n+1}(x)p_n(t) - p_n(x)p_{n+1}(t)}{x - t}. \tag{1.20}$$

Koeficijent b_{n+1} je definisan u teoremi 1.3.

Formula (1.20) poznata je kao *Christoffel–Darboux-ova formula*. Uzimajući graničnu vrednost kad $x \to t$ u (1.20) dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t)^2 = b_{n+1}\big(p'_{n+1}(t)p_n(t) - p'_n(t)p_{n+1}(t)\big). \tag{1.21}$$

Funkcija

$$\lambda_n(t) = \lambda_n(t; \mathrm{d}\mu) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)^2\right)^{-1} \tag{1.22}$$

zove se *Christoffel-ova funkcija*.

1.2.2 Nule ortogonalnih polinoma

Pretpostavimo da je $\operatorname{supp}(\mathrm{d}\mu)$ ograničen i obeležimo $\Delta(\mathrm{d}\mu) = \operatorname{Co}(\operatorname{supp}(\mathrm{d}\mu))$, tj. najmanji zatvoren interval koji sadrži $\operatorname{supp}(\mathrm{d}\mu)$.

Teorema 1.6. *Sve nule polinoma $p_n(\cdot) = p_n(\,\cdot\,; \mathrm{d}\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, su realne i različite i leže u unutrašnjosti intervala $\Delta(\mathrm{d}\mu)$.*

Obeležimo sa $t_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n$, nule polinoma $p_n(\,\cdot\,; \mathrm{d}\mu)$ u rastućem poretku, tj. $t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)}$. Koristeći jednakost (1.21) može se pokazati sledeće svojstvo nula ortogonalnih polinoma.

Teorema 1.7. *Nule polinoma p_n i p_{n+1} se međusobno razdvajaju, tj. važi:*

$$t_k^{(n+1)} < t_k^{(n)} < t_{k+1}^{(n+1)}, \quad k = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dokazi prethodne dve teoreme mogu se naći na primer u [44], [47], [19].

Navešćemo još jednu teoremu koja se tiče lokacije nula ortogonalnih polinoma (videti [19]).

Teorema 1.8. *U bilo kom otvorenom intervalu (c, d) u kome je $\mathrm{d}\mu \equiv 0$ može biti najviše jedna nula polinoma p_n.*

Uzimajući rekurentne relacije (1.18) za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ dobijamo sledeći sistem jednačina

$$t\mathbf{p}_n(t) = J_n(\mathrm{d}\mu)\mathbf{p}_n(t) + b_n p_n(t)\mathbf{e}_n, \tag{1.23}$$

gde su

$$J_n(d\mu) = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & & & \mathrm{O} \\ b_1 & a_1 & b_2 & & \\ & b_2 & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathrm{O} & & & b_{n-1} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_n(t) = \begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trodijagonalna matrica $J_n = J_n(d\mu)$ naziva se *Jacobi-eva matrica*.

Iz (1.23) se lako dobija da je $p_n(t) = 0$ ako i samo ako je

$$t\mathbf{p}_n(t) = J_n\mathbf{p}_n(t),$$

tj. nule $t_k^{(n)}$ polinoma p_n su jednake sopstvenim vrednostima Jacobi-eve matrice J_n. Sopstveni vektori koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti $t_k^{(n)}$ su $\mathbf{p}_n\big(t_k^{(n)}\big)$, $k = 1, \ldots, n$. Time smo dokazali sledeću lemu.

Lema 1.3. *Nule $t_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n$, polinoma $p_n(\,\cdot\,; d\mu)$ su sopstvene vrednosti Jacobi-eve matrice $J_n(d\mu)$ reda n. Odgovarajući sopstveni vektori su $\mathbf{p}_n\big(t_k^{(n)}\big)$, $k = 1, \ldots, n$.*

Monični polinom $\pi_n(t)$ može se predstaviti u obliku

$$\pi_n(t) = \det(tI_n - J_n),$$

gde je I_n jedinična matrica reda n.

Vrednosti Christoffel-ove funkcije (1.22) u nulama $t_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n$, ortogonalnog polinoma $\pi_n(t; d\mu)$, tj. brojevi

$$\lambda_k^{(n)} = \lambda\big(t_k^{(n)}; d\mu\big), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.24}$$

zovu se *Christoffel-ovi brojevi* ili *Cotes–Christoffel-ovi koeficijenti* i imaju značajnu ulogu u numeričkoj integraciji.

1.2.3 Ekstremalna svojstva ortogonalnih polinoma

Monični ortogonalni polinom $\pi_n(\,\cdot\,; d\mu)$ ima sledeće ekstremalno svojstvo (videti [19], [44]).

Teorema 1.9. *Za bilo koji monični polinom $\pi \in \widehat{\mathcal{P}}_n$ važi*

$$\int_{\mathbb{R}} \pi(t)^2\, d\mu(t) \geq \int_{\mathbb{R}} \pi_n(t; d\mu)^2\, d\mu(t), \tag{1.25}$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $\pi = \pi_n$.

Iz teoreme 1.9 sledi da je polinom $\pi_n(\,\cdot\,; \mathrm{d}\mu)$ jedinstveni monični polinom koji minimizira integral sa leve strane nejednakosti (1.25), tj.

$$\min_{\pi\in\widehat{\mathcal{P}}_n} \int_{\mathbb{R}} \pi(t)^2 \,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \pi_n(t; \mathrm{d}\mu)^2 \,\mathrm{d}\mu(t). \tag{1.26}$$

Teorema 1.9 daje i polinom iz klase $\mathcal{P}_{n-1}$ koji najbolje aproksimira monom t^n, $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu teoreme 1.2, najbolja $L^2(\mathrm{d}\mu)$ aproksimacija za funkciju $f(t) = t^n$ data je sa

$$s_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k p_k(t), \quad \text{gde je} \quad f_k = \langle t^n, p_k\rangle.$$

Međutim, prema teoremi 1.9, je $s_{n-1}(t) = t^n - \pi_n(t)$. Dakle, za monom t^n, polinom najbolje $L^2(\mathrm{d}\mu)$ aproksimacije iz klase $\mathcal{P}_{n-1}$ je $s_{n-1}(t) = t^n - \pi_n(t; \mathrm{d}\mu)$.

Ekstremalno svojstvo (1.26) može se generalizovati na $L^r(\mathrm{d}\mu)$ normu za proizvoljno $r > 1$ (videti [19]).

Teorema 1.10. *Neka je $1 < r < +\infty$. Tada postoji jedinstveni monični polinom $\pi_n^* \in \widehat{\mathcal{P}}_n$ takav da je*

$$\min_{\pi\in\widehat{\mathcal{P}}_n} \int_{\mathbb{R}} |\pi(t)|^r \,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} |\pi_n^*(t)|^r \,\mathrm{d}\mu(t). \tag{1.27}$$

Važan specijalan slučaj teoreme 1.10 je $r = 2s + 2$, za $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$. Jedinstveni ekstremalni monični polinom π_n^* u (1.27) označavaćemo sa $\pi_{n,s}(\cdot) = \pi_{n,s}(\,\cdot\,; \mathrm{d}\mu)$. Ako posmatramo integral sa leve strane jednakosti (1.27) kao funkciju $\phi(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ koeficijenata u $\pi(t) = t^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k t^k$, tada parcijalni izvodi funkcije ϕ po c_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, moraju biti jednaki nuli. To daje

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_{n,s}(t)^{2s+1} t^k \,\mathrm{d}\mu(t) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.28}$$

Dakle, $(2s+1)$-vi stepen polinoma $\pi_{n,s}$ mora biti ortogonalan na svim polinomima nižeg stepena u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$. Polinom $\pi_{n,s}$ zove se $s-$*ortogonalan polinom u odnosu na meru* $\mathrm{d}\mu$.

Očigledno je da za $s = 0$ važi $\pi_{n,s} = \pi_n$, tj. $s-$ortogonalni polinomi se svode na standardne ortogonalne polinome.

Osobine koje imaju nule običnih ortogonalnih polinoma prenose se i na nule $s-$ortogonalnih polinoma. Naime, važi sledeća teorema (videti [21], [52]).

Teorema 1.11. *Nule polinoma $\pi_{n,s}(\cdot) = \pi_{n,s}(\,\cdot\,; \mathrm{d}\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, su realne, proste i leže u unutrašnjosti intervala $\Delta(\mathrm{d}\mu)$. Nule polinoma $\pi_{n+1,s}$ i $\pi_{n,s}$ se međusobno razdvajaju.*

1.3 Kvadraturne formule

Neka je $\mathrm{d}\mu$ mera, koja ima beskonačan nosač i zadovoljava sve osobine date na početku poglavlja 1.2. *Kvadraturna formula sa n tačaka* je formula oblika

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) + R_n(f), \tag{1.29}$$

gde zbir

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) \tag{1.30}$$

obezbeđuje aproksimaciju integrala $I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$, a $R_n(f)$ je odgovarajući ostatak. Zbir $Q_n(f)$ je *kvadraturna suma*, tačke t_k, $k = 1, \ldots, n$, zovu se *čvorovi*, a A_k, $k = 1, \ldots, n$, *težine* kvadraturne formule (1.29).

Definicija 1.2. *Kvadraturna formula* (1.29) *ima algebarski stepen tačnosti d ako za sve polinome $p \in \mathcal{P}_d$ važi $R_n(p) = 0$. Algebarski stepen tačnosti kvadraturne formule* (1.29) *je tačno d ako ona ima algebarski stepen tačnosti d, a nema algebarski stepen tačnosti $d+1$, tj. ako je $R_n(p) \neq 0$ za neki polinom $p \in \mathcal{P}_{d+1}$.*

1.3.1 Interpolacione kvadraturne formule

Za date međusobno različite čvorove t_k, $k = 1, \ldots, n$, težine A_k, $k = 1, \ldots, n$, se mogu odrediti tako da kvadraturna formula (1.29) ima algebarski stepen tačnosti $d = n - 1$.

Obeležimo sa q_n monični polinom stepena n sa nulama u čvorovima t_k, $k = 1, \ldots, n$:

$$q_n(t) = \prod_{k=1}^{n} (t - t_k). \tag{1.31}$$

Integracijom Lagrange-ove interpolacione formule

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\ell_k(t) + r_n(f;t),$$

gde je

$$\ell_k(t) = \frac{q_n(t)}{q_n'(t_k)(t - t_k)}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.32}$$

dobijamo (1.29) sa

$$A_k = \frac{1}{q_n'(t_k)} \int_{\mathbb{R}} \frac{q_n(t)}{t - t_k} \, \mathrm{d}\mu(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.33}$$

i

$$R_n(f) = \int_{\mathbb{R}} r_n(f;t) \, \mathrm{d}\mu(t). \tag{1.34}$$

Za sve $f \in \mathcal{P}_{n-1}$ je $r_n(f;t) = 0$, pa je i $R_n(f) = 0$. Kvadraturne formule dobijene na ovaj način nazivaju se *interpolacione*. Osnovne interpolacione kvadraturne formule su *Newton–Cotes-ove*, kod kojih je $\mathrm{d}\mu(t) = \mathrm{d}t$ na $[-1, 1]$ i čvorovi izabrani ekvidistantno na $[-1, 1]$.

Prirodno se nameće ideja da se čvorovi ne fiksiraju unapred, već da se određuju tako da se algebarski stepen tačnosti poveća. U tome važnu ulogu imaju ortogonalni polinomi. Sledeću teoremu dokazao je Jacobi 1826. godine (videti [18], [19], [44]).

Teorema 1.12. *Za dati prirodan broj $m(\leq n)$, kvadraturna formula* (1.29) *ima algebarski stepen tačnosti $d = n - 1 + m$ ako i samo ako važi:*

1° *formula* (1.29) *je interpolaciona;*

2° *polinom q_n, definisan sa* (1.31), *zadovoljava*

$$\langle q_n, p \rangle = \int_{\mathbb{R}} q_n(t) p(t) \, \mathrm{d}\mu(t) = 0 \qquad \text{za sve} \;\; p \in \mathcal{P}_{m-1}.$$

1.3.2 Gauss-ove kvadraturne formule

Prema teoremi 1.12, kvadraturna formula (1.29) u odnosu na pozitivnu meru $\mathrm{d}\mu$ ima maksimalni algebarski stepen tačnosti $2n - 1$, tj. vrednost $m = n$ je optimalna. Vrednosti $m > n$ nisu moguće. U slučaju $m = n + 1$ bi, zbog 2°, polinom q_n morao biti ortogonalan na samom sebi, što je nemoguće.

Kvadraturna formula (1.29) sa maksimalnim algebarskim stepenom tačnosti $2n - 1$ naziva se *Gauss-ova* (ili *Gauss–Christoffel-ova*) *kvadraturna formula* u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$.

Prve ideje o kvadraturama kod kojih se čvorovi i težinski koeficijenti određuju iz uslova maksimalne moguće tačnosti potiču još iz XVII veka (Newton i Cotes). Oslanjajući se na radove Newton-a i Cotes-a i svoj rad o hipergeometrijskim razvojima iz 1812. godine, K. F. Gauss je 1814. razvio ovaj čuveni metod numeričke integracije. Gauss-ove rezultate je po formi pojednostavio Jacobi 1826.

godine. U XIX veku Gauss-ove kvadrature su detaljnije razrađivali i dalje razvijali Mehler, Christofell i drugi. Dobijene rezultate su sistematizovali i uobličili u teoriju Chirstoffel 1877, Radau 1880. i Heine 1881.

U slučaju $m = n$ iz uslova ortogonalnosti 2° teoreme 1.12 sledi da polinom q_n mora biti monični ortogonalni polinom π_n u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$. Dakle, čvorovi Gauss-ove kvadraturne formule su nule moničnog ortogonalnog (ili ortonormiranog) polinoma u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$. Težine se dobijaju iz (1.33) i mogu se predstaviti u sledećem obliku (videti [16], [44])

$$A_k = \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu \big(t_k^{(n)}\big)^2 \right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Prema tome, sve težine A_k, $k = 1, \ldots, n$, su pozitivne. Koristeći (1.22) lako se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 1.13. *Parametri Gauss-ove kvadraturne furmule* (1.29) *u odnosu na pozitivnu meru* $\mathrm{d}\mu$ *su*

$$t_k = t_k^{(n)}, \quad A_k = \lambda_{n,k} = \lambda_n\big(t_k^{(n)}; \mathrm{d}\mu\big), \quad k = 1, \ldots, n,$$

tj. čvorovi su nule ortogonalnog polinoma $\pi_n(t; \mathrm{d}\mu)$*, a težine su odgovarajući Christoffel-ovi brojevi, dati sa* (1.24).

Za numeričku konstrukciju Gauss-ovih kvadraturnih formula postoji više metoda, a svakako najpoznatiji je metod koji su razvili Golub i Welsch u [22]. Njihov metod baziran je na određivanju sopstvenih vrednosti i prvih komponenti sopstvenih vektora simetrične trodijagonalne Jacobi-eve matrice, koristeći QR algoritam.

Teorema 1.14. *Čvorovi* t_k, $k = 1, \ldots, n$, *u Gauss-ovoj kvadraturnoj formuli* (1.29) *u odnosu na pozitivnu meru* $\mathrm{d}\mu$ *su sopstvene vrednosti Jacobi-eve matrice reda* n

$$J_n(\mathrm{d}\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \mathrm{O} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ \mathrm{O} & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{1.35}$$

gde su α_k *i* β_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *koeficijenti tročlane rekurentne relacije* (1.19) *za monične ortogonalne polinome* $\pi_k(\,\cdot\,; \mathrm{d}\mu)$. *Težine* A_k *date su sa*

$$A_k = \beta_0 v_{k,1}^2, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gde je $\beta_0 = \mu_0 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu(x)$, *a* $v_{k,1}$ *prva komponenta normalizovanog sopstvenog vektora* $\mathbf{v}_k$ *koji odgovara sopstvenoj vrednosti* t_k, *tj.*

$$J_n(\mathrm{d}\mu)\mathbf{v}_k = t_k \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k^\top \mathbf{v}_k = 1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Pretpostavimo da je $[a,b] = \mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$. Za ostatak $R_n(f)$ Gauss-ove kvadraturne formule (1.29) važi sledeći rezultat (videti [47], [19], [44]).

Teorema 1.15. *Ako je $f \in C^{2n}[a,b]$, tada postoji $\xi \in (a,b)$ tako da za ostatak $R_n(f)$ u Gauss-ovoj kvadraturnoj formuli* (1.29) *važi*

$$R_n(f) = \frac{\|\pi_n^2\|}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

gde je π_n monični ortogonalni polinom u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$.

1.3.3 Kvadraturne formule sa višestrukim čvorovima

Više od sto godina nakon što je Gauss objavio svoj čuveni metod aproksimacije integrala, pojavila se ideja o numeričkoj integraciji koja uključuje višestruke čvorove. Uzimajući bilo koji sistem od n različitih tačaka $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ i n nenegativnih celih brojeva $m_1, m_2, \ldots, m_n$, polazeći od Hermite-ove interpolacione formule L. Chakalov je 1948. u [4] izveo kvadraturnu formulu

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{\nu=1}^{n} \left[A_{0,\nu} f(\tau_\nu) + A_{1,\nu} f'(\tau_\nu) + \cdots + A_{m_\nu-1,\nu} f^{(m_\nu-1)}(\tau_\nu)\right], \tag{1.36}$$

koja je tačna za sve polinome stepena najviše $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - 1$.

Uzimajući u (1.36) $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = k$, P. Turán je u [90] proučavao kvadraturne formule oblika

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\nu=1}^{n} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + R_{n,k}(f). \tag{1.37}$$

Obzirom na stepen tačnosti Gauss-ovih kvadraturnih formula, postavlja se pitanje da li se čvorovi u kvadraturnoj formuli (1.37) mogu izabrati tako da ona bude tačna za sve algebarske polinome stepena ne višeg od $(k+1)n-1$. Turán je pokazao da je odgovor negativan za $k=2$ i pozitivan za $k=3$. Dokazao je da, u slučaju $k=3$, za čvorove τ_ν treba uzeti nule moničnog polinoma $\pi^* \in \widehat{\mathcal{P}}_n$ koji minimizira integral $\int_{-1}^{1} \pi(t)^4\,\mathrm{d}t$.

U opštem slučaju odgovor je negativan za parne, a pozitivan za neparne k i τ_ν su nule moničnog polinoma stepena n koji minimizira $\int_{-1}^{1} |\pi(t)|^{k+1}\,\mathrm{d}t$.

Neka je $k = 2s+1$, $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$.

Umesto kvadraturne formule (1.37) možemo posmatrati opštije *kvadraturne formule Gauss–Turán-ovog tipa*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \sum_{i=0}^{2s} \sum_{\nu=1}^{n} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + R_{n,2s}(f), \tag{1.38}$$

gde je $\mathrm{d}\mu$ nenegativna mera na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ sa beskonačnim nosačem, za koju svi momenti postoje i konačni su i $\mu_0 > 0$. Formula (1.38) je tačna za sve polinome stepena ne višeg od $2(s+1)n-1$, ako su čvorovi τ_ν, $\nu = 1,\dots,n$, nule $s-$ortogonalnog moničnog polinoma $\pi_{n,s}$ u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$. One su realne i različite i leže unutar intervala $\Delta(\mathrm{d}\mu)$ (teorema 1.11). Težine $A_{i,\nu}$, $\nu = 1,2,\dots,n$, $i = 0,1,\dots,2s$, su date sa

$$A_{i,\nu} = \int_{\mathbb{R}} \ell_{i,\nu}(t)\,\mathrm{d}\mu(t),$$

gde su $\ell_{\nu,i}(t)$ fundamentalni polinomi Hermite-ove interpolacije. Težine $A_{i,\nu}$ nazivaju se *Cotes-ovi brojevi višeg reda.*

Numerički metod za konstrukciju Gauss–Turán-ovih kvadratura dat je u radu Gautschi-ja i Milovanovića u [20].

Dalje uopštavanje Gauss–Turán-ovih kvadratura (za $\mathrm{d}\mu(t) = \mathrm{d}t$ na (a,b)) na kvadraturne formule kod kojih čvorovi imaju različite višestrukosti razvili su L. Chakalov u [5, 6] i T. Popoviciu u [77]. Značajan teorijski progres napravio je rumunski matematičar D. D. Stancu. U okviru Elsevier-ovog izdavačkog poduhvata "Numerical Analysis 2000" u petom tomu dat je pregledni rad iz ove problematike [52], koji je po pozivu pisao G. V. Milovanović.

Pretpostavimo da su čvorovi τ_ν, $\nu = 1,\dots,n$, uređeni, tj. $\tau_1 < \cdots < \tau_n$, sa višestrukostima $m_1,\dots,m_n$, respektivno. Pokazano je da kvadraturna formula (1.36) ima algebarski stepen tačnosti $2\sum\limits_{\nu=1}^{n}\big[(m_\nu+1)/2\big]-1$, što znači da parne višestrukosti m_ν nemaju nikakvog uticaja na povećanje algebarskog stepena tačnosti. Pretpostavićemo zato da su svi brojevi m_ν neparni, tj. $m_\nu = 2s_\nu + 1$, $\nu = 1,\dots,n$.

Teorema 1.16. *Za dati niz nenegativnih celih brojeva $\sigma = (s_1,\dots,s_n)$ kvadraturna formula*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=0}^{2s_\nu} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + R_n(f) \tag{1.39}$$

ima maksimalni algebarski stepen tačnosti $d = 2\sum\limits_{\nu=1}^{n} s_\nu + 2n - 1$ ako i samo ako čvorovi $\tau_1,\dots,\tau_n$ zadovoljavaju uslove

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{\nu=1}^{n}(t-t_\nu)^{2s_\nu+1} t^k\,\mathrm{d}\mu(t) = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-1. \tag{1.40}$$

Uslov ortogonalnosti (1.40) se u slučaju $s_1 = \cdots = s_n = s$ svodi na (1.28) i može se dobiti minimizacijom integrala

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{\nu=1}^{n}(t-t_\nu)^{2s+2}\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Uslov (1.40) definiše niz polinoma $\{\pi_{n,\sigma}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$\pi_{n,\sigma}(t) = \prod_{\nu=1}^{n}(t-\tau_\nu^{(n,\sigma)}), \quad \tau_1^{(n,\sigma)} < \tau_2^{(n,\sigma)} < \cdots < \tau_n^{(n,\sigma)},$$

tako da važi

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_{k,\sigma}(t)\prod_{\nu=1}^{n}(t-t_\nu^{(n,\sigma)})^{2s_\nu+1}\,\mathrm{d}\mu(t) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Takvi polinomi $\pi_{k,\sigma}$ zovu se *$\sigma-$ortogonalni polinomi* u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$ koji odgovaraju nizu $\sigma = (s_1, s_2, \ldots)$ nenegativnih celih brojeva. U slučaju konstantnog niza $\sigma = (s, s, \ldots)$ ti polinomi se svode na $s-$ortogonalne polinome u odnosu na meru $\mathrm{d}\mu$.

Numerički stabilni algoritmi za konstrukciju opštih kvadraturnih formula sa višestrukim čvorovima dati su u radovima Milovanovića, Spalevića i Cvetkovića [64], kao i Shi-ja i Xu-a [83].

1.3.4 Generalisane Gauss-ove kvadraturne formule

Gauss-ov metod aproksimacije integrala na prirodan način se može proširiti na nepolinomske funkcije. Neka je

$$\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots\}, \quad t \in [a,b], \tag{1.41}$$

sistem linearno nezavisnih funkcija, izabran tako da je kompletan u nekom prostoru funkcija (videti [16], [37], [45]). Neka je $\mathrm{d}\mu$ pozitivna mera na intervalu $[a,b]$. Ako kvadraturna formula

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) + R_n(f) \tag{1.42}$$

tačno integrali prvih $2n$ funkcija sistema (1.41), kažemo da je kvadraturna formula (1.42) *Gauss-ova za sistem funkcija* (1.41), odnosno *generalisana Gauss-ova kvadraturna formula*. Ako je $\phi_k(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, onda se kvadraturna formula (1.42) svodi na običnu Gauss-ovu kvadraturnu formulu (odeljak 1.3.2). Egzistencija i jedinstvenost generalisane Gauss-ove kvadraturne formule (1.42) je obezbeđenja uslovom da prvih $2n$ funkcija sistema (1.41) formiraju Chebyshev-ljev sistem na $[a,b]$ (ne postoji linearna kombinacija $a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n$ koja ima $n+1$ različitu nulu na $[a,b]$). Poznato je da su težine $A_1, A_2, \ldots, A_n$ u (1.42) sve pozitivne. Ma, Rokhlin i Wandzura su u [45] predstavili numerički metod za konstrukciju generalisanih kvadraturnih formula za Chebyshev-ljev sistem funkcija $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ na $[a,b]$ koji ima sledeće osobine:

(1) $\phi_k \in C^1[a,b]$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$;

(2) determinante

$$\begin{vmatrix} \phi_0(x_1) & \cdots & \phi_0(x_n) & \phi_0'(x_1) & \cdots & \phi_0'(x_n) \\ \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_1(x_n) & \phi_1'(x_1) & \cdots & \phi_1'(x_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{2n-1}(x_1) & \cdots & \phi_{2n-1}(x_n) & \phi_{2n-1}'(x_1) & \cdots & \phi_{2n-1}'(x_n) \end{vmatrix}$$

su različite od 0 za bilo koje tačke $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ ($x_i \neq x_j$ za $i \neq j$). Takvi sistemi su poznati kao EH (Extended Hermite) sistemi. Međutim, njihov algoritam je slabo uslovljen.

Koristeći teoriju ortogonalnosti za Müntz-ove sisteme, Milovanović i Cvetković su u [55] dali numerički stabilan metod za konstrukciju generalisanih Gauss-ovih kvadratura (1.42) (sa $[a,b] = [0,1]$) tačnih za neke Müntz-ove sisteme funkcija.

Neka je $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots\}$ neopadajući niz realnih brojeva, $\lambda_\nu > -1/2$ za sve $\nu \in \mathbb{N}_0$. Ortogonalni Müntz-Legendre-ov sistem $\{P_0, P_1, \ldots, P_{2n-1}\}$, definisan sa (1.11), je jedan EH sistem. Neka je $\mathrm{d}\mu$ pozitivna mera na $[0,1]$.

Algoritam predstavljen u [55] sastoji se u sledećem.

Polazi se od sistema nelinearnih jednačina

$$\sum_{k=1}^{n} A_k P_\nu(x_k) = \mu_\nu = \int_0^1 P_\nu(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

koji se može napisati u obliku

$$U_n \boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}, \quad V_n \boldsymbol{A} - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0},$$

gde je $\boldsymbol{A} = [A_1\ A_2\ \ldots\ A_n]^\top$, $\boldsymbol{c} = [\mu_0\ \mu_1\ \ldots\ \mu_{n-1}]^\top$ i $\boldsymbol{d} = [\mu_n\ \mu_{n+1}\ \ldots\ \mu_{2n-1}]^\top$. Za rešavanje dobijenih sistema može se primeniti metod Newton–Kantorovich-a.

Neka je $\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \widehat{\boldsymbol{A}}$ i $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}$, gde su $\widehat{\boldsymbol{A}}$ i $\widehat{\boldsymbol{x}}$ jedinstvena rešenja startnog nelinearnog sistema. Metod Newton–Kantorovich-a možemo predstaviti u obliku

$$W_n \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{A} \\ \Delta\boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} \\ V_n\boldsymbol{A} - \boldsymbol{d} \end{bmatrix},$$

gde je

$$W_n = \begin{bmatrix} U_n & Y_n \\ V_n & Z_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^\top,$$

$$U_n = U_n(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & \ldots & P_0(x_n) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & & P_1(x_n) \\ \vdots & & & \\ P_{n-1}(x_1) & P_{n-1}(x_2) & & P_{n-1}(x_n) \end{bmatrix},$$

$$V_n = V_n(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} P_n(x_1) & P_n(x_2) & \dots & P_n(x_n) \\ P_{n+1}(x_1) & P_{n+1}(x_2) & & P_{n+1}(x_n) \\ \vdots & & & \\ P_{2n-1}(x_1) & P_{2n-1}(x_2) & & P_{2n-1}(x_n) \end{bmatrix},$$

$$Y_n = Y_n(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} A_1 P_0'(x_1) & A_2 P_0'(x_2) & \dots & A_n P_0'(x_n) \\ A_1 P_1'(x_1) & A_2 P_1'(x_2) & & A_n P_1'(x_n) \\ \vdots & & & \\ A_1 P_{n-1}'(x_1) & A_2 P_{n-1}'(x_2) & & A_n P_{n-1}'(x_n) \end{bmatrix},$$

$$Z_n = Z_n(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} A_1 P_n'(x_1) & A_2 P_n'(x_2) & \dots & A_n P_n'(x_n) \\ A_1 P_{n+1}'(x_1) & A_2 P_{n+1}'(x_2) & & A_n P_{n+1}'(x_n) \\ \vdots & & & \\ A_1 P_{2n-1}'(x_1) & A_2 P_{2n-1}'(x_2) & & A_n P_{2n-1}'(x_n) \end{bmatrix}.$$

Iterativni proces je

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{x} - \big[V_n U_n^{-1} Y_n - Z_n\big]^{-1} (\boldsymbol{d} - V_n U_n^{-1} \boldsymbol{c}), \\ \widehat{\boldsymbol{A}} &= U_n^{-1} \big[Y_n(\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{c}\big]. \end{aligned}$$

Za dobro odabrane startne vrednosti metod Newton–Kantorovich-a ima kvadratnu konvergenciju.

Za težinsku funkciju w na segmentu $[a, b]$, u [21], Ghizzetti i Ossicini razmatrali su generalisane Gauss-ove kvadraturne formule

$$\int_a^b f(x)\, w(x) \mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j,\nu} f^{(j)}(x_\nu) + R(f), \tag{1.43}$$

takve da je $E(f) = 0 \Rightarrow R(f) = 0$, gde je E linearni diferencijalni operator reda N.

Kvadraturne formule koje su tačne za sve algebarske polinome stepena ne višeg od $\nu - 1$ dobijaju se za diferencijalni operator $E = \dfrac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}x^\nu}$, a kvadraturne formule koje su tačne za sve trigonometrijske polinome stepena ne višeg od ν dobijaju se za diferencijalni operator (reda $2\nu + 1$): $E = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \displaystyle\prod_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + k^2 \right)$ (videti [21, p. 28]).

Prvo pitanje koje se nameće je da li se za fiksiran prirodan broj p, $p \le N - 1$, parametri kvadraturne formule (1.43) mogu izabrati tako da u njoj ne figurišu izvodi $f^{(j)}(x_\nu)$ reda višeg od $N-p-1$, tj. da li postoji kvadraturna formula tipa

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=0}^{N-p-1} A_{j,\nu} f^{(j)}(x_\nu) + R(f), \tag{1.44}$$

takva da važi $E(f) = 0 \Rightarrow R(f) = 0$. Odgovor na to pitanje dat je u sledećoj teoremi ([21, Theorem 2.5.I]).

Teorema 1.17. *Za date čvorove $x_1, \ldots, x_m$, linearni diferencijalni operator E reda N i prirodan broj $p \le N-1$, posmatrajmo sledeći homogeni granični diferencijalni problem*

$$E(f) = 0,\ f^{(j)}(x_\nu) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N-p-1,\ \nu = 1, \ldots, m. \tag{1.45}$$

Ako ovaj problem nema netrivijana rešenja (za $N \le m(N-p)$), tada kvadraturna formula tipa (1.44) *postoji, pri čemu se $m(N-p)-N$ parametara može proizvoljno odabrati. S druge strane, ako problem* (1.45) *ima q linearno nezavisnih rešenja U_r, $r = 1, \ldots, q$, gde je $N - m(N-p) \le q \le p$, tada formula* (1.44) *postoji samo ako je zadovoljeno sledećih q uslova*

$$\int_a^b U_r(x)\,w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad r = 1, \ldots, q. \tag{1.46}$$

U tom slučaju $m(N-p) - N + q$ parametara u formuli (1.44) *može se uzeti proizvoljno.*

Dalje se problem može generalisati tako što se umesto kvadraturne formule (1.44), za fiksirane brojeve $p_\nu \in \mathbb{N}_0$, $\nu = 1, \ldots, m$, pri čemu je $p_\nu \le N-1$, $\nu = 1, \ldots, m$, i bar jedan od brojeva p_ν nije manji od 1, posmatra formula

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=0}^{N-p_\nu-1} A_{j,\nu} f^{(j)}(x_\nu) + R(f), \tag{1.47}$$

takva da važi $E(f) = 0 \Rightarrow R(f) = 0$.

Važi sledeća teorema (videti [21, Problem 2, p. 45], [63]).

Teorema 1.18. *Za date čvorove $x_1, \ldots, x_m$, linearni diferencijalni operator E reda N i nenegativne cele brojeve $p_1, p_2, \ldots, p_m$, $0 \le p_\nu \le N-1$, $\nu = 1, \ldots, m$ $((\exists \nu \in \{1, \ldots, m\})p_\nu \ge 1)$, posmatrajmo sledeći homogeni granični diferencijalni problem*

$$E(f) = 0,\ f^{(j)}(x_\nu) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N-p_\nu-1,\ \nu = 1, \ldots, m. \tag{1.48}$$

Ako ovaj problem nema netrivijalna rešenja (za $N \le mN - \sum_{\nu=1}^m p_\nu$), tada kvadraturna formula tipa (1.47) *postoji, pri čemu se $mN - \sum_{\nu=1}^m p_\nu - N$ parametara može proizvoljno odabrati. S druge strane, ako problem* (1.48) *ima q linearno* *nezavisnih rešenja* U_r, $r = 1, \dots, q$, *gde je* $N - mN - \sum_{\nu=1}^{m} p_\nu \le q \le p_\nu$ *za sve* $\nu = 1, \dots, m$, *tada formula* (1.47) *postoji samo ako je zadovoljeno sledećih* q *uslova*

$$\int_a^b U_r(x)\, w(x) \mathrm{d}x = 0, \quad r = 1, \dots, q. \tag{1.49}$$

U tom slučaju $mN - \sum_{\nu=1}^{m} p_\nu - N + q$ *parametara u formuli* (1.47) *može se uzeti proizvoljno.*

Kao specijalni slučajevi kvadraturnih formula (1.44) i (1.47) dobijaju se i kvadraturne formule (1.38) i (1.39). Tada se uslovi (1.46) i (1.49) svode na uslove s i $\sigma-$ortogonalnosti, tj. na uslove (1.28) i (1.40), respektivno (videti [21]).

Glava 2

Ortogonalni sistemi trigonometrijskih funkcija

U [91] Turetzkii je analizirao kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za sistem trigonometrijskih polinoma

$$\mathcal{T} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}.$$

Pritom se javila potreba za izučavanjem ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena, tj. stepena $k+1/2$, $k \in \mathbb{Z}$, na intervalu $[0, 2\pi)$ u odnosu na neku težinsku funkciju w. Neke osnovne osobine trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena date su u [91]. Oni su detaljno analizirani u [59] i [60], gde je dat i numerički metod za njihovu konstrukciju. Dobijeni rezultati su dalje generalisani na $s-$ i $\sigma-$ortogonalne trigonometrijske polinome polu-celobrojnog stepena.

2.1 Trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena

Trigonometrijske funkcije oblika

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(c_\nu \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x + d_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x \right), \quad c_\nu, d_\nu \in \mathbb{R},\ |c_n| + |d_n| \neq 0, \tag{2.1}$$

zovu se *trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena* $n + 1/2$. Očigledno je

$$A_{n+1/2}(x) = A \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x - x_k}{2} \quad (A \text{ konstanta različita od } 0) \tag{2.2}$$

trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $n + 1/2$. Sledeća lema nam daje i obrat ovog tvrđenja (za dokaz videti [91, §1, Lemma 1.]).

Lema 2.1. *Svaki trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena oblika* (2.1) *može se predstaviti u obliku* (2.2)*, gde je*

$$A = (-1)^n 2^{2n} \mathrm{i}(c_n - \mathrm{i}d_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}/2\sum_{k=0}^{2n} x_k},$$

a $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ *su nule trigonometrijske funkcije* (2.1)*, koje leže u traci* $0 \leq \operatorname{Re} x < 2\pi$.

Označimo sa $\mathcal{T}_n^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}_0$, skup svih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena ne višeg od $n+1/2$, tj. lineal nad $\{\cos(\nu+1/2)x, \sin(\nu+1/2)x : \nu = 0, 1, \ldots, n\}$. Očigledno je dimenzija prostora $\mathcal{T}_n^{1/2}$ jednaka $2n + 2$.

Sa $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, označavaćemo skup svih trigonometrijskih polinoma stepena ne višeg od n, tj. lineal nad $\{\cos \nu x, \sin \nu x : \nu = 0, 1, \ldots, n\}$. Dimenzija prostora $\mathcal{T}_n$ je $2n + 1$.

Veze između trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena i trigonometrijskih polinoma (celobrojnog stepena) daje sledeća lema ([91, §1, Lemma 2]).

Lema 2.2. *Za dati trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena* $n + 1/2$

$$A_{n+1/2}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(c_\nu \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x + d_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x \right), \quad |c_n| + |d_n| \neq 0,$$

svaki trigonometrijski polinom $t_{2n} \in \mathcal{T}_{2n}$ *može se na jedinstven način predstaviti u obliku*

$$t_{2n}(x) = A_{n+1/2}(x) B_{n-1/2}(x) + R_n(x),$$

gde je $B_{n-1/2} \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ *i* $R_n \in \mathcal{T}_n$.

Svaki trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $t \in \mathcal{T}_n^{1/2}$ može se predstaviti pomoću algebarskog polinoma stepena $2n + 1$. Takva reprezentacija data je u sledećoj lemi.

Lema 2.3. *Neka je*

$$A_{n+1/2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(c_k \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x + d_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x \right) \in \mathcal{T}_n^{1/2},$$

i $a_k = c_k - \mathrm{i}d_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. *Tada se* $A_{n+1/2}(x)$ *može predstaviti u obliku*

$$A_{n+1/2}(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x} Q_{2n+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}),$$

gde je $Q_{2n+1}(z)$ *algebarski polinom stepena* $2n + 1$*, dat sa*

$$Q_{2n+1}(z) = \overline{a}_n + \overline{a}_{n-1} z + \cdots + \overline{a}_1 z^{n-1} + \overline{a}_0 z^n + a_0 z^{n+1} + \cdots + a_{n-1} z^{2n} + a_n z^{2n+1}.$$

Dokaz. U skladu sa uvedenim oznakama je

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k+1/2}\right)\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\\
&\quad= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(c_k-\mathrm{i}d_k)\left(\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\mathrm{i}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)=A_{n+1/2}(x).
\end{aligned}$$

Koristeći sledeću očiglednu jednakost

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k+1/2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k+1/2}+\sum_{k=0}^{n}\overline{a}_k\overline{z}^{k+1/2}\right),$$

dobijamo

$$A_{n+1/2}(x)=\frac{1}{2}z^{-n-1/2}\sum_{k=0}^{n}\left(a_k z^{n+1+k}+\overline{a}_k z^{n-k}\right)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}},$$

tj. $A_{n+1/2}(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x}Q_{2n+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$. $\square$

Lako se vidi da je $Q_{2n+1}(z)=z^{2n+1}\overline{Q_{2n+1}(1/\overline{z})}$, tj. polinom $Q_{2n+1}(z)$ je samoinverzan (videti [62, p. 16]). Ako je z nula polinoma $Q_{2n+1}(z)$, onda je $x=\arg(z)$ nula trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}(x)$.

U nastavku, kada to ne dovodi do zabune, nećemo naglašavati da je trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $k+1/2$, već ćemo jednostavno reći trigonometrijski polinom stepena $k+1/2$, $k\in\mathbb{Z}$.

Za trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena

$$A_{n+1/2}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\left(c_\nu\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x+d_\nu\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

jednostavno se dobija sledeće:

$$\begin{aligned}
A_{n+1/2}(x+2\pi)&=\sum_{\nu=0}^{n}\left(c_\nu\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(x+2\pi)+d_\nu\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(x+2\pi)\right)\\
&=\sum_{\nu=0}^{n}\left(-c_\nu\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x-d_\nu\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\right),
\end{aligned}$$

tj.

$$A_{n+1/2}(x+2\pi)=-A_{n+1/2}(x),\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{2.3}$$

2.2 Ortogonalni trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena

U ovom poglavlju dajemo pregled osobina ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena. Većina tih osobina dokazana je u radovima [59] i [60].

Pretpostavimo da je w težinska funkcija, integrabilna i nenegativna na $[0, 2\pi)$, koja ima vrednost nula samo na skupu mere nula.

Za datu težinsku funkciju w, skalarni proizvod funkcija f i g definišemo sa

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, w(x)\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Definicija 2.1. *Sistem* $\{A_{k+1/2}\}$, $A_{k+1/2} \in \mathcal{T}_k^{1/2}$, *je sistem ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena u odnosu na skalarni proizvod* (2.4)*, tj. u odnosu na težinsku funkciju* w *na intervalu* $[0, 2\pi)$*, ako i samo ako je* $(A_{k+1/2}, A_{j+1/2}) = 0$ *za sve* $0 \le j < k$*,* $k \in \mathbb{N}$*.*

Prema definiciji 2.1, $A_{n+1/2}$ je ortogonalni trigonometrijski polinom stepena $n+1/2$ ako je ortogonalan na svakom elementu prostora $\mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ u odnosu na težinsku funkciju w na intervalu $[0, 2\pi)$, tj. ako je

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x)t(x)\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}.$$

Prethodni uslov ortogonalnosti može se zapisati i u obliku

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x) \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x) \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Pošto je dimenzija prostora $\mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ jednaka $2n$, a trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}$ ima $2n+2$ koeficijenata, zaključujemo da $A_{n+1/2}$ nije jedinstveno određen do na multiplikativni faktor kao što je to bio slučaj sa algebarskim ortogonalnim polinomima (poglavlje 1.2). Ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}$ ima dva slobodna koeficijenta i mi ćemo izabrati da to budu c_n i d_n. Koeficijente c_n i d_n zvaćemo *vodećim koeficijentima* trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}$.

U [91, §3.] je dokazana sledeća teorema.

Teorema 2.1. *Trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}$ koji je ortogonalan na intervalu $[0, 2\pi)$ na svim trigonometrijskim polinomima polu-celobrojnog stepena ne višeg od $n - 1/2$ u odnosu na težinsku funkciju w, jedinstveno je određen ako su unapred zadati vodeći koeficijenti c_n i d_n.*

Naravno da ne možemo izabrati vodeće koeficijente $c_n = d_n = 0$, jer u tom slučaju nemamo trigonometrijski polinom stepena $n + 1/2$ već stepena ne višeg od $n - 1/2$.

Napomenimo da umesto da unapred fiksiramo vodeće koeficijente, možemo fiksirati i jednu nulu. Naime, ako $A_{n+1/2}$ predstavimo u obliku (2.2), uslove ortogonalnosti možemo posmatrati i kao sistem sa nepoznatim nulama $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$. Tada imamo $2n$ jednačina sa $2n + 1$ nepoznatih, pa jednu nulu moramo unapred fiksirati.

Specijalno, za izbor vodećih koeficijenata $c_n = 1$, $d_n = 0$, označavaćemo odgovarajući ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena sa $A^C_{n+1/2}$, a za izbor $c_n = 0$ i $d_n = 1$ sa $A^S_{n+1/2}$. Uvedene oznake su sasvim prirodne, jer $A^C_{n+1/2}$ i $A^S_{n+1/2}$ imaju vodeće terme $\cos(n + 1/2)x$ i $\sin(n + 1/2)x$, respektivno. Tada je svaki ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2} \in \mathcal{T}_n^{1/2}$ linearna kombinacija funkcija $A^C_{n+1/2}$ i $A^S_{n+1/2}$. Za razvijene oblike funkcija $A^C_{n+1/2}$ i $A^S_{n+1/2}$ koristićemo sledeće oznake

$$\text{(2.5)} \quad A^C_{n+1/2}(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(c_\nu^{(n)} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x + d_\nu^{(n)} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x\right),$$

$$\text{(2.6)} \quad A^S_{n+1/2}(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(f_\nu^{(n)} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x + g_\nu^{(n)} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

Vodeći koeficijenti su: $c_n^{(n)} = g_n^{(n)} = 1$ i $d_n^{(n)} = f_n^{(n)} = 0$.

Teorema 2.2. *Ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}$ u odnosu na skalarni proizvod (2.4) ima u intervalu $[0, 2\pi)$ tačno $2n + 1$ različitih prostih nula.*

Dokaz. Primetimo najpre da $A_{n+1/2}$ ima na $[0, 2\pi)$ bar jednu nulu neparne višestrukosti, jer ako to ne bi važilo, tada, za $n \in \mathbb{N}$, ne bi bio ispunjen uslov ortogonalnosti

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x) \sin\frac{x}{2}\, w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

jer integrand ne bi menjao znak na $[0, 2\pi)$.

Pretpostavimo da $A_{n+1/2}$ ima $2r - 1$ nulu neparne višestrukosti u $[0, 2\pi)$, gde je $r \leq n$. Označimo te nule sa $y_1, \ldots, y_{2r-1}$ i definišimo

$$t(x) = \prod_{\nu=1}^{2r-1} \sin\frac{x - y_\nu}{2}.$$

Kako je $t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$, zbog uslova ortogonalnosti mora biti

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x) t(x)\, w(x) \mathrm{d}x = 0,$$

što je nemoguće jer integrand ne menja znak na $[0, 2\pi)$.

Pretpostavimo sada da $A_{n+1/2}$ ima $2r$ nula neparne višestrukosti u $[0, 2\pi)$, gde je $r \leq n-1$. Ako te nule označimo sa $y_1, \ldots, y_{2r}$ i definišemo

$$t(x) = \sin \frac{x}{2} \prod_{\nu=1}^{2r} \sin \frac{x - y_\nu}{2},$$

zbog uslova ortogonalnosti (jer je $t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$) važilo bi

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x) t(x)\, w(x) \mathrm{d}x = 0,$$

što je nemoguće jer integrand ne menja znak na $[0, 2\pi)$.

Konačno, pretpostavimo da $A_{n+1/2}(x)$ ima $2n$ nula neparne višestrukosti na $[0, 2\pi)$. Označimo te nule sa $y_1, \ldots, y_{2n}$, pri čemu je $y_1 < \cdots < y_{2n}$. U tom slučaju je sigurno $y_1 \neq 0$, jer bi u suprotnom, uzimajući

$$t(x) = \prod_{\nu=2}^{2n} \sin \frac{x - y_\nu}{2},$$

takođe dobili kontradikciju jer $t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$. Međutim, ni slučaj $y_1 \neq 0$ nije moguć jer, zbog (2.3), važi $A_{n+1/2}(0) = -A_{n+1/2}(2\pi)$, pa $A_{n+1/2}$ mora menjati znak neparan broj puta na $[0, 2\pi)$. $\square$

Sledeća teorema daje vezu ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena u odnosu na skalarni proizvod (2.4) sa Chebyshev-ljevim polinomima.

Teorema 2.3. *Neka je w težinska funkcija na $[0, 2\pi)$, a $\{A_{n+1/2}\}$, gde je*

$$A_{n+1/2}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(c_\nu^{(n)} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x + d_\nu^{(n)} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x \right), \quad |c_n^{(n)}| + |d_n^{(n)}| \neq 0,$$

niz ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena u odnosu na skalarni proizvod (2.4). *Tada, za sve $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n-1$, važi*

$$\begin{aligned} (2.7) \qquad \int_{-1}^{1} &\left(\sum_{\nu=0}^{n} \left(c_\nu^{(n)} T_{2\nu+1}(x) + d_\nu^{(n)} \sqrt{1-x^2}\, U_{2\nu} \right) \right) \times \\ &\times \left(\sum_{\nu=0}^{k} \left(c_\nu^{(k)} T_{2\nu+1}(x) + d_\nu^{(k)} \sqrt{1-x^2}\, U_{2\nu} \right) \right) \frac{w(2 \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

gde su T_ν i U_ν, $\nu \in \mathbb{N}_0$, Chebyshev-ljevi polinomi prve i druge vrste (*dati sa* (1.9)), *respektivno.*

Dokaz. Zbog ortogonalnosti za $A_{n+1/2}$ važi

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x)A_{k+1/2}(x)\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n \neq k.$$

Ako uvedemo smenu $x := 2\arccos x$, koristeći (1.9), tj. $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ i $\sqrt{1-x^2}U_n(x) = \sin((n+1)\arccos x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, dobijamo (2.7). $\square$

2.2.1 Rekurentne relacije

Za razliku od ortogonalnih algebarskih polinoma na realnoj pravoj koji zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju, trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena, ortogonalni u odnosu na skalarni proizvod (2.4) zadovoljavaju petočlane rekurentne relacije.

Za $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ definišimo

$$\begin{aligned} I_\nu^C &= (A_{\nu+1/2}^C, A_{\nu+1/2}^C), \quad & J_{\nu,\mu}^C &= (2\cos x A_{\nu+1/2}^C, A_{\mu+1/2}^C),\\ I_\nu^S &= (A_{\nu+1/2}^S, A_{\nu+1/2}^S), \quad & J_{\nu,\mu}^S &= (2\cos x A_{\nu+1/2}^S, A_{\mu+1/2}^S),\\ I_\nu &= (A_{\nu+1/2}^C, A_{\nu+1/2}^S), \quad & J_{\nu,\mu} &= (2\cos x A_{\nu+1/2}^C, A_{\mu+1/2}^S). \end{aligned}$$

Teorema 2.4. *Trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena $A_{k+1/2}^C(x)$ i $A_{k+1/2}^S(x)$, $k \geq 1$, ortogonalni u odnosu na skalarni proizvod* (2.4)*, zadovoljavaju sledeće petočlane rekurentne relacije:*

$$\begin{aligned} A_{k+1/2}^C(x) &= (2\cos x - \alpha_k^{(1)})A_{k-1/2}^C(x) - \beta_k^{(1)}A_{k-1/2}^S(x)\\ &\qquad - \alpha_k^{(2)}A_{k-3/2}^C(x) - \beta_k^{(2)}A_{k-3/2}^S(x), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} A_{k+1/2}^S(x) &= (2\cos x - \delta_k^{(1)})A_{k-1/2}^S(x) - \gamma_k^{(1)}A_{k-1/2}^C(x)\\ &\qquad - \delta_k^{(2)}A_{k-3/2}^S(x) - \gamma_k^{(2)}A_{k-3/2}^C(x), \end{aligned} \tag{2.9}$$

gde su koeficijenti $\alpha_k^{(j)}, \beta_k^{(j)}, \gamma_k^{(j)}, \delta_k^{(j)}$, $k \geq 1$, $j = 1,2$, rešenja sledećih sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} J_{k-1,k-j}^C &= \alpha_k^{(j)}I_{k-j}^C + \beta_k^{(j)}I_{k-j}, \quad & J_{k-1,k-j} &= \alpha_k^{(j)}I_{k-j} + \beta_k^{(j)}I_{k-j}^S,\\ J_{k-j,k-1} &= \gamma_k^{(j)}I_{k-j}^C + \delta_k^{(j)}I_{k-j}, \quad & J_{k-1,k-j}^S &= \gamma_k^{(j)}I_{k-j} + \delta_k^{(j)}I_{k-j}^S, \end{aligned}$$

i $\alpha_1^{(2)} = \beta_1^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0.$

Dokaz. Kako su trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena $A_{\nu+1/2}^C(x)$ i $A_{\nu+1/2}^S(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, k$, linearno nezavisni, izraz $2\cos x A_{k-1+1/2}^C(x)$ možemo predstaviti u sledećem obliku

$$2\cos x A_{k-1+1/2}^C(x) = A_{k+1/2}^C(x) + \sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\alpha_k^{(k-\nu)}A_{\nu+1/2}^C(x) + \beta_k^{(k-\nu)}A_{\nu+1/2}^S(x)\right).$$

Ako sada obe strane prethodne jednakosti pomnožimo redom sa $w(x)A^C_{\nu+1/2}(x)$ i $w(x)A^S_{\nu+1/2}(x)$ za $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$, i integralimo na $[0, 2\pi)$, zbog ortogonalnosti dobijamo sledeće homogene sisteme linearnih jednačina

$$\alpha_k^{(k-\nu)} I_\nu^C + \beta_k^{(k-\nu)} I_\nu = 0, \quad \alpha_k^{(k-\nu)} I_\nu + \beta_k^{(k-\nu)} I_\nu^S = 0,$$

sa nepoznatim koeficijentima $\alpha_k^{(k-\nu)}, \beta_k^{(k-\nu)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$. Determinante prethodnih sistema su

$$\begin{aligned} D_\nu = &\left(\int_0^{2\pi} \left(A^C_{\nu+1/2}(x)\right)^2 w(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{2\pi} \left(A^S_{\nu+1/2}(x)\right)^2 w(x)\mathrm{d}x\right) \\ &- \left(\int_0^{2\pi} A^C_{\nu+1/2}(x) A^S_{\nu+1/2}(x)\, w(x)\mathrm{d}x\right)^2, \quad \nu = 0, 1, \ldots, k-3. \end{aligned}$$

Da bi pokazali da je $D_\nu \neq 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$, iskoristićemo integralnu nejednakost Cauchy–Schwarz–Bunjakowsky-og (videti [70, p. 45]):

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right), \quad f, g \in L^2[a, b],$$

u kojoj važi znak jednakosti ako i samo ako su funkcije f i g linearno zavisne.

Obzirom da su trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena $A^C_{\nu+1/2}(x)$ i $A^S_{\nu+1/2}(x)$ linearno nezavisni, zaključujemo da je $D_\nu \neq 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$, pa prethodni homogeni sistemi imaju samo trivijalna rešenja $\alpha_k^{(k-\nu)} = \beta_k^{(k-\nu)} = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$. Prema tome, prethodna rekurentna relacija redukuje se na petočlanu rekurentnu relaciju

$$\begin{aligned} 2\cos x A^C_{k-1+1/2}(x) = &A^C_{k+1/2}(x) + \alpha_k^{(1)} A^C_{k-1+1/2}(x) + \beta_k^{(1)} A^S_{k-1+1/2}(x) \\ &+ \alpha_k^{(2)} A^C_{k-2+1/2}(x) + \beta_k^{(2)} A^S_{k-2+1/2}(x), \end{aligned}$$

tj. dobijamo rekurentnu relaciju (2.8).

Ako obe strane prethodne rekurentne relacije pomnožimo sa $w(x)A^C_{k-j+1/2}(x)$ i $w(x)A^S_{k-j+1/2}(x)$, $j = 1, 2$, i integralimo na $[0, 2\pi)$, dobićemo sledeće sisteme linearnih jednačina

$$J^C_{k-1,k-j} = \alpha_k^{(j)} I^C_{k-j} + \beta_k^{(j)} I_{k-j}, \quad J_{k-1,k-j} = \alpha_k^{(j)} I_{k-j} + \beta_k^{(j)} I^S_{k-j}, \quad j = 1, 2,$$

sa nepoznatim koeficijentima $\alpha_k^{(j)}, \beta_k^{(j)}$, $j = 1, 2$. Koristeći opet iste argumente može se pokazati da dobijeni sistemi takođe imaju jedinstvena rešenja.

Analogno se dobija rekurentna relacija (2.9) za $A^S_{k+1/2}(x)$. $\square$

Iz teoreme 2.4 sledi da posmatrani ortogonalni trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena zapravo zadovoljavaju sistem od dve petočlane rekurentne relacije.

Lema 2.4. *Za $n \geq 1$, važe sledeće jednakosti*

$$J_{n,n-1}^C = I_n^C, \quad J_{n,n-1}^S = I_n^S, \quad J_{n,n-1} = J_{n-1,n} = I_n.$$

Dokaz. Koristeći rekurentne relacije (2.8) i (2.9), kao i uslove ortogonalnosti, dobijamo

$$I_n^C = (A_{n+1/2}^C, A_{n+1/2}^C) = (2\cos x A_{n-1+1/2}^C, A_{n+1/2}^C) = J_{n,n-1}^C,$$

i, slično, $I_n^S = J_{n,n-1}^S$. Konačno,

$$I_n = (A_{n+1/2}^C, A_{n+1/2}^S) = (2\cos x A_{n-1+1/2}^C, A_{n+1/2}^S) = J_{n-1,n}. \qquad \square$$

Prema tome, za izračunavanje koeficijenata dobijenih rekurentnih relacija potrebni su nam sledeći integrali: I_n^C, I_n^S, I_n, $J_{n,n}^C$, $J_{n,n}^S$ i $J_{n,n}$. Zato ćemo uvesti sledeće oznake:

$$J_n^C = J_{n,n}^C, \quad J_n^S = J_{n,n}^S, \quad J_n = J_{n,n}.$$

Sada direktno iz teoreme 2.4 i leme 2.4 dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 2.1. *Koeficijetni rekurentnih relacija* (2.8) *i* (2.9) *mogu se računati primenom sledećih formula*

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(1)} &= \frac{I_{k-1}^S J_{k-1}^C - I_{k-1}J_{k-1}}{D_{k-1}}, & \alpha_k^{(2)} &= \frac{I_{k-1}^C I_{k-2}^S - I_{k-1}I_{k-2}}{D_{k-2}}, \\ \beta_k^{(1)} &= \frac{I_{k-1}^C J_{k-1} - I_{k-1}J_{k-1}^C}{D_{k-1}}, & \beta_k^{(2)} &= \frac{I_{k-1}I_{k-2}^C - I_{k-1}^C I_{k-2}}{D_{k-2}}, \\ \gamma_k^{(1)} &= \frac{I_{k-1}^S J_{k-1} - I_{k-1}J_{k-1}^S}{D_{k-1}}, & \gamma_k^{(2)} &= \frac{I_{k-1}I_{k-2}^S - I_{k-1}^S I_{k-2}}{D_{k-2}}, \\ \delta_k^{(1)} &= \frac{I_{k-1}^C J_{k-1}^S - I_{k-1}J_{k-1}}{D_{k-1}}, & \delta_k^{(2)} &= \frac{I_{k-1}^S I_{k-2}^C - I_{k-1}I_{k-2}}{D_{k-2}}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

gde je

$$D_{k-j} = I_{k-j}^C I_{k-j}^S - I_{k-j}^2, \quad j = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Specijalno, kao što je u teoremi 2.4 naglašeno, $\alpha_1^{(2)} = \beta_1^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0$.

Dakle, ako znamo vrednosti integrala I_n^C, I_n^S, I_n, J_n^C, J_n^S i J_n, $n \in \mathbb{N}_0$, tada formulama (2.10) računamo koeficijente petočlanih rekurentnih relacija (2.8) i (2.9). Sada, znajući koeficijente u petočlanim rekurentnim relacijama (2.8) i (2.9), možemo dobiti $A_{n+1/2}^C$ i $A_{n+1/2}^S$ u razvijenim oblicima (2.5) i (2.6), respektivno, tj. možemo izračunati koeficijente $c_\nu^{(k)}, d_\nu^{(k)}, f_\nu^{(k)}, g_\nu^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$.

Teorema 2.5. *Koeficijenti* $c_\nu^{(k)}, d_\nu^{(k)}, f_\nu^{(k)}, g_\nu^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$, *u* (2.5) *i* (2.6) *mogu se računati sledećim formulama:*

$$c_0^{(1)} = 1 - \alpha_1^{(1)}, \quad d_0^{(1)} = -\beta_1^{(1)}, \quad f_0^{(1)} = -\gamma_1^{(1)}, \quad g_0^{(1)} = -1 - \delta_1^{(1)};$$

$$\begin{aligned}
c_0^{(2)} &= 1 + c_0^{(1)} - \alpha_2^{(1)} c_0^{(1)} - \beta_2^{(1)} f_0^{(1)} - \alpha_2^{(2)},\\
d_0^{(2)} &= -d_0^{(1)} - \alpha_2^{(1)} d_0^{(1)} - \beta_2^{(1)} g_0^{(1)} - \beta_2^{(2)},\\
f_0^{(2)} &= f_0^{(1)} - \delta_2^{(1)} f_0^{(1)} - \gamma_2^{(1)} c_0^{(1)} - \gamma_2^{(2)},\\
g_0^{(2)} &= 1 - g_0^{(1)} - \delta_2^{(1)} g_0^{(1)} - \gamma_2^{(1)} d_0^{(1)} - \delta_2^{(2)};
\end{aligned}$$

za $k \geq 2$*:*

$$\begin{aligned}
c_{k-1}^{(k)} &= c_{k-2}^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)}, \quad & d_{k-1}^{(k)} &= d_{k-2}^{(k-1)} - \beta_k^{(1)},\\
f_{k-1}^{(k)} &= f_{k-2}^{(k-1)} - \gamma_k^{(1)}, \quad & g_{k-1}^{(k)} &= g_{k-2}^{(k-1)} - \delta_k^{(1)};
\end{aligned}$$

za $k \geq 3$*:*

$$\begin{aligned}
c_0^{(k)} &= c_0^{(k-1)} + c_1^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} c_0^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} f_0^{(k-1)} - \alpha_k^{(2)} c_0^{(k-2)} - \beta_k^{(2)} f_0^{(k-2)},\\
c_{k-2}^{(k)} &= 1 + c_{k-3}^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} c_{k-2}^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} f_{k-2}^{(k-1)} - \alpha_k^{(2)},\\
d_0^{(k)} &= -d_0^{(k-1)} + d_1^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} d_0^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} g_0^{(k-1)} - \alpha_k^{(2)} d_0^{(k-2)} - \beta_k^{(2)} g_0^{(k-2)},\\
d_{k-2}^{(k)} &= d_{k-3}^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} d_{k-2}^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} g_{k-2}^{(k-1)} - \beta_k^{(2)},\\
f_0^{(k)} &= f_0^{(k-1)} + f_1^{(k-1)} - \gamma_k^{(1)} c_0^{(k-1)} - \delta_k^{(1)} f_0^{(k-1)} - \gamma_k^{(2)} c_0^{(k-2)} - \delta_k^{(2)} f_0^{(k-2)},\\
f_{k-2}^{(k)} &= f_{k-3}^{(k-1)} - \gamma_k^{(1)} c_{k-2}^{(k-1)} - \delta_k^{(1)} f_{k-2}^{(k-1)} - \gamma_k^{(2)},\\
g_0^{(k)} &= -g_0^{(k-1)} + g_1^{(k-1)} - \gamma_k^{(1)} d_0^{(k-1)} - \delta_k^{(1)} g_0^{(k-1)} - \gamma_k^{(2)} d_0^{(k-2)} - \delta_k^{(2)} g_0^{(k-2)},\\
g_{k-2}^{(k)} &= 1 + g_{k-3}^{(k-1)} - \gamma_k^{(1)} d_{k-2}^{(k-1)} - \delta_k^{(1)} g_{k-2}^{(k-1)} - \delta_k^{(2)};
\end{aligned}$$

i za $k \geq 4$*, za* $\nu = 1, \ldots, k-3$*:*

$$\begin{aligned}
c_\nu^{(k)} &= c_{\nu-1}^{(k-1)} + c_{\nu+1}^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} c_\nu^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} f_\nu^{(k-1)} - \alpha_k^{(2)} c_\nu^{(k-2)} - \beta_k^{(2)} f_\nu^{(k-2)},\\
d_\nu^{(k)} &= d_{\nu-1}^{(k-1)} + d_{\nu+1}^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} d_\nu^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} g_\nu^{(k-1)} - \alpha_k^{(2)} d_\nu^{(k-2)} - \beta_k^{(2)} g_\nu^{(k-2)},\\
f_\nu^{(k)} &= f_{\nu-1}^{(k-1)} + f_{\nu+1}^{(k-1)} - \gamma_k^{(1)} c_\nu^{(k-1)} - \delta_k^{(1)} f_\nu^{(k-1)} - \gamma_k^{(2)} c_\nu^{(k-2)} - \delta_k^{(2)} f_\nu^{(k-2)},\\
g_\nu^{(k)} &= g_{\nu-1}^{(k-1)} + g_{\nu+1}^{(k-1)} - \gamma_k^{(1)} d_\nu^{(k-1)} - \delta_k^{(1)} g_\nu^{(k-1)} - \gamma_k^{(2)} d_\nu^{(k-2)} - \delta_k^{(2)} g_\nu^{(k-2)}.
\end{aligned}$$

Dokaz. Zamenjujući $A_{\nu+1/2}^C(x)$ i $A_{\nu+1/2}^S(x)$, $\nu = k-2, k-1, k$, date u razvijenim oblicima (2.5) i (2.6), u rekurentnim relacijama (2.8) i (2.9), izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos(\nu + 1/2)x$ i $\sin(\nu + 1/2)x$, $\nu = 0, 1, \ldots, k$, sa leve i sa desne strane dobijenih jednakosti jednostavno se dobijaju date formule. □

Umesto na intervalu $[0, 2\pi)$ možemo posmatrati ortogonalne trigonometrijske polinome polu-celobrojnog stepena i na bilo kom drugom intervalu dužine 2π.

Lema 2.5. *Ako je $\{A_{n+1/2}\}$ niz ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena na intervalu $[0, 2\pi)$ u odnosu na težinsku funkciju w, tada je $\{\widetilde{A}_{n+1/2}\}$, gde je $\widetilde{A}_{n+1/2} = A_{n+1/2}(x - L)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $L \in \mathbb{R}$, niz ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena na intervalu $[L, 2\pi + L)$ u odnosu na težinsku funkciju $\widetilde{w}(x) = w(x - L)$, $x \in [L, 2\pi + L)$.*

Dokaz. Uvodeći smenu $x := x + L$ u uslovima ortogonalnosti za $A_{n+1/2}$ direktno dobijamo ortogonalnost za $\widetilde{A}_{n+1/2}$. $\square$

Neka su $\widetilde{A}^C_{n+1/2}(x)$ i $\widetilde{A}^S_{n+1/2}(x)$, trigonometrijski polinomi stepena $n + 1/2$, ortogonalni na $[L, 2\pi + L)$ u odnosu na težinsku funkciju $\widetilde{w}$, oblika

$$(2.11)\ \widetilde{A}^C_{n+1/2}(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\widetilde{c}^{(n)}_\nu \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x + \widetilde{d}^{(n)}_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x\right),$$

$$(2.12)\ \widetilde{A}^S_{n+1/2}(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\widetilde{f}^{(n)}_\nu \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x + \widetilde{g}^{(n)}_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

Posmatraćemo sada slučaj kada je $L = -\pi$.

Teorema 2.6. *Trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena $\widetilde{A}^C_{n+1/2}(x)$ i $\widetilde{A}^S_{n+1/2}(x)$, ortogonalni na $[-\pi, \pi)$ u odnosu na težinsku funkciju $\widetilde{w}(x)$, mogu se predstaviti na sledeći način*

$$\widetilde{A}^C_{n+1/2}(x) = (-1)^n A^S_{n+1/2}(x + \pi), \quad \widetilde{A}^S_{n+1/2}(x) = (-1)^{n-1} A^C_{n+1/2}(x + \pi),$$

gde su $A^C_{n+1/2}(x)$ i $A^S_{n+1/2}(x)$ trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena ortogonalni na $[0, 2\pi)$ u odnosu na težinsku funkciju $w(x) = \widetilde{w}(x - \pi)$.

Ako koeficijente petočlanih rekurentnih relacija za težinsku funkciju $\widetilde{w}$ obeležimo sa $\widetilde{\alpha}^{(j)}_k$, $\widetilde{\beta}^{(j)}_k$, $\widetilde{\gamma}^{(j)}_k$, $\widetilde{\delta}^{(j)}_k$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, tada je

$$\widetilde{\alpha}^{(j)}_k = (-1)^j \delta^{(j)}_k, \quad \widetilde{\beta}^{(j)}_k = (-1)^{j-1}\gamma^{(j)}_k, \quad \widetilde{\gamma}^{(j)}_k = (-1)^{j-1}\beta^{(j)}_k, \quad \widetilde{\delta}^{(j)}_k = (-1)^j \alpha^{(j)}_k,$$

gde su $\alpha^{(j)}_k$, $\beta^{(j)}_k$, $\gamma^{(j)}_k$, $\delta^{(j)}_k$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, koeficijenti petočlanih rekurentnih relacija za težinsku funkciju $w(x)$.

Dokaz. Koristeći jednakost $\widetilde{A}_{n+1/2}(x) = A_{n+1/2}(x - L)$, iz leme 2.5 za $L = -\pi$, dobijamo da su

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1} A^C_{n+1/2}(x + \pi) &= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ &+ \sum_{\nu=0}^{n-1}\left((-1)^{n+\nu} c^{(n)}_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x + (-1)^{n+\nu-1} d^{(n)}_\nu \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x\right)\end{aligned}$$

i

$$
\begin{aligned}
(-1)^n A^S_{n+1/2}(x+\pi) &= \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x \\
&+ \sum_{\nu=0}^{n-1}\left((-1)^{n+\nu-1} f_\nu^{(n)} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x + (-1)^{n+\nu} g_\nu^{(n)} \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\right)
\end{aligned}
$$

trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena, ortogonalni u odnosu na težinsku funkciju $\widetilde{w}(x) = w(x+\pi)$, $x \in [-\pi, \pi)$. Dobijeni trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena su zapravo $\widetilde{A}^C_{n+1/2}(x)$ i $\widetilde{A}^S_{n+1/2}(x)$, dati sa (2.11) i (2.12), respektivno. Time smo dokazali prvi deo teoreme. Upoređivanjem odgovarajućih koeficijenata lako se vidi da je

$$
\begin{aligned}
\widetilde{c}_\nu^{(n)} &= (-1)^{n+\nu} g_\nu^{(n)}, & \widetilde{d}_\nu^{(n)} &= (-1)^{n+\nu-1} f_\nu^{(n)}, \\
\widetilde{f}_\nu^{(n)} &= (-1)^{n+\nu-1} d_\nu^{(n)}, & \widetilde{g}_\nu^{(n)} &= (-1)^{n+\nu} c_\nu^{(n)}.
\end{aligned}
$$

Ako u petočlanim rekurentnim relacijama (2.8) i (2.9) stavimo

$$
A^C_{n+1/2}(x) = (-1)^{n-1}\widetilde{A}^S_{n+1/2}(x-\pi) \quad \text{i} \quad A^S_{n+1/2}(x) = (-1)^n \widetilde{A}^C_{n+1/2}(x-\pi),
$$

uz smenu $x := x - \pi$, dobijamo i drugi deo teoreme. $\square$

2.2.2 Simetrične težinske funkcije

Posebno su interesantni slučajevi kada je težinska funkcija simetrična na intervalu $(0, 2\pi)$, tj. kada je

$$
w(x) = w(2\pi - x), \quad x \in (0, 2\pi).
$$

Lema 2.6. *Ako težinska funkcija zadovoljava uslov $w(x) = w(2\pi - x)$, tada je $\beta_k^{(j)} = 0$, $\gamma_k^{(j)} = 0$, $j = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$, i $d_k^{(n)} = 0$, $f_k^{(n)} = 0$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Ako primenimo Gram–Schmidt-ov metod ortogonalizacije na bazu prostora $\mathcal{T}_n^{1/2}$, tj. na

$$
\cos\left(0+\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(0+\frac{1}{2}\right)x, \ldots, \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,
$$

u odnosu na skalarni proizvod (2.4), zaključujemo da se dobijeni sistem ortogonalnih funkcija može predstaviti pomoću dva niza funkcija φ_ν i ψ_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, gde funkcije φ_ν zavise jedino od kosinusnih funkcija, a ψ_ν zavise jedino od sinusnih funkcija, jer za $k, \nu \in \mathbb{N}_0$ imamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\, w(x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^{\pi} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\, w(x)\mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\pi}^{0} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)(2\pi-x) \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2\pi-x)\, w(2\pi-x)(-\mathrm{d}x) \\
&\quad = \int_0^{\pi} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\, w(x)\mathrm{d}x \\
&\qquad - \int_0^{\pi} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\, w(2\pi-x)\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Dobijeni sistem funkcija, pošto je jedinstven, mora biti jednak ortogonalnim trigonometrijskim polinomima polu-celobrojnog stepena $A^C_{\nu+1/2}$ i $A^S_{\nu+1/2}$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, tj. $A^C_{\nu+1/2}$ zavisi samo od kosinusnih funkcija, a $A^S_{\nu+1/2}$ zavisi samo od sinusnih funkcija, što znači da je $d_k^{(\nu)} = 0$ i $f_k^{(\nu)} = 0$, $k \in \{0, 1, \dots, \nu\}$, $\nu = 0, 1, \dots, n$. Zato se naš sistem od dve petočlane rekurentne relacije degeneriše u dve nezavisne tročlane rekurentne relacije, tj. $\beta_k^{(j)} = \gamma_k^{(j)} = 0$, $j = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Dakle, u slučaju kada je težinska funkcija simetrična na $(0, 2\pi)$, rekurentne relacije (2.8) i (2.9) svode se na tročlane rekurentne relacije, a trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena (2.5) i (2.6) svode se na

$$A^C_{n+1/2}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(n)} \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x, \quad c_n^{(n)} = 1; \tag{2.13}$$

$$A^S_{n+1/2}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu^{(n)} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x, \quad g_n^{(n)} = 1. \tag{2.14}$$

Iz formula (2.13) i (2.14) neposredno dobijamo sledeći rezultat.

Lema 2.7. *Za svako $\nu \in \mathbb{N}_0$ važi*

$$A^C_{\nu+1/2}(\pi) = 0, \quad A^S_{\nu+1/2}(0) = 0.$$

Koristeći teoremu 2.3, problem simetričnih težina svodi se na algebarske polinome.

Teorema 2.7. *Za simetričnu težinsku funkciju $w(x)$, $x \in (0, 2\pi)$, važi*

$$\int_{-1}^{1} C_{2n+1}(x) C_{2k+1}(x) \frac{w(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 0, \quad C_{2n+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(n)} T_{2\nu+1}(x)$$

i

$$\int_{-1}^{1} S_{2n}(x)S_{2k}(x)\sqrt{1-x^2}\, w(2\arccos x)\mathrm{d}x = 0, \quad S_{2n}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu^{(n)} U_{2\nu}(x),$$

za sve $0 \le k \le n-1$, $n \in \mathbb{N}$. *Polinomi* $C_{2n+1}(x)$ *i* $S_{2n}(x)$ *zadovoljavaju sledeće tročlane rekurentne relacije*

$$C_{2n+1}(x) = (4x^2 - 2 - \alpha_n^{(1)})C_{2n-1}(x) - \alpha_n^{(2)} C_{2n-3}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1^{(2)} = 0,$$
$$S_{2n}(x) = (4x^2 - 2 - \delta_n^{(1)})S_{2n-2}(x) - \delta_n^{(2)} S_{2n-4}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \delta_1^{(2)} = 0,$$

gde je $C_1(x) = x$ *i* $S_0(x) = 1$.

Dokaz. Prvi deo teoreme dobija se primenom teoreme 2.3 na nizove $A_{k+1/2}^C$ i $A_{k+1/2}^S$, $k = 0, 1, \dots, n$, imajući u vidu da su oni dati u razvijenom obliku formulama (2.13) i (2.14), respektivno.

Smenom $x := 2\arccos x$ u tročlanoj rekurentnoj relaciji za polinome C_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}$, i korišćenjem jednakosti $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$, dobijamo upravo ono što se tvrdi u teoremi. Sličan dokaz može se izvesti i za niz S_{2n}, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ako težinska funkcija $w(x)$, $x \in [0, 2\pi)$, zadovoljava $w(x) = w(2\pi - x)$, tada težinska funkcija $\widetilde{w}(x) = w(x + \pi)$, $x \in (-\pi, \pi)$, zadovoljava $\widetilde{w}(x) = \widetilde{w}(-x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, tj. funkcija $\widetilde{w}$ je parna u svom domenu. Prema tome, ako je težinska funkcija $\widetilde{w}$ parna na $(-\pi, \pi)$, koristeći lemu 2.6 za $\widetilde{A}_{n+1/2}^C$ i $\widetilde{A}_{n+1/2}^S$ dobijamo da za sve $n \in \mathbb{N}$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, u (2.11) i (2.12) važi $\widetilde{d}_\nu^{(n)} = 0$ i $\widetilde{f}_\nu^{(n)} = 0$, respektivno.

Teorema 2.8. *Za bilo koju parnu težinsku funkciju* $\widetilde{w}(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, *za sve* $0 \le k \le n-1$, $n \in \mathbb{N}$, *važi*

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{C}_n(x)\widetilde{C}_k(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, \widetilde{w}(\arccos x)\mathrm{d}x = 0,$$

i

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{S}_n(x)\widetilde{S}_k(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, \widetilde{w}(\arccos x)\mathrm{d}x = 0,$$

gde je

$$\widetilde{C}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \widetilde{c}_\nu^{(n)} \big(T_\nu(x) - (1-x)U_{\nu-1}(x)\big)$$

i

$$\widetilde{S}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \widetilde{g}_\nu^{(n)} \big(T_\nu(x) + (1+x)U_{\nu-1}(x)\big).$$

Algebarski polinomi $\widetilde{C}_n$ *i* $\widetilde{S}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *zadovoljavaju tročlane rekurentne relacije*

$$\widetilde{C}_n(x) = (2x - \widetilde{\alpha}_n^{(1)})\widetilde{C}_{n-1}(x) - \widetilde{\alpha}_n^{(2)}\widetilde{C}_{n-2}(x), \quad \widetilde{\alpha}_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{C}_0 = 1,$$
$$\widetilde{S}_n(x) = (2x - \widetilde{\delta}_n^{(1)})\widetilde{S}_{n-1}(x) - \widetilde{\delta}_n^{(2)}\widetilde{S}_{n-2}(x), \quad \widetilde{\delta}_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{S}_0 = 1.$$

Dokaz. Pošto je $\widetilde{w}(x)$ parna funkcija, iz uslova ortogonalnosti za $\widetilde{A}^C_{n+1/2}$ zaključujemo da važi

$$\int_0^\pi \widetilde{A}^C_{n+1/2}(x)\widetilde{A}^C_{k+1/2}(x)\,\widetilde{w}(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n,k \in \mathbb{N}, \quad n > k.$$

Uvodeći smenu $x := \arccos x$, dobijamo

$$\int_{-1}^1 \widetilde{A}^C_{n+1/2}(\arccos x)\widetilde{A}^C_{k+1/2}(\arccos x)\frac{\widetilde{w}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 0. \tag{2.15}$$

Lako se vidi da je

$$\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}T_k(x) - \sqrt{\frac{1-x}{2}}\sqrt{1-x^2}U_{k-1}(x),$$

pa je

$$\widetilde{A}^C_{n+1/2}(\arccos x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}\sum_{\nu=0}^n \widetilde{c}^{(k)}_\nu\big(T_\nu(x) - (1-x)U_{\nu-1}(x)\big).$$

Zamenjujući dobijene formule u (2.15), nakon elementarnih transformacija, dobijamo prvo tvrđenje.

Drugo tvrđenje može se dokazati na isti način, koristeći $\widetilde{A}^S_{n+1/2}$ i sledeću jednostavnu jednakost

$$\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}T_k(x) + \sqrt{\frac{1+x}{2}}\sqrt{1-x^2}U_{k-1}(x).$$

Za dokaze odgovarajućih rekurentnih relacija treba samo u rekurentnim relacijama za $\widetilde{A}^C_{n+1/2}$ i $\widetilde{A}^S_{n+1/2}$ uvesti smenu $x := \arccos x$. □

2.2.3 Eksplicitne formule

Za konstrukciju trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena $A^C_{n+1/2}$ i $A^S_{n+1/2}$, $n \in \mathbb{N}$, ortogonalnih na $[0, 2\pi)$ u odnosu na težinsku funkciju w, ključno je poznavanje koeficijenata rekurentnih relacija (2.8) i (2.9). Kao što smo već videli u odeljku 2.2.1, koeficijenti rekurentnih relacija se mogu računati formulama (2.10), za šta su nam potrebni integrali I^C_n, I^S_n, I_n, J^C_n, J^S_n i J_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

U ovom odeljku ćemo za neke specijalne težinske funkcije izvesti eksplicitne formule za koeficijente $\alpha^{(j)}_k$, $\beta^{(j)}_k$, $\gamma^{(j)}_k$, $\delta^{(j)}_k$, $j = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$, rekurentnih relacija (2.8) i (2.9), kao i za integrale I^C_k, I^S_k, I_k, J^C_k, J^S_k, J_k, $k \in \mathbb{N}_0$, i za koeficijente $c^{(k)}_\nu$, $d^{(k)}_\nu$, $f^{(k)}_\nu$, $g^{(k)}_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$ ($c^{(k)}_k = g^{(k)}_k = 1$, $d^{(k)}_k = f^{(k)}_k = 0$).

Težinska funkcija $w_m(x) = 1 + \sin mx$, $m \in \mathbb{N}$

Kada je težinska funkcija $w_m(x) = 1 + \sin mx$, $m \in \mathbb{N}$, za dalji rad potrebni su nam sledeći integrali ($\delta_{\nu,\mu}$ je Kronecker-ova delta funkcija, $k, \ell \in \mathbb{N}_0$):

(2.16)

$$\int_0^{2\pi} \cos(k+1/2)x\cos(\ell+1/2)x\, w_m(x)\mathrm{d}x = \pi\delta_{k,\ell},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(k+1/2)x\sin(\ell+1/2)x\, w_m(x)\mathrm{d}x = \pi\delta_{k,\ell},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k+1/2)x\sin(\ell+1/2)x\, w_m(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\delta_{k,\ell-m}+\delta_{k,m-\ell-1}-\delta_{k,\ell+m}),\ k \geq 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(x/2)\sin(\ell+1/2)x\, w_m(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\delta_{1,m-\ell}+\delta_{0,\ell-m}),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\cos(k+1/2)x\cos(\ell+1/2)x\, w_m(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\delta_{k,\ell\pm 1},\ k \geq 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\cos(x/2)\cos(\ell+1/2)x\, w_m(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\delta_{0,\ell}+\frac{\pi}{2}\delta_{1,\ell},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\sin(k+1/2)x\sin(\ell+1/2)x\, w_m(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\delta_{k,\ell\pm 1},\ k \geq 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\sin(x/2)\sin(\ell+1/2)x\, w_m(x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\delta_{0,\ell}+\frac{\pi}{2}\delta_{1,\ell},$$

i

$$\int_0^{2\pi} \cos x\cos(k+1/2)x\sin(\ell+1/2)x\, w_1(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}(\delta_{k,1-\ell}+\delta_{k,\ell-2}-\delta_{k,\ell+2}),$$

za $m > 1$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\cos(k+1/2)x\sin(\ell+1/2)x\, w_m(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4}(\delta_{k,m-\ell}+\delta_{k,m-\ell-2}+\delta_{k,\ell-m\pm 1}-\delta_{k,\ell+m\pm 1}).$$

Očigledno je da slučajeve $m = 1$, $m > 1$ neparno i m parno moramo posebno analizirati.

Teorema 2.9. *Za težinsku funkciju $w_1(x) = 1 + \sin x$ koeficijenti rekurentnih relacija* (2.8) *i* (2.9) *dati su sledećim formulama* ($k \in \mathbb{N}$)*:*

(2.17)
$$\alpha_k^{(1)} = -\delta_k^{(1)} = (-1)^{k+1}\frac{4k}{(2k-1)(2k+1)},\quad \alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = 1\ (k > 1),$$
$$\beta_k^{(1)} = -\gamma_k^{(1)} = \frac{-2}{(2k-1)(2k+1)},\quad \beta_k^{(2)} = \gamma_k^{(2)} = (-1)^{k+1}\frac{2}{2k-1}\ (k > 1),$$
$$\alpha_1^{(2)} = \beta_1^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0.$$

Dokaz. Da bi dokazali teoremu moramo dokazati da važe sledeće eksplicitne formule za integrale ($\nu \in \mathbb{N}_0$):

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(\nu+1)\pi}{2\nu+1}, \; J_\nu^C = -J_\nu^S = \frac{(-1)^\nu \pi}{2\nu+1}, \; I_\nu = \frac{(-1)^\nu \pi}{2(2\nu+1)}, \; J_\nu = 0; \tag{2.18}$$

kao i eksplicitne formule za koeficijente u (2.5) i (2.6):
za neparne k

$$\begin{aligned}
c_{2i}^{(k)} &= -g_{2i}^{(k)} = (-1)^{[k/2]+1+i}\frac{k-2i}{2k+1}, \quad i = 0,1,\dots,[k/2],\\
c_{2i-1}^{(k)} &= g_{2i-1}^{(k)} = (-1)^{[k/2]+1+i}\frac{k+2i}{2k+1}, \quad i = 1,\dots,[k/2],\\
d_{2i}^{(k)} &= -f_{2i}^{(k)} = (-1)^{[k/2]+i}\frac{k+1+2i}{2k+1}, \quad i = 0,1,\dots,[k/2],\\
d_{2i-1}^{(k)} &= f_{2i-1}^{(k)} = (-1)^{[k/2]+1+i}\frac{k+1-2i}{2k+1}, \quad i = 1,\dots,[k/2],
\end{aligned}$$

i za parne k

$$\begin{aligned}
c_{2i}^{(k)} &= g_{2i}^{(k)} = (-1)^{k/2+i}\frac{k+1+2i}{2k+1}, \quad i = 0,1,\dots,k/2,\\
c_{2i-1}^{(k)} &= -g_{2i-1}^{(k)} = (-1)^{k/2+i}\frac{k+1-2i}{2k+1}, \quad i = 1,\dots,k/2,\\
d_{2i}^{(k)} &= f_{2i}^{(k)} = (-1)^{k/2+1+i}\frac{k-2i}{2k+1}, \quad i = 0,1,\dots,k/2,\\
d_{2i-1}^{(k)} &= -f_{2i-1}^{(k)} = (-1)^{k/2+i}\frac{k+2i}{2k+1}, \quad i = 1,\dots,k/2.
\end{aligned}$$

Dokazaćemo sva tvrđenja matematičkom indukcijom. Direktnim izračunavanjem, korišćenjem teorema 2.4 i 2.5, proveravamo da važe formule (2.18) za $\nu = 0$; formule za koeficijente $\alpha_1^{(1)}$, $\beta_1^{(1)}$, $\gamma_1^{(1)}$ i $\delta_1^{(1)}$; formule za koeficijente $c_0^{(1)}$, $d_0^{(1)}$, $f_0^{(1)}$ i $g_0^{(1)}$; kao i (2.18) za $\nu = 1$.

Pretpostavimo da su sve date eksplicitne formule tačne za bilo koja dva uzastopna nenegativna cela broja $k-2$ i $k-1$. Polazeći od formula (2.18) za $\nu = k-2, k-1$, $k \geq 2$, direktnim izračunavanjem (koristeći formule (2.10)) dobijamo koeficijente (2.17). Naime, tada je

$$D_{k-1} = \left(\frac{k\pi}{2k-1}\right)^2 - \frac{\pi^2}{4(2k-1)^2} = \frac{\pi^2(2k+1)}{4(2k-1)}, \quad D_{k-2} = \frac{\pi^2(2k-1)}{4(2k-3)},$$

pa je

$$\begin{aligned}
\alpha_k^{(1)} &= \frac{I_{k-1}^S J_{k-1}^C - I_{k-1}J_{k-1}}{D_{k-1}} = \frac{I_{k-1}^S J_{k-1}^C}{D_{k-1}}\\
&= \frac{k\pi}{2k-1}\cdot\frac{(-1)^{k-1}\pi}{2k-1}\cdot\frac{4(2k-1)}{\pi^2(2k+1)} = \frac{(-1)^{k-1}4k}{(2k-1)(2k+1)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_k^{(2)} &= \frac{I_{k-1}^C I_{k-2}^S - I_{k-1} I_{k-2}}{D_{k-2}} \\
&= \left(\frac{k\pi}{2k-1} \cdot \frac{(k-1)\pi}{2k-3} - \frac{(-1)^{k-1}\pi}{2(2k-1)} \cdot \frac{(-1)^{k-2}\pi}{2(2k-3)} \right) \frac{4(2k-3)}{\pi^2(2k-1)} = 1, \\
\beta_k^{(1)} &= \frac{I_{k-1}^C J_{k-1} - I_{k-1} J_{k-1}^C}{D_{k-1}} = -\frac{I_{k-1} J_{k-1}^C}{D_{k-1}} \\
&= -\frac{(-1)^{k-1}\pi}{2(2k-1)} \cdot \frac{(-1)^{k-1}\pi}{2k-1} \cdot \frac{4(2k-1)}{\pi^2(2k+1)} = \frac{-2}{(2k-1)(2k+1)}, \\
\beta_k^{(2)} &= \frac{I_{k-1} I_{k-2}^C - I_{k-1}^C I_{k-2}}{D_{k-2}} \\
&= \left(\frac{(-1)^{k-1}\pi}{2(2k-1)} \cdot \frac{(k-1)\pi}{2k-3} - \frac{k\pi}{2k-1} \cdot \frac{(-1)^{k-2}\pi}{2(2k-3)} \right) \cdot \frac{4(2k-3)}{\pi^2(2k-1)} \\
&= (-1)^{k-1} \left(\frac{k-1}{2k-1} - \frac{-k}{2k-1} \right) \frac{2}{2k-1} = (-1)^{k-1} \frac{2}{2k-1}, \\
\gamma_k^{(1)} &= \frac{I_{k-1}^S J_{k-1} - I_{k-1} J_{k-1}^S}{D_{k-1}} = -\frac{I_{k-1} J_{k-1}^S}{D_{k-1}} = -\beta_k^{(1)}, \\
\delta_k^{(1)} &= \frac{I_{k-1}^C J_{k-1}^S - I_{k-1} J_{k-1}}{D_{k-1}} = \frac{I_{k-1}^C J_{k-1}^S}{D_{k-1}} = -\alpha_k^{(1)}, \\
\gamma_k^{(2)} &= \frac{I_{k-1} I_{k-2}^S - I_{k-1}^S I_{k-2}}{D_{k-2}} = \beta_k^{(2)}, \\
\delta_k^{(2)} &= \frac{I_{k-1}^S I_{k-2}^C - I_{k-1} I_{k-2}}{D_{k-2}} = \alpha_k^{(2)}.
\end{aligned}
$$

Zamenjujući tako dobijene koeficijente rekurentnih relacija u formulama datim u teoremi 2.5, posle elementarnih transformacija dobijamo date formule za $c_i^{(k)}$, $d_i^{(k)}$, $f_i^{(k)}$, $g_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, ($c_k^{(k)} = g_k^{(k)} = 1$ i $d_k^{(k)} = f_k^{(k)} = 0$). Na primer, ako je k paran broj, tada je $[(k-1)/2] = k/2 - 1$ i dobijamo

$$
\begin{aligned}
c_0^{(k)} &= c_0^{(k-1)} + c_1^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} c_0^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} f_0^{(k-1)} - \alpha_k^{(2)} c_0^{(k-2)} - \beta_k^{(2)} f_0^{(k-2)} \\
&= (-1)^{k/2} \frac{k-1}{2k-1} + (-1)^{k/2+1} \frac{k+1}{2k-1} + (-1)^{k/2} \frac{4k(k-1)}{(2k-1)^2(2k+1)} \\
&\quad + (-1)^{k/2} \frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)} - (-1)^{k/2-1} \frac{k-1}{2k-3} \\
&\quad + (-1)^{k/2} \frac{2(k-2)}{(2k-1)(2k-3)} = (-1)^{k/2} \frac{k+1}{2k+1} \\
c_{k-1}^{(k)} &= c_{k-2}^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} \\
&= (-1)^{k/2-1+1+k/2-1} \frac{k-1-2(k/2-1)}{2(k-1)+1} - \frac{(-1)^{k+1} 4k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{k-2}^{(k)} &= 1 + c_{k-3}^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} c_{k-2}^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} f_{k-2}^{(k-1)} - \alpha_k^{(2)} \\
&= 1 - \frac{2k-3}{2k-1} - \frac{4k}{(2k-1)^2(2k+1)} - \frac{2(k+k-2)}{(2k-1)^2(2k+1)} - 1 = -\frac{2k-1}{2k+1},
\end{aligned}
$$

i za sve $i = 1, \ldots, [(k-3)/2]$

$$
\begin{aligned}
c_{2i-1}^{(k)} &= c_{2i-2}^{(k-1)} + c_{2i}^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} c_{2i-1}^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} f_{2i-1}^{(k-1)} - \alpha_k^{(2)} c_{2i-1}^{(k-2)} - \beta_k^{(2)} f_{2i-1}^{(k-2)} \\
&= (-1)^{k/2+i-1} \frac{k-2i+1}{2k-1} + (-1)^{k/2+i} \frac{k-1-2i}{2k-1} \\
&\quad + (-1)^{k/2+i} \frac{4k(k-1+2i)}{(2k-1)^2(2k+1)} + (-1)^{k/2+i} \frac{2(k-2i)}{(2k-1)^2(2k+1)} \\
&\quad - (-1)^{k/2-1+i} \frac{k-1-2i}{2k-3} + (-1)^{k/2+i} \frac{2(k-2+2i)}{(2k-1)(2k-3)} \\
&= (-1)^{k/2+i} \frac{k+1-2i}{2k+1}, \\
c_{2i}^{(k)} &= c_{2i-1}^{(k-1)} + c_{2i+1}^{(k-1)} - \alpha_k^{(1)} c_{2i}^{(k-1)} - \beta_k^{(1)} f_{2i}^{(k-1)} - \alpha_k^{(2)} c_{2i}^{(k-2)} - \beta_k^{(2)} f_{2i}^{(k-2)} \\
&= (-1)^{k/2+i} \frac{k-1+2i}{2k-1} + (-1)^{k/2+i+1} \frac{k+1+2i}{2k-1} \\
&\quad + (-1)^{k/2+i} \frac{4k(k-1-2i)}{(2k-1)^2(2k+1)} + (-1)^{k/2+i} \frac{2(k+2i)}{(2k-1)^2(2k+1)} \\
&\quad - (-1)^{k/2-1+i} \frac{k-1+2i}{2k-3} + (-1)^{k/2+i} \frac{2(k-2-2i)}{(2k-1)(2k-3)} \\
&= (-1)^{k/2+i} \frac{k+1+2i}{2k+1}.
\end{aligned}
$$

Analogno možemo izvesti formule za $c_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, kada je k neparan broj, a takođe i formule za $d_i^{(k)}, f_i^{(k)}, g_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $k \in \mathbb{N}$.

Da bi dovršili dokaz teoreme treba samo izvesti formule (2.18) za $\nu = k$ koristeći date eksplicitne formule za koeficijente $c_i^{(k)}$, $d_i^{(k)}$, $f_i^{(k)}$, $g_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Koristeći (2.16) imamo

$$
\begin{aligned}
I_k^C &= \pi \left(1 + c_0^{(k)} d_0^{(k)}\right) + \pi \sum_{\nu=0}^{k-1} \left({c_\nu^{(k)}}^2 + {d_\nu^{(k)}}^2\right) + \pi \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(c_\nu^{(k)} d_{\nu+1}^{(k)} - c_{\nu+1}^{(k)} d_\nu^{(k)}\right), \\
I_k^S &= \pi \left(1 + f_0^{(k)} g_0^{(k)}\right) + \pi \sum_{\nu=0}^{k-1} \left({f_\nu^{(k)}}^2 + {g_\nu^{(k)}}^2\right) + \pi \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(f_\nu^{(k)} g_{\nu+1}^{(k)} - f_{\nu+1}^{(k)} g_\nu^{(k)}\right), \\
I_k &= \frac{\pi}{2} \left(c_0^{(k)} g_0^{(k)} + f_0^{(k)} d_0^{(k)}\right) + \pi \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(c_\nu^{(k)} f_\nu^{(k)} + d_\nu^{(k)} g_\nu^{(k)}\right) \\
&\quad + \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(c_\nu^{(k)} g_{\nu+1}^{(k)} + f_\nu^{(k)} d_{\nu+1}^{(k)}\right) - \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(c_{\nu+1}^{(k)} g_\nu^{(k)} + f_{\nu+1}^{(k)} d_\nu^{(k)}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_k^C &= \pi\left(c_0^{(k)^2} - d_0^{(k)^2} + c_0^{(k)}d_1^{(k)} + d_0^{(k)}c_1^{(k)}\right)\\
&\quad + 2\pi\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(c_\nu^{(k)}c_{\nu+1}^{(k)} + d_\nu^{(k)}d_{\nu+1}^{(k)}\right) + \pi\sum_{\nu=0}^{k-2}\left(c_\nu^{(k)}d_{\nu+2}^{(k)} - c_{\nu+2}^{(k)}d_\nu^{(k)}\right),\\
J_k^S &= \pi\left(f_0^{(k)^2} - g_0^{(k)^2} + f_0^{(k)}g_1^{(k)} + g_0^{(k)}f_1^{(k)}\right)\\
&\quad + 2\pi\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(f_\nu^{(k)}f_{\nu+1}^{(k)} + g_\nu^{(k)}g_{\nu+1}^{(k)}\right) + \pi\sum_{\nu=0}^{k-2}\left(f_\nu^{(k)}g_{\nu+2}^{(k)} - f_{\nu+2}^{(k)}g_\nu^{(k)}\right),\\
J_k &= \pi\left(c_0^{(k)}f_0^{(k)} - d_0^{(k)}g_0^{(k)}\right) + \frac{\pi}{2}\left(c_0^{(k)}g_1^{(k)} + c_1^{(k)}g_0^{(k)} + f_0^{(k)}d_1^{(k)} + f_1^{(k)}d_0^{(k)}\right)\\
&\quad + \pi\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(c_\nu^{(k)}f_{\nu+1}^{(k)} + g_\nu^{(k)}d_{\nu+1}^{(k)} + g_{\nu+1}^{(k)}d_\nu^{(k)} + c_{\nu+1}^{(k)}f_\nu^{(k)}\right)\\
&\quad + \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{k-2}\left(c_\nu^{(k)}g_{\nu+2}^{(k)} - c_{\nu+2}^{(k)}g_\nu^{(k)} + f_\nu^{(k)}d_{\nu+2}^{(k)} - f_{\nu+2}^{(k)}d_\nu^{(k)}\right);
\end{aligned}
$$

Zamenjujući ovde eksplicitne formule za $c_i^{(k)}$, $d_i^{(k)}$, $f_i^{(k)}$, $g_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, dobijamo (2.18):

$$
\begin{aligned}
I_k &= \frac{(-1)^{k+1}\pi}{(2k+1)^2}2\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)(k+1+i)\\
&\quad + \frac{(-1)^k\pi}{2(2k+1)^2}\left(2\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)(k+i) - k^2\right)\\
&\quad + \frac{(-1)^k\pi}{2(2k+1)^2}\left(2\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)(k+2+i) + (k+1)^2\right)\\
&= \frac{(-1)^{k+1}\pi}{(2k+1)^2}\frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)\\
&\quad + \frac{(-1)^k\pi}{2(2k+1)^2}\left(\frac{2}{6}k(k+1)(4k-1) - k^2\right)\\
&\quad + \frac{(-1)^k\pi}{2(2k+1)^2}\left(\frac{2}{6}k(k+1)(4k+5) + (k+1)^2\right) = (-1)^k\frac{\pi}{2(2k+1)},\\
I_k^C = I_k^S &= \frac{\pi}{(2k+1)^2}\sum_{i=0}^{2k+1}i^2 - \frac{\pi}{(2k+1)^2}\sum_{i=0}^{2k}i(i+1)\\
&= \frac{\pi}{(2k+1)^2}\frac{1}{6}(2k+1)(2k+2)(4k+3)\\
&\quad - \frac{\pi}{(2k+1)^2}\frac{1}{3}2k(2k+1)(2k+2) = \frac{\pi(k+1)}{2k+1}.
\end{aligned}
$$

Na sličan način dobijamo i formule za integrale J_k^C, J_k^S i J_k. $\square$

Teorema 2.10. *Za težinsku funkciju* $w_m(x) = 1 + \sin mx$, *gde je* $m \geq 3$ *neparan broj, koeficijenti rekurentnih relacija* (2.8) *i* (2.9) *dati su sledećim eksplicitnim formulama* ($\ell \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}$)*:*

$$\alpha_1^{(1)} = -\delta_1^{(1)} = 1,\ \alpha_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0,$$

za $k = \ell m,\ \ell \geq 1$*:* $\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = 1,\ \ \alpha_k^{(1)} = -\delta_k^{(1)} = \dfrac{(-1)^{\ell+1}}{2\ell+1},$

za $k = \ell m + 1,\ \ell \geq 1$*:*

$$\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = \frac{(2\ell+1)^2 - 1}{(2\ell+1)^2}, \quad \alpha_k^{(1)} = -\delta_k^{(1)} = \frac{(-1)^\ell}{2\ell+1},$$

za sve ostale vrednosti $k > 1$ *važi* $\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = 1,\ \alpha_k^{(1)} = \delta_k^{(1)} = 0,$

za $k = [m/2] + \ell m + 1$*:* $\beta_k^{(2)} = \gamma_k^{(2)} = \dfrac{(-1)^\ell}{2(\ell+1)},$

za $k = [m/2] + \ell m + 2$*:* $\beta_k^{(2)} = \gamma_k^{(2)} = \dfrac{(-1)^{\ell+1}}{2(\ell+1)},$

za sve ostale vrednosti k *važi* $\beta_k^{(2)} = \gamma_k^{(2)} = 0$, *dok za sve* $k \in \mathbb{N}$ *važi* $\beta_k^{(1)} = \gamma_k^{(1)} = 0.$

Dokaz. Koraci u dokazu ove teoreme su isti kao koraci u dokazu teoreme 2.9.

Istovremeno sa formulama za koeficijente rekurentnih relacija, dokazujemo da važe sledeće formule za integrale:

za $\nu = \ell m$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(\ell+1)\pi}{2\ell+1}, \quad I_\nu = J_\nu = 0, \quad J_\nu^C = -J_\nu^S = (-1)^\ell \frac{(\ell+1)\pi}{(2\ell+1)^2},$$

za $\nu = \ell m + [m/2]$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(\ell+1)\pi}{2\ell+1}, \quad I_\nu = (-1)^\ell \frac{\pi}{2(2\ell+1)}, \quad J_\nu = J_\nu^C = J_\nu^S = 0,$$

za $\nu = \ell m - 1,\ \ell \geq 1$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(2\ell+1)\pi}{4\ell}, \quad I_\nu = J_\nu = 0, \quad J_\nu^C = -J_\nu^S = (-1)^{\ell+1} \frac{\pi}{4\ell},$$

u slučaju $m > 3$, za $\nu = \ell m + 1, \ldots, \ell m + [m/2] - 1$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(\ell+1)\pi}{2\ell+1}, \quad I_\nu = J_\nu = J_\nu^C = J_\nu^S = 0,$$

i za $\nu = \ell m + [m/2] + 1, \ldots, (\ell+1)m - 2$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(2\ell+3)\pi}{4(\ell+1)}, \quad I_\nu = J_\nu = J_\nu^C = J_\nu^S = 0;$$

kao i za koeficijente reprezentacija (2.5) i (2.6):

za $k = \ell m + p$, $p = 0, 1, \ldots, [m/2]$

$$c_{k-2jm}^{(k)} = g_{k-2jm}^{(k)} = (-1)^j \frac{2\ell+1-2j}{2\ell+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, [\ell/2],$$

$$c_{k-2jm-(2p+1)}^{(k)} = -g_{k-2jm-(2p+1)}^{(k)} = (-1)^{\ell+j} \frac{2j+1}{2\ell+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, [(\ell-1)/2],$$

$$d_{k-(2j+1)m}^{(k)} = -f_{k-(2j+1)m}^{(k)} = (-1)^j \frac{2\ell-2j}{2\ell+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, [(\ell-1)/2],$$

$$d_{k-(2j+1)m-(2p+1)}^{(k)} = f_{k-(2j+1)m-(2p+1)}^{(k)} = (-1)^{\ell+j} \frac{2(j+1)}{2\ell+1}, \ j = 0, 1, \ldots, [\ell/2]-1;$$

za $k = \ell m - p$, $\ell \geq 1$, $p = 1, \ldots, [m/2]$

$$c_{k-2jm}^{(k)} = g_{k-2jm}^{(k)} = (-1)^j \frac{\ell-j}{\ell}, \quad j = 0, 1, \ldots, [(\ell-1)/2],$$

$$c_{k-2jm+(2p-1)}^{(k)} = -g_{k-2jm+(2p-1)}^{(k)} = (-1)^{\ell+j} \frac{j}{\ell}, \quad j = 1, \ldots, [\ell/2],$$

$$d_{k-(2j+1)m}^{(k)} = -f_{k-(2j+1)m}^{(k)} = (-1)^j \frac{2\ell-(2j+1)}{2\ell}, \quad j = 0, 1, \ldots, [\ell/2] - 1,$$

$$d_{k-(2j+1)m+(2p-1)}^{(k)} = f_{k-(2j+1)m+(2p-1)}^{(k)} = (-1)^{\ell+j} \frac{2j+1}{2\ell}, \ j = 0, 1, \ldots, [(\ell-1)/2];$$

svi ostali koeficijenti jednaki su 0.

Koristeći formule (2.16), (2.10), i teoremu 2.5, lako se proverava da su za $k \leq [m/2] - 1$ sve date formule tačne, tj. $I_0^C = I_0^S = J_0^C = -J_0^S = \pi$, $I_0 = J_0 = 0$, $\alpha_1^{(1)} = -\delta_1^{(1)} = 1, \beta_1^{(1)} = \gamma_1^{(1)} = 0$; i za $1 \leq k \leq [m/2] - 1$, $I_k^C = I_k^S = \pi$, $I_k = J_k = J_k^C = J_k^S = 0$, $c_\nu^{(k)} = d_\nu^{(k)} = f_\nu^{(k)} = g_\nu^{(k)} = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$ i $\alpha_k^{(1)} = \delta_k^{(1)} = \beta_k^{(j)} = \gamma_k^{(j)} = 0$, $\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = 1$ za $1 < k \leq [m/2] - 1$. Napomenimo da se deo ovih rezultata (vrednosti koeficijenata $c_\nu^{(k)}$ i $d_\nu^{(k)}$) sreće i u [91, §3. Example 4.], mada je Turetzkii razmatrao samo ortogonalne trigonometrijske polinome stepena $k + 1/2$ sa vodeći koeficijentima $c_k^{(k)} = d_k^{(k)} = 1$. Međutim, u [91] nisu posmatrani ortogonalni trigonometrijski polinomi stepena $k+1/2$ za $k \geq [m/2]$.

Za $k = [m/2]$ dobijamo $\alpha_k^{(1)} = \delta_k^{(1)} = \beta_k^{(j)} = \gamma_k^{(j)} = 0$, $\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = 1$, $c_\nu^{(k)} = d_\nu^{(k)} = f_\nu^{(k)} = g_\nu^{(k)} = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$ i, prema (2.16), $I_k^C = I_k^S = \pi$, $J_k^C = J_k^S = J_k = 0$, ali, sada je $I_k = \pi/2$, i zato za $k = [m/2]+1 = m-[m/2]$, važi $\beta_k^{(2)} = \gamma_k^{(2)} = 1/2$, kao i $d_{k-2}^{(k)} = f_{k-2}^{(k)} = -1/2$. Ove dve vrednosti za k izdvajamo posebno da bi uočili razliku između slučajeva kada je m neparan i kada je m paran broj (videti teoremu 2.11).

Polazeći od datih formula za $\nu = k-2, k-1$, $k \geq [m/2]+2$, direktnim izračunavanjem (koristeći (2.10)) dobijamo date formule za koeficijente rekurentnih relacija $\alpha_k^{(j)}, \beta_k^{(j)}, \gamma_k^{(j)}, \delta_k^{(j)}$, $j = 1, 2$. Zatim, koristeći te formule i teoremu 2.5 dobijamo formule za $c_\nu^{(k)}, d_\nu^{(k)}, f_\nu^{(k)}, g_\nu^{(k)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, k$. Konačno, koristeći dobijene formule za $c_i^{(k)}$, $d_i^{(k)}$, $f_i^{(k)}$, $g_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, i (2.16), slično kao u dokazu teoreme 2.9, dobijamo date eksplicitne formule za integrale I_k^C, I_k^S, I_k, J_k^C, J_k^S, J_k. $\square$

Teorema 2.11. *Za težinsku funkciju $w_m(x) = 1 + \sin mx$, gde je m paran broj, koeficijenti rekurentnih relacija* (2.8) *i* (2.9) *dati su sledećim formulama* ($\ell \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$)*:*

$$\alpha_1^{(1)} = -\delta_1^{(1)} = 1,\ \alpha_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0,$$

za $m = 2$*:* $\beta_1^{(1)} = \gamma_1^{(1)} = 1/2$,

za $m = 2$, $k = 2\ell$, $\ell \geq 1$

$$\alpha_k^{(1)} = -\delta_k^{(1)} = \frac{(-1)^{\ell+1}}{2\ell+1}, \quad \alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = \frac{4\ell^2-1}{4\ell^2}, \quad \beta_k^{(1)} = \gamma_k^{(1)} = \frac{(-1)^\ell}{2\ell},$$

za $m = 2$, $k = 2\ell+1$, $\ell \geq 1$

$$\alpha_k^{(1)} = -\delta_k^{(1)} = \frac{(-1)^\ell}{2\ell+1}, \quad \alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = \frac{(2\ell+1)^2-1}{(2\ell+1)^2},$$

$$\beta_k^{(1)} = \gamma_k^{(1)} = \frac{(-1)^\ell}{2(\ell+1)},$$

za $k = \ell m/2 + 1$, $m \geq 4$, *gde je* ℓ *neparan broj*

$$\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = \frac{(\ell+1)^2-1}{(\ell+1)^2}, \quad \alpha_k^{(1)} = \delta_k^{(1)} = 0,$$

za $k = \ell m/2$, $m \geq 4$, *gde je* ℓ *paran broj*

$$\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = 1, \quad \alpha_k^{(1)} = -\delta_k^{(1)} = \frac{(-1)^{\ell/2+1}}{\ell+1},$$

za $k = \ell m/2 + 1$, $m \geq 4$, *gde je* ℓ *paran broj*

$$\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = \frac{(\ell+1)^2 - 1}{(\ell+1)^2}, \quad \alpha_k^{(1)} = -\delta_k^{(1)} = \frac{(-1)^{\ell/2}}{\ell+1},$$

za $m \geq 4$, *za sve ostale vrednosti* $k > 1$ *važi* $\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = 1$ *i* $\alpha_k^{(1)} = \delta_k^{(1)} = 0$,

za $k = m/2 + \ell m$, $m \geq 4$: $\beta_k^{(1)} = \gamma_k^{(1)} = \dfrac{(-1)^\ell}{2(\ell+1)}$,

za $k = m/2 + \ell m + 1$, $m \geq 4$: $\beta_k^{(1)} = \gamma_k^{(1)} = \dfrac{(-1)^{\ell+1}}{2(\ell+1)}$,

za $m \geq 4$, *za sve ostale vrednosti* k *važi* $\beta_k^{(1)} = \gamma_k^{(1)} = 0$,

i za sve parne prirodne brojeve m, *za sve* $k \in \mathbb{N}$ *važi* $\beta_k^{(2)} = \gamma_k^{(2)} = 0$.

Dokaz. Kao i u prethodnim teoremama, dokazaćemo istovremeno da važe i sledeće eksplicitne formule:

za $m = 2$, $\nu = 2\ell$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(\ell+1)\pi}{2\ell+1}, \quad I_\nu = 0,$$

$$J_\nu^C = -J_\nu^S = (-1)^\ell \frac{(\ell+1)\pi}{(2\ell+1)^2}, \quad J_\nu = (-1)^\ell \frac{\pi}{2(2\ell+1)},$$

za $m = 2$, $\nu = 2\ell + 1$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(2\ell+3)\pi}{4(\ell+1)}, \quad I_\nu = 0,$$

$$J_\nu^C = -J_\nu^S = (-1)^\ell \frac{\pi}{4(\ell+1)}, \quad J_\nu = (-1)^{\ell+1} \frac{(2\ell+3)\pi}{8(\ell+1)^2},$$

za $\nu = \ell m$, $m \geq 4$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(\ell+1)\pi}{2\ell+1}, \quad I_\nu = J_\nu = 0, \quad J_\nu^C = -J_\nu^S = (-1)^\ell \frac{(\ell+1)\pi}{(2\ell+1)^2},$$

za $\nu = \ell m + m/2$, $m \geq 4$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(2\ell+3)\pi}{4(\ell+1)}, \quad I_\nu = J_\nu^C = J_\nu^S = 0, \quad J_\nu = (-1)^{\ell+1} \frac{(2\ell+3)\pi}{8(\ell+1)^2},$$

za $\nu = \ell m + m/2 - 1$, $m \geq 4$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(\ell+1)\pi}{2\ell+1}, \quad I_\nu = J_\nu^C = J_\nu^S = 0, \quad J_\nu = (-1)^\ell \frac{\pi}{2(2\ell+1)},$$

za $\nu = \ell m - 1$, $\ell \geq 1$, $m \geq 4$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(2\ell+1)\pi}{4\ell}, \quad I_\nu = J_\nu = 0, \quad J_\nu^C = -J_\nu^S = (-1)^{\ell+1}\frac{\pi}{4\ell},$$

u slučaju $m > 4$, za $\nu = \ell m + 1, \ldots, \ell m + m/2 - 2$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(\ell+1)\pi}{2\ell+1}, \quad I_\nu = J_\nu = J_\nu^C = J_\nu^S = 0,$$

i za $\nu = \ell m + m/2 + 1, \ldots, (\ell+1)m - 2$

$$I_\nu^C = I_\nu^S = \frac{(2\ell+3)\pi}{4(\ell+1)}, \quad I_\nu = J_\nu = J_\nu^C = J_\nu^S = 0;$$

kao i:

za $k = \ell m + p$, $p = 0, 1, \ldots, m/2 - 1$

$$c_{k-2jm}^{(k)} = g_{k-2jm}^{(k)} = (-1)^j \frac{2\ell+1-2j}{2\ell+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, [\ell/2],$$

$$c_{k-2jm-(2p+1)}^{(k)} = -g_{k-2jm-(2p+1)}^{(k)} = (-1)^{\ell+j}\frac{2j+1}{2\ell+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, [(\ell-1)/2],$$

$$d_{k-(2j+1)m}^{(k)} = -f_{k-(2j+1)m}^{(k)} = (-1)^j \frac{2\ell-2j}{2\ell+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, [(\ell-1)/2],$$

$$d_{k-(2j+1)m-(2p+1)}^{(k)} = f_{k-(2j+1)m-(2p+1)}^{(k)} = (-1)^{\ell+j}\frac{2(j+1)}{2\ell+1}, \; j = 0, 1, \ldots, [\ell/2]-1;$$

za $k = \ell m - p$, $\ell \geq 1$, $p = 1, \ldots, m/2$

$$c_{k-2jm}^{(k)} = g_{k-2jm}^{(k)} = (-1)^j \frac{\ell-j}{\ell}, \quad j = 0, 1, \ldots, [(\ell-1)/2],$$

$$c_{k-2jm+(2p-1)}^{(k)} = -g_{k-2jm+(2p-1)}^{(k)} = (-1)^{\ell+j}\frac{j}{\ell}, \quad j = 1, \ldots, [\ell/2],$$

$$d_{k-(2j+1)m}^{(k)} = -f_{k-(2j+1)m}^{(k)} = (-1)^j \frac{2\ell-(2j+1)}{2\ell}, \quad j = 0, 1, \ldots, [\ell/2] - 1,$$

$$d_{k-(2j+1)m+(2p-1)}^{(k)} = f_{k-(2j+1)m+(2p-1)}^{(k)} = (-1)^{\ell+j}\frac{2j+1}{2\ell}, \; j = 0, 1, \ldots, [(\ell-1)/2];$$

svi ostali koeficijenti jednaki su 0.

Direktnim izračunavanjem, kao u dokazu teoreme 2.10, za $m \geq 4$ lako se vidi da su za sve $k < m/2 - 1$ date formule tačne, tj. $I_0^C = I_0^S = J_0^C = -J_0^S = \pi$, $I_0 = J_0 = 0$, $\alpha_1^{(1)} = -\delta_1^{(1)} = 1$, $\beta_1^{(1)} = \gamma_1^{(1)} = 0$; i za $1 \leq k \leq m/2-2$, $I_k^C = I_k^S = \pi$, $I_k = J_k = J_k^C = J_k^S = 0$, $\alpha_k^{(1)} = \delta_k^{(1)} = \beta_k^{(j)} = \gamma_k^{(j)} = 0$, $\alpha_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} = 1$ ($k \neq 1$) i $c_\nu^{(k)} = d_\nu^{(k)} = f_\nu^{(k)} = g_\nu^{(k)} = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$. Dalje, za $k = m/2 - 1$ dobija se $I_k^C = I_k^S = \pi$, $I_k = J_k^C = J_k^S = 0$, i, sada, $J_k = \pi/2$, pa onda za $k = m/2$ važi $\beta_k^{(1)} = \gamma_k^{(1)} = 1/2$, kao i $d_{k-1}^{(k)} = f_{k-1}^{(k)} = -1/2$. Sada se ovde jasno vidi razlika između slučajeva kada je m neparan i kada je m paran broj (videti teoremu 2.10).

Koraci u dokazu su isti kao i u dokazima teorema 2.9 i 2.10. □

Težinska funkcija $w(x) = \sqrt{2} + \sin x + \cos x$

Teorema 2.12. *Za težinsku funkciju $w(x) = \sqrt{2} + \sin x + \cos x$ koeficijenti petočlanih rekurentnih relacija (2.8) i (2.9) dati su sledećim formulama:*

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1}{3}(3+\sqrt{2}), \quad \beta_1^{(1)} = \frac{1}{3}(-1-\sqrt{2}),$$

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{1}{3}(-1+\sqrt{2}), \quad \delta_1^{(1)} = \frac{1}{3}(-3+\sqrt{2}),$$

i za sve prirodne brojeve $k \geq 2$

$$\alpha_k^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big((-1)^{[(k-1)/2]}(2k-1)+\sqrt{2}\Big), & k - \textit{paran}, \\ \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big((-1)^{(k-1)/2}(2k+1)+\sqrt{2}\Big), & k - \textit{neparan}, \end{cases}$$

$$\alpha_k^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2k-1)^2}\Big((2k-1)^2-1+(-1)^{k/2}(2k-1)\sqrt{2}\Big), & k - \textit{paran}, \\ \dfrac{1}{(2k-1)^2}\Big((2k-1)^2-1+(-1)^{(k+1)/2}\sqrt{2}\Big), & k - \textit{neparan}, \end{cases}$$

$$\beta_k^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big((-1)^{[(k-1)/2]}(2k+1)-\sqrt{2}\Big), & k - \textit{paran}, \\ \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big((-1)^{(k+1)/2}(2k-1)-\sqrt{2}\Big), & k - \textit{neparan}, \end{cases}$$

$$\beta_k^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2k-1)^2}\Big(1+(-1)^{k/2}\sqrt{2}\Big), & k - \textit{paran}, \\ \dfrac{1}{(2k-1)^2}\Big(1+(-1)^{(k-1)/2}(2k-1)\sqrt{2}\Big), & k - \textit{neparan}, \end{cases}$$

$$\gamma_k^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big((-1)^{[(k-1)/2]}(2k+1)+\sqrt{2}\Big), & k - \textit{paran}, \\ \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big((-1)^{(k+1)/2}(2k-1)+\sqrt{2}\Big), & k - \textit{neparan}, \end{cases}$$

$$\gamma_k^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2k-1)^2}\Big(-1+(-1)^{k/2}\sqrt{2}\Big), & k - \textit{paran}, \\ \dfrac{1}{(2k-1)^2}\Big(-1+(-1)^{(k-1)/2}(2k-1)\sqrt{2}\Big), & k - \textit{neparan}, \end{cases}$$

$$\delta_k^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big((-1)^{[(k-1)/2]+1}(2k-1)+\sqrt{2}\Big), & k - \textit{paran}, \\ \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big((-1)^{(k+1)/2}(2k+1)+\sqrt{2}\Big), & k - \textit{neparan}, \end{cases}$$

$$\delta_k^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2k-1)^2}\Big((2k-1)^2-1+(-1)^{k/2+1}(2k-1)\sqrt{2}\Big), & k - \textit{paran}, \\ \dfrac{1}{(2k-1)^2}\Big((2k-1)^2-1+(-1)^{(k-1)/2}\sqrt{2}\Big), & k - \textit{neparan}. \end{cases}$$

Dokaz. Koraci u dokazu isti su kao i u dokazu teoreme 2.9. Za ovako definisanu težinsku funkciju w važi ($\delta_{\nu,\mu}$ je Kronecker-ova delta funkcija, $k,\ell \in \mathbb{N}_0$):

$$\int_0^{2\pi} \cos(k+1/2)x\cos(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = \pi\sqrt{2}\delta_{k,\ell} + \frac{\pi}{2}\delta_{k,\ell\pm1},\ k\geq 1,$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(x/2)\cos(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = \pi(\sqrt{2}+1/2)\delta_{0,\ell} + \frac{\pi}{2}\delta_{1,\ell},$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(k+1/2)x\sin(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = \pi\sqrt{2}\delta_{k,\ell} + \frac{\pi}{2}\delta_{k,\ell\pm1},\ k\geq 1,$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(x/2)\sin(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = \pi(\sqrt{2}-1/2)\delta_{0,\ell} + \frac{\pi}{2}\delta_{1,\ell},$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(k+1/2)x\sin(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\delta_{k,\ell-1} - \delta_{k,\ell+1}),\ k\geq 1$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(x/2)\sin(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\delta_{0,\ell} + \delta_{1,\ell}),$$
$$\int_0^{2\pi} \cos x\cos(k+1/2)x\cos(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{2}\delta_{k,\ell} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\delta_{k,\ell\pm1} + \frac{\pi}{4}\delta_{k,\ell\pm2},\ k>1,$$
$$\int_0^{2\pi} \cos x\cos(x/2)\cos(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = \frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}\delta_{0,\ell} + \frac{(2\sqrt{2}+1)\pi}{4}\delta_{1,\ell} + \frac{\pi}{4}\delta_{2,\ell},$$
$$\int_0^{2\pi} \cos x\cos(3x/2)\cos(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(2\sqrt{2}+1)\pi}{4}\delta_{0,\ell} + \frac{\pi}{2}\delta_{1,\ell} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\delta_{2,\ell} + \frac{\pi}{4}\delta_{3,\ell},$$
$$\int_0^{2\pi} \cos x\sin(k+1/2)x\sin(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{2}\delta_{k,\ell} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\delta_{k,\ell\pm1} + \frac{\pi}{4}\delta_{k,\ell\pm2},\ k>1,$$
$$\int_0^{2\pi} \cos x\sin(x/2)\sin(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = \frac{(1-\sqrt{2})\pi}{2}\delta_{0,\ell} + \frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{4}\delta_{1,\ell} + \frac{\pi}{4}\delta_{2,\ell},$$
$$\int_0^{2\pi} \cos x\sin(3x/2)\sin(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{4}\delta_{0,\ell} + \frac{\pi}{2}\delta_{1,\ell} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\delta_{2,\ell} + \frac{\pi}{4}\delta_{3,\ell},$$
$$\int_0^{2\pi} \cos x\cos(k+1/2)x\sin(\ell+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}(\delta_{k,1-\ell} + \delta_{k,\ell-2} - \delta_{k,\ell+2}).$$

Koristeći ove formule dobijamo

$$
\begin{aligned}
I_n^C &= \pi(\sqrt{2}+1/2){c_0^{(n)}}^2 + \pi(\sqrt{2}-1/2){d_0^{(n)}}^2 + \pi c_0^{(n)} d_0^{(n)} + \pi\sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left({c_\nu^{(n)}}^2 + {d_\nu^{(n)}}^2\right) \\
&+ \pi\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(c_\nu^{(n)}c_{\nu+1}^{(n)} + d_\nu^{(n)}d_{\nu+1}^{(n)}\right) + \pi\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(c_\nu^{(n)}d_{\nu+1}^{(n)} - d_\nu^{(n)}c_{\nu+1}^{(n)}\right), \\
I_n^S &= \pi(\sqrt{2}+1/2){f_0^{(n)}}^2 + \pi(\sqrt{2}-1/2){g_0^{(n)}}^2 + \pi f_0^{(n)} g_0^{(n)} + \pi\sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left({f_\nu^{(n)}}^2 + {g_\nu^{(n)}}^2\right) \\
&+ \pi\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(f_\nu^{(n)}f_{\nu+1}^{(n)} + g_\nu^{(n)}g_{\nu+1}^{(n)}\right) + \pi\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(f_\nu^{(n)}g_{\nu+1}^{(n)} - g_\nu^{(n)}f_{\nu+1}^{(n)}\right), \\
I_n &= \pi(\sqrt{2}+1/2)c_0^{(n)}f_0^{(n)} + \pi(\sqrt{2}-1/2)d_0^{(n)}g_0^{(n)} + \frac{\pi}{2}\left(c_0^{(n)}g_0^{(n)} + d_0^{(n)}f_0^{(n)}\right) \\
&+ \pi\sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(c_\nu^{(n)}f_\nu^{(n)} + d_\nu^{(n)}g_\nu^{(n)}\right) \\
&+ \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(c_\nu^{(n)}f_{\nu+1}^{(n)} + f_\nu^{(n)}c_{\nu+1}^{(n)} + d_\nu^{(n)}g_{\nu+1}^{(n)} + g_\nu^{(n)}d_{\nu+1}^{(n)}\right) \\
&+ \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(c_\nu^{(n)}g_{\nu+1}^{(n)} - g_\nu^{(n)}c_{\nu+1}^{(n)} + f_\nu^{(n)}d_{\nu+1}^{(n)} - d_\nu^{(n)}f_{\nu+1}^{(n)}\right), \\
J_n^C &= \pi(1+\sqrt{2}){c_0^{(n)}}^2 + \pi(1-\sqrt{2}){d_0^{(n)}}^2 + \pi\left(c_0^{(n)}d_1^{(n)} + c_1^{(n)}d_0^{(n)}\right) \\
&+ \pi(2\sqrt{2}+1)c_0^{(n)}c_1^{(n)} + \pi(2\sqrt{2}-1)d_0^{(n)}d_1^{(n)} + \pi\sum_{\nu=1}^{n}\left({c_\nu^{(n)}}^2 + {d_\nu^{(n)}}^2\right) \\
&+ 2\pi\sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(c_\nu^{(n)}c_{\nu+1}^{(n)} + d_\nu^{(n)}d_{\nu+1}^{(n)}\right) \\
&+ \pi\sum_{\nu=0}^{n-2}\left(c_\nu^{(n)}c_{\nu+2}^{(n)} + d_\nu^{(n)}d_{\nu+2}^{(n)} + c_\nu^{(n)}d_{\nu+2}^{(n)} - d_\nu^{(n)}c_{\nu+2}^{(n)}\right), \\
J_n^S &= \pi(1+\sqrt{2}){f_0^{(n)}}^2 + \pi(1-\sqrt{2}){g_0^{(n)}}^2 + \pi\left(f_0^{(n)}g_1^{(n)} + f_1^{(n)}g_0^{(n)}\right) \\
&+ \pi(2\sqrt{2}+1)f_0^{(n)}f_1^{(n)} + \pi(2\sqrt{2}-1)g_0^{(n)}g_1^{(n)} + \pi\sum_{\nu=1}^{n}\left({f_\nu^{(n)}}^2 + {g_\nu^{(n)}}^2\right) \\
&+ 2\pi\sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(f_\nu^{(n)}f_{\nu+1}^{(n)} + g_\nu^{(n)}g_{\nu+1}^{(n)}\right) \\
&+ \pi\sum_{\nu=0}^{n-2}\left(f_\nu^{(n)}f_{\nu+2}^{(n)} + g_\nu^{(n)}g_{\nu+2}^{(n)} + f_\nu^{(n)}g_{\nu+2}^{(n)} - g_\nu^{(n)}f_{\nu+2}^{(n)}\right), \\
J_n &= \pi(1+\sqrt{2})c_0^{(n)}f_0^{(n)} + \pi(1-\sqrt{2})d_0^{(n)}g_0^{(n)} + \pi\sum_{\nu=1}^{n}\left(c_\nu^{(n)}f_\nu^{(n)} + d_\nu^{(n)}g_\nu^{(n)}\right) \\
&+ \frac{\pi}{2}\left(c_0^{(n)}g_1^{(n)} + c_1^{(n)}g_0^{(n)} + f_0^{(n)}d_1^{(n)} + f_1^{(n)}d_0^{(n)}\right) \\
&+ \frac{\pi}{2}(2\sqrt{2}+1)\left(c_0^{(n)}f_1^{(n)} + c_1^{(n)}f_0^{(n)}\right) + \frac{\pi}{2}(2\sqrt{2}-1)\left(d_0^{(n)}g_1^{(n)} + d_1^{(n)}g_0^{(n)}\right) \\
&+ \pi\sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(c_\nu^{(n)}f_{\nu+1}^{(n)} + f_\nu^{(n)}c_{\nu+1}^{(n)} + d_\nu^{(n)}g_{\nu+1}^{(n)} + g_\nu^{(n)}d_{\nu+1}^{(n)}\right) \\
&+ \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{n-2}\Big(c_\nu^{(n)}f_{\nu+2}^{(n)} + f_\nu^{(n)}c_{\nu+2}^{(n)} + d_\nu^{(n)}g_{\nu+2}^{(n)} + g_\nu^{(n)}d_{\nu+2}^{(n)} \\
&\qquad + c_\nu^{(n)}g_{\nu+2}^{(n)} + f_\nu^{(n)}d_{\nu+2}^{(n)} - g_\nu^{(n)}c_{\nu+2}^{(n)} - d_\nu^{(n)}f_{\nu+2}^{(n)}\Big).
\end{aligned}
$$

Istovremeno sa dokazom da važe date eksplicitne formule za koeficijente rekurentnih relacija, dokazujemo da važe i sledeće formule za integrale ($\nu \in \mathbb{N}_0$):

$$I_\nu^C = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(2\nu+1)}\left((-1)^{\nu/2} + 2(\nu+1)\sqrt{2}\right), & \nu - \text{paran},\\ \dfrac{\pi}{2(2\nu+1)}\left((-1)^{[\nu/2]+1} + 2(\nu+1)\sqrt{2}\right), & \nu - \text{neparan}, \end{cases}$$

$$I_\nu^S = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(2\nu+1)}\left((-1)^{\nu/2+1} + 2(\nu+1)\sqrt{2}\right), & \nu - \text{paran},\\ \dfrac{\pi}{2(2\nu+1)}\left((-1)^{[\nu/2]} + 2(\nu+1)\sqrt{2}\right), & \nu - \text{neparan}, \end{cases}$$

$$I_\nu = (-1)^{[\nu/2]}\frac{\pi}{2(2\nu+1)},$$

$$J_\nu^C = \begin{cases} \dfrac{\pi}{(2\nu+1)^2}\left(1 + (-1)^{\nu/2}(\nu+1)\sqrt{2}\right), & \nu - \text{paran},\\ \dfrac{\pi}{(2\nu+1)^2}\left(1 + (-1)^{[\nu/2]}\nu\sqrt{2}\right), & \nu - \text{neparan}, \end{cases}$$

$$J_\nu^S = \begin{cases} \dfrac{\pi}{(2\nu+1)^2}\left(1 + (-1)^{\nu/2+1}(\nu+1)\sqrt{2}\right), & \nu - \text{paran},\\ \dfrac{\pi}{(2\nu+1)^2}\left(1 + (-1)^{[\nu/2]+1}\nu\sqrt{2}\right), & \nu - \text{neparan}, \end{cases}$$

$$J_\nu = \begin{cases} (-1)^{\nu/2+1}\dfrac{\pi\nu\sqrt{2}}{(2\nu+1)^2}, & \nu - \text{paran},\\ (-1)^{[\nu/2]}\dfrac{\pi(\nu+1)\sqrt{2}}{(2\nu+1)^2}, & \nu - \text{neparan}. \end{cases}$$

Za $n \in \mathbb{N}$ obeležimo $k = [n/4]$ i $m = n - 4[n/4]$. Tada su za sve parne $n \in \mathbb{N}$ koeficijenti reprezentacija (2.5) i (2.6) dati sledećim formulama:
za $\ell = 0, 1, \ldots, k$

$$c_{4\ell}^{(n)} = \frac{(-1)^{k+\ell}}{2n+1}\left((-1)^{(2-m)/2}\left(2(k-\ell)+\frac{m}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{2-m}{2}(4(k+\ell)+1)\right),$$

$$d_{4\ell}^{(n)} = \frac{(-1)^{k+\ell+1}}{2n+1}\left(\frac{m}{2}(4(k+\ell)+3) + \left(2(k-\ell)+\frac{m}{2}\right)\sqrt{2}\right),$$

za $\ell = 0, 1, \ldots, k-(2-m)/2$

$$c_{4\ell+1}^{(n)} = \frac{(-1)^{k+\ell+1}}{2n+1}\left(\frac{m}{2}(4(k-\ell)+1) + \left(2(k+\ell)+1+\frac{m}{2}\right)\sqrt{2}\right),$$

$$c_{4\ell+2}^{(n)} = \frac{(-1)^{k+\ell}}{2n+1}\left(\left(2(k-\ell)-1+\frac{m}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{m}{2}(4(k+\ell)+5)\right),$$

$$d_{4\ell+1}^{(n)} = \frac{(-1)^{k+\ell}}{2n+1}\left((-1)^{(2-m)/2}\left(2(k+\ell)+1+\frac{m}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{2-m}{2}(4(k-\ell)-1)\right),$$

$$d_{4\ell+2}^{(n)} = \frac{(-1)^{k+\ell}}{2n+1}\left(\frac{2-m}{2}(4(k+\ell)+3) + (-1)^{(2-m)/2}\left(2(k-\ell)-1+\frac{m}{2}\right)\sqrt{2}\right)$$

i za $\ell = 0, 1, \dots, k-1$

$$
\begin{aligned}
c_{4\ell+3}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell+1}}{2n+1}\left(\frac{2-m}{2}(4(k-\ell)-3) + (-1)^{(2-m)/2}\left(2(k+\ell+1)+\frac{m}{2}\right)\sqrt{2}\right), \\
d_{4\ell+3}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell+1}}{2n+1}\left(\left(2(k+\ell+1)+\frac{m}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{m}{2}(4(k-\ell)-1)\right).
\end{aligned}
$$

Za neparno $n \in \mathbb{N}$, za $\ell = 0, 1, \dots, k$ imamo

$$
\begin{aligned}
c_{4\ell}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell+1}}{2n+1}\left(\frac{m-1}{2}(4(k-\ell)+3) + (-1)^{(m-1)/2}\left(2(k+\ell)+1+\frac{m-1}{2}\right)\sqrt{2}\right), \\
c_{4\ell+1}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell}}{2n+1}\left(\left(2(k-\ell)+\frac{m-1}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{3-m}{2}(4(k+\ell)+3)\right), \\
d_{4\ell}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell}}{2n+1}\left(\left(2(k+\ell)+1+\frac{m-1}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{3-m}{2}(4(k-\ell)+1)\right), \\
d_{4\ell+1}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell+1}}{2n+1}\left(\frac{m-1}{2}(4(k+\ell)+5) + (-1)^{(m-1)/2}\left(2(k-\ell)+\frac{m-1}{2}\right)\sqrt{2}\right),
\end{aligned}
$$

i, konačno, za $\ell = 0, \dots, k-(3-m)/2$ je

$$
\begin{aligned}
c_{4\ell+2}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell+1}}{2n+1}\left(\frac{3-m}{2}(4(k-\ell)-1) + \left(2(k+\ell+1)+\frac{m-1}{2}\right)\sqrt{2}\right), \\
c_{4\ell+3}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell}}{2n+1}\left((-1)^{(m-1)/2}\left(2(k-\ell)-\frac{3-m}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{m-1}{2}(4(k+\ell)+7)\right), \\
d_{4\ell+2}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell+1}}{2n+1}\left((-1)^{(m-1)/2}\left(2(k+\ell+1)+\frac{m-1}{2}\right)\sqrt{2} + \frac{m-1}{2}(4(k-\ell)+1)\right), \\
d_{4\ell+3}^{(n)} &= \frac{(-1)^{k+\ell}}{2n+1}\left(\frac{3-m}{2}(4(k+\ell)+5) + \left(2(k-\ell)-\frac{3-m}{2}\right)\sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

Koeficijenti $g_\nu^{(n)}$ mogu se dobiti iz formula za $c_\nu^{(n)}$ množeći sa -1 prvi sabirak u zagradi na desnoj strani, a koeficijenti $f_\nu^{(n)}$ mogu se dobiti iz formula za $d_\nu^{(n)}$ takođe množeći sa -1 prvi sabirak u zagradi na desnoj strani.

Sve navedene eksplicitne formule mogu se dobiti direktnim izračunavanjem analogno dokazu teoreme 2.9. $\square$

Glava 3

Kvadraturne formule sa maksimalnim trigonometrijskim stepenom tačnosti

3.1 Kvadraturne formule Gauss-ovog tipa

Neka je težinska funkcija $w(x)$ integrabilna i nenegativna na intervalu $[0, 2\pi)$, takva da može imati vrednost nula samo na skupu mere nula i neka su x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, različite tačke iz intervala $[0, 2\pi)$. Posmatraćemo kvadraturne formule oblika

$$\int_0^{2\pi} t(x)\, w(x) \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} w_\nu t(x_\nu) + R_n(t), \tag{3.1}$$

Definicija 3.1. *Kvadraturna formula* (3.1) *ima trigonometrijski stepen tačnosti d ako za sve trigonometrijske polinome $t \in \mathcal{T}_d$ važi $R_n(t) = 0$ i postoji trigonometrijski polinom $g \in \mathcal{T}_{d+1}$ takav da je $R_n(g) \neq 0$.*

Turetzkii je u [91] razmatrao interpolacione kvadraturne formule oblika (3.1), tj. kvadraturne formule oblika (3.1) koje imaju trigonometrijski stepen tačnosti n. Takve kvadraturne formule, analogno postupku opisanom u odeljku 1.3.1, mogu se dobiti iz trigonometrijskog interpolacionog polinoma datog u Lagrange-ovom obliku (videti [11], [48], [44])

$$t_n(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t(x_\nu) \ell_\nu(x), \tag{3.2}$$

gde je

$$\ell_\nu(x) = \prod_{k=0, k\neq\nu}^{2n} \frac{\sin \frac{x - x_k}{2}}{\sin \frac{x_\nu - x_k}{2}} = \frac{A_{n+1/2}(x)}{2 \sin \frac{x - x_\nu}{2} A'_{n+1/2}(x_\nu)}$$

i $A_{n+1/2}(x)$ trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $n+1/2$ oblika

$$A_{n+1/2}(x) = A\prod_{k=0}^{2n} \sin\frac{x-x_k}{2} \qquad (A \text{ kostanta različita od nule}).$$

Ako obe strane jednakosti (3.2) pomnožimo sa $w(x)$ i integralimo na intervalu $[0, 2\pi)$, dobijamo da su težine u kvadraturnoj formuli (3.1) date sa

$$w_\nu = \int_0^{2\pi} \ell_\nu(x)\, w(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{A_{n+1/2}(x)}{2\sin\frac{x-x_\nu}{2} A'_{n+1/2}(x_\nu)}\, w(x)\mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

Ako čvorovi x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, nisu zadati unapred, simulirajući razvoj Gauss-ovih kvadraturnih formula datih u odeljku 1.3.2, možemo pokušati da ih odredimo tako da trigonometrijski stepen tačnosti kvadraturne formule (3.1) sa n povećamo na $2n$. Napomenimo da se neki rezultati vezani za ovaj problem mogu naći i u radovima [80] (za $w(x) = 1$) i [41] (za parne težinske funkcije). Takođe, neki početni rezultati za $\pi-$periodičnu težinsku funkciju w na $(0, 4\pi)$ mogu se naći u [28], pri čemu je detaljnija analiza rađena samo za težinske funkcije $w(x) = \sin^2 x$, $w(x) = \cos^2(x)$ i $w(x) = 1$. U [91] je dokazana sledeća teorema.

Teorema 3.1. *Kvadraturna formula oblika* (3.1)*, u kojoj su koeficijenti w_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, dati sa* (3.3)*, je Gauss-ovog tipa, tj. ima trigonometrijski stepen tačnosti $2n$, ako i samo ako su čvorovi x_ν $(\in [0, 2\pi))$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, nule ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}(x)$ u odnosu na težinsku funkciju $w(x)$ na $[0, 2\pi)$.*

Prethodna teorema kaže da čvorovi moraju biti nule ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2} \in \mathcal{T}_n^{1/2}$, koji, prema teoremi 2.2, u intervalu $[0, 2\pi)$ ima $2n+1$ različitih nula. Videli smo da je ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2} \in \mathcal{T}_n^{1/2}$ jednoznačno određen ako su mu fiksirani vodeći koeficijenti (teorema 2.1), pa Gauss-ova kvadraturna formula (3.1) nije jedinstvena. Naime, imamo $4n+2$ nepoznata parametra, a znamo da je formula tačna za sve trigonometrijske polinome iz linearnog prostora $\mathcal{T}_{2n}$ dimenzije $4n+1$.

Primenjujući kvadraturnu formulu (3.1) na trigonometrijski polinom

$$t_\nu(x) = \left(\frac{A_{n+1/2}(x)}{\sin\frac{x-x_\nu}{2}}\right)^2 \in \mathcal{T}_{2n}$$

dobija se ([91, Theorem 2.])

$$w_\nu = \int_0^{2\pi} \left(\frac{A_{n+1/2}(x)}{2A'_{n+1/2}(x_\nu)\sin\frac{x-x_\nu}{2}}\right)^2 w(x)\mathrm{d}x,$$

tj. svi težinski koeficijenti w_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, su pozitivni. Ta činjenica je bitna za dokaz konvergencije kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa. Naime, važi sledeća teorema (videti [91]).

Teorema 3.2. *Neka su x_ν i w_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, redom čvorovi i težine kvadraturne formule Gauss-ovog tipa* (3.1)*. Tada za svaku neprekidnu 2π-periodičnu funkciju f važi*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\nu=0}^{2n} w_\nu f(x_\nu) = \int_0^{2\pi} f(x)\, w(x) \mathrm{d}x.$$

Teorema 3.1 se može jednostavno modifikovati translacijom intervala $[0, 2\pi)$.

Lema 3.1. *Za $L \in \mathbb{R}$, kvadraturna formula*

$$\int_L^{2\pi+L} t(x)\, \widetilde{w}(x) \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} \widetilde{w}_\nu t(\tau_\nu), \quad t \in \mathfrak{T}_{2n}, \tag{3.4}$$

gde su koeficijenti $\widetilde{w}_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, dati sa

$$\widetilde{w}_\nu = \int_L^{2\pi+L} \frac{\widetilde{A}_{n+1/2}(x)}{2 \sin \frac{x-\tau_\nu}{2} \widetilde{A}'_{n+1/2}(\tau_\nu)} \widetilde{w}(x) \mathrm{d}x, \quad \widetilde{A}_{n+1/2}(x) = \widetilde{A} \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x - \tau_k}{2},$$

je Gauss-ovog tipa ako i samo ako su čvorovi τ_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, nule iz intervala $[L, 2\pi + L)$, trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $\widetilde{A}_{n+1/2}(x)$ ortogonalnog na $[L, 2\pi + L)$ u odnosu na težinsku funkciju $\widetilde{w}(x)$.

Dokaz. Ako pođemo od kvadraturne formule (3.1) za težinsku funkciju $w(x) = \widetilde{w}(x + L)$, $x \in [0, 2\pi)$, i uvedemo smenu $x := x + L$, dobijamo

$$\int_L^{2\pi+L} t(x - L)\, w(x - L) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2n} w_\nu t(x_\nu + L - L), \quad t \in \mathfrak{T}_{2n}.$$

Kako $t(x-L) \in \mathfrak{T}_{2n}$, ako obeležimo $\widetilde{t}(x) = t(x-L)$ i $\tau_\nu = x_\nu + L$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, dobijamo

$$\int_L^{2\pi+L} \widetilde{t}(x)\, \widetilde{w}(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2n} w_\nu \widetilde{t}(\tau_\nu), \quad \widetilde{t} \in \mathfrak{T}_{2n}, \tag{3.5}$$

što je kvadraturna formula Gauss-ovog tipa na $[L, 2\pi + L)$, tačna za sve $\widetilde{t} \in \mathfrak{T}_{2n}$. Dakle, u odnosu na polaznu formulu čvorovi su translirani, tj. $\tau_\nu = x_\nu + L$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$.

Ako obeležimo

$$\widetilde{A}_{n+1/2}(x) = \widetilde{A} \prod_{\nu=0}^{2n} \sin \frac{x - \tau_\nu}{2}, \quad \widetilde{A} \neq 0,$$

vidimo da je $A_{n+1/2}(x - L) = \widetilde{A}_{n+1/2}(x)$, gde je $A_{n+1/2}$ trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena sa nulama u čvorovima kvadraturne formule (3.1) (videti lemu 2.5).

Slično, ako uvedemo smenu $x := x + L$ u integralnu reprezentaciju težina w_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, dobijamo upravo ono što se i tvrdi u lemi. $\square$

Razmotrićemo sada slučaj kada je težinska funkcija $w_m(x) = 1 + \sin mx$, $m \in \mathbb{N}$. Ukoliko je $\mathrm{nzd}(m, 2n+1) = d \neq 1$, tada se parametri kvadraturne formule Gauss-ovog tipa sa $2n+1$ čvorova mogu direktno dobiti iz parametara kvadraturne formule sa $(2n+1)/d$ čvorova za težinsku funkciju w_k, gde je $k = m/d$.

Teorema 3.3. *Obeležimo sa x_ν, w_ν, $\nu = 1, \ldots, 2n+1$, čvorove i težine kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za težinsku funkciju $w_m(x) = 1 + \sin mx$, $m \in \mathbb{N}$. Tada su*

$$\widehat{x}_{j(2n+1)+\nu} = \frac{x_\nu}{q} + \frac{2j\pi}{q}, \ \widehat{w}_{j(2n+1)+\nu} = \frac{w_\nu}{q}, \quad j = 0, 1, \ldots, q-1, \nu = 1, \ldots, 2n+1,$$

čvorovi i težine kvadraturne formule Gauss-ovog tipa sa $(2n+1)q$ čvorova za težinsku funkciju $w_{mq}(x) = 1 + \sin mqx$, gde je q neparan ceo broj.

Dokaz. Prema uslovima ortogonalnosti za težinsku funkciju $w_m(x) = 1 + \sin mx$, $m \in \mathbb{N}$, važi

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x) \cos(k+1/2)x \, (1 + \sin mx) \mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x) \sin(k+1/2)x \, (1 + \sin mx) \mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ako uvedemo smenu $x := qx$, dobijamo

$$\int_0^{2\pi/q} A_{n+1/2}(qx) \cos(k+1/2)qx \, (1 + \sin mqx) \mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\int_0^{2\pi/q} A_{n+1/2}(qx) \sin(k+1/2)qx \, (1 + \sin mqx) \mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Uvodeći sada $t = x + 2j\pi/q$, $j = 1, \ldots, q-1$, dobijamo

$$\int_{2j\pi/q}^{2(j+1)\pi/q} A_{n+1/2}(qt - 2j\pi) \cos(k+1/2)(qt - 2j\pi) \, (1 + \sin m(qt - 2j\pi)) \mathrm{d}t = 0,$$

$$\int_{2j\pi/q}^{2(j+1)\pi/q} A_{n+1/2}(qt - 2j\pi) \sin(k+1/2)(qt - 2j\pi) \, (1 + \sin m(qt - 2j\pi)) \mathrm{d}t = 0,$$

za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, tj.

$$\int_{2j\pi/q}^{2(j+1)\pi/q} A_{n+1/2}(qt) \cos(k+1/2)qt \, (1 + \sin mqt) \mathrm{d}t = 0,$$

$$\int_{2j\pi/q}^{2(j+1)\pi/q} A_{n+1/2}(qt)\sin(k+1/2)qt\,(1+\sin mqt)\mathrm{d}t = 0,$$

jer za $j = 1, \ldots, q-1$ važi

$$\cos(k+1/2)(qt-2j\pi) = (-1)^j \cos(k+1/2)qt$$

i

$$\sin(k+1/2)(qt-2j\pi) = (-1)^j \sin(k+1/2)qt.$$

Prema tome, važi

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(qx)\cos(k+1/2)qx\,(1+\sin mqx)\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(qx)\sin(k+1/2)qx\,(1+\sin mqx)\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Obeležimo sa $\mathcal{T}^q$ linearni prostor nad skupom

$$\cos(k+1/2)qx = \cos(kq+(q-1)/2+1/2)x, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\sin(k+1/2)qx = \sin(kq+(q-1)/2+1/2)x, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Očigledno je $\mathcal{T}^q \subseteq \mathcal{T}^{1/2}_{nq+(q-1)/2}$. Koristeći integrale (2.16) dobijamo sledeću ortogonalnost $\mathcal{T}^q \perp (\mathcal{T}^{1/2}_{nq+(q-1)/2} \ominus \mathcal{T}^q)$ u odnosu na skalarni proizvod

$$(f, q) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, w_{mq}(x)\mathrm{d}x.$$

To znači da je $A_{n+1/2}(qx)$ ortogonalan na intervalu $[0, 2\pi)$ na svim trigonometrijskim polinomima polu-celobrojnog stepena $t \in \mathcal{T}^{1/2}_{nq+(q-1)/2-1}$ u odnosu na težinsku funkciju $w_{mq}(x)$.

Ako $A_{n+1/2}(x)$ predstavimo u obliku

$$A_{n+1/2}(x) = A\prod_{\nu=1}^{2n+1}\sin\frac{x-x_\nu}{2}, \quad A \neq 0,$$

tada je

$$A_{n+1/2}(qx) = A\prod_{\nu=1}^{2n+1}\sin\frac{qx-x_\nu}{2} = A\prod_{\nu=1}^{2n+1}\sin\frac{q(x-x_\nu/q)}{2}.$$

Sada je očigledno da su $\widehat{x}_{j(2n+1)+\nu}$, $j = 0, 1, \ldots, q-1$, $\nu = 1, \ldots, 2n+1$, nule trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}(qx)$.

Jednostavno se dobijaju i težinski koeficijenti $\widehat{w}_{j(2n+1)+\nu}$, $j = 0, 1, \ldots, q-1$, $\nu = 1, \ldots, 2n+1$. $\square$

3.1.1 Numerička konstrukcija kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa

U ovom odeljku predstavićemo metod za numeričku konstrukciju kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa. Kao što smo već videli, za bilo koji prirodan broj n, kvadraturna formula Gauss-ovog tipa je sledećeg oblika

$$\int_0^{2\pi} t(x)\, w(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} w_\nu t(x_\nu), \quad t \in \mathcal{T}_{2n}, \tag{3.6}$$

gde su čvorovi x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, nule ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}$, a težine w_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, date sa

$$w_\nu = \int_0^{2\pi} \frac{A_{n+1/2}(x)}{2\sin\dfrac{x-x_\nu}{2} A'_{n+1/2}(x_\nu)} w(x)\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

Mi ćemo koristiti trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A^C_{n+1/2}$, sa vodećom kosinusnom funkcijom, dat sa (2.5) (naravno i bilo koji drugi ortogonalni trigonomtrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}$ se može koristiti umesto $A^C_{n+1/2}$).

Kao i obično, algoritam za konstrukciju kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa sastoji se iz dva dela. Prvi deo se odnosi na konstrukciju čvorova, a drugi deo na konstrukciju težina. Konstrukcija čvorova je nezavisna od konstrukcije težina, dok težine možemo konstruisati samo ako su nam poznati čvorovi.

Za konstrukciju težinskih koeficijenata može se iskoristiti formula (3.7), ukoliko možemo efikasno da izračunamo integral koji se javlja u toj formuli, kao i vrednost ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}$ i njegovog izvoda u tačkama iz intervala $[0, 2\pi)$. Za izračunavanje integrala možemo koristiti Gauss–Legendre-ovu kvadraturnu formulu ukoliko je težinska funkcija glatka i stepen od $A_{n+1/2}$ nije previše visok. Praktično, ako radimo u D-aritmetici (16 decimalnih cifara u mantisi) i primenjujemo Gauss–Legendre-ovu kvadraturnu formulu, polu-celobrojni stepen trigonometrijskog polinoma ne bi trebalo da bude veći od 101/2. Ako su τ_ν i σ_ν, $\nu = 1, \ldots, N$, čvorovi i težine Gauss–Legendre-ove kvadraturne formule, tada je

$$w_k \approx \frac{\pi}{2A'_{n+1/2}(x_k)} \sum_{\nu=1}^{N} \sigma_\nu \frac{(wA_{n+1/2})(\pi\tau_\nu + \pi)}{\cos\frac{\pi\tau_\nu - x_k}{2}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Kao što vidimo, neophodno je izračunati vrednost $A_{n+1/2}(x)$ u različitim tačkama iz intervala $[0, 2\pi)$. To se može uraditi korišćenjem petočlanih rekurentnih relacija (2.8) i (2.9). Takvo izračunavanje vrednosti trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena je numerički stabilno.

Vrednosti izvoda $(A_{n+1/2})'(x)$ mogu se takođe dobiti korišćenjem istih petočlanih rekurentnih relacija. Naime, diferenciranjem rekurentnih relacija (2.8) i (2.9) dobijamo

$$
\begin{aligned}
(A^C_{k+1/2})'(x) &= -2\sin x A^C_{k-1/2}(x) + (2\cos x - \alpha^{(1)}_k)(A^C_{k-1/2})'(x) \\
&\quad - \beta^{(1)}_k (A^S_{k-1/2})'(x) - \alpha^{(2)}_k (A^C_{k-3/2})'(x) - \beta^{(2)}_k (A^S_{k-3/2})'(x), \\
(A^S_{k+1/2})'(x) &= -2\sin x A^S_{k-1/2}(x) + (2\cos x - \delta^{(1)}_k)(A^S_{k-1/2})'(x) \\
&\quad - \gamma^{(1)}_k (A^C_{k-1/2})'(x) - \delta^{(2)}_k (A^S_{k-3/2})'(x) - \gamma^{(2)}_k (A^C_{k-3/2})'(x), \\
(A^C_0)'(x) &= -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}, \quad (A^S_0)'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}.
\end{aligned}
$$

Koristeći prethodni sistem rekurentnih relacija možemo izračunati izvod trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}(x)$ u bilo kojoj tački iz intervala $[0, 2\pi)$.

Jasno je da ovakav metod konstrukcije ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}(x)$ zahteva poznavanje koeficijenata rekurentnih relacija. Ovi koeficijenti se mogu računati formulama (2.10), gde se za aproksimaciju integrala koriste Gauss–Legendre-ove kvadraturne formule. Međutim, takvom procedurom se može dobiti mali broj koeficijenata rekurentnih relacija. U primerima koji će kasnije biti prezentovani, nije korišćena takva procedura, već su iskorišćeni analitički izrazi za koeficijente rekurentnih relacija, dati u odeljku 2.2.3.

Postoji još jedan način za računanje težina, baziran na činjenici da je funkcija $A_{n+1/2}(x)/\sin\frac{x-x_k}{2}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, koja se javlja pod integralom (3.7), trigonometrijski polinom stepena n. To znači da ukoliko imamo konstruisanu kvadraturnu formulu Gauss-ovog tipa (3.6) sa $2[(n+1)/2] + 1$ čvorova, onda tačno možemo dobiti težine kvadraturne formule Gauss-ovog tipa sa $2n + 1$ čvorova. Prema tome, može se razmatrati konstrukcija niza od $m = [\log_2 n] + 1$ kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa (3.6), tačnih na nizu prostora $\mathcal{T}_{2n_k}$, gde su prirodni brojevi n_k, $k = 1, \ldots, m$, određeni sa $n_m = n$, $n_k = [(n_{k+1} + 1)/2]$, $k = m - 1, \ldots, 1$. Sa ovakvim pristupom, jedino za težine kvadraturne formule Gauss-ovog tipa sa $2n_1 + 1$ čvorova koristimo Gauss-Legendre-ove kvadrature, dok za računanje težina za sve ostale kvadrature u posmatranom nizu koristimo prethodno konstruisane kvadrature u nizu.

Razmotrimo sada problem konstrukcije čvorova kvadraturne formule Gauss-ovog tipa (3.6). Iz rekurentnih relacija (2.8) i (2.9) za $k = 1, \ldots, n$ dobijamo

$$
2\cos x \begin{bmatrix} A^C_{1/2}(x) \\ A^S_{1/2}(x) \\ \vdots \\ A^C_{n-1+1/2}(x) \\ A^S_{n-1+1/2}(x) \end{bmatrix} = J_{2n} \begin{bmatrix} A^C_{1/2}(x) \\ A^S_{1/2}(x) \\ \vdots \\ A^C_{n-1+1/2}(x) \\ A^S_{n-1+1/2}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ A^C_{n+1/2}(x) \\ A^S_{n+1/2}(x) \end{bmatrix},
$$

gde je J_{2n} matrica

$$J_{2n} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \beta_1^{(1)} & 1 & & & & & & & \\ \gamma_1^{(1)} & \delta_1^{(1)} & 0 & 1 & & & & & & \\ \alpha_2^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \alpha_2^{(1)} & \beta_2^{(1)} & 1 & & & & & \\ \gamma_2^{(2)} & \delta_2^{(2)} & \gamma_2^{(1)} & \delta_2^{(1)} & 0 & 1 & & & & \\ & & \alpha_3^{(2)} & \beta_3^{(2)} & \alpha_3^{(1)} & \beta_3^{(1)} & 1 & & & \\ & & \gamma_3^{(2)} & \delta_3^{(2)} & \gamma_3^{(1)} & \delta_3^{(1)} & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \alpha_n^{(2)} & \beta_n^{(2)} & \alpha_n^{(1)} & \beta_n^{(1)} & \\ & & & & & \gamma_n^{(2)} & \delta_n^{(2)} & \gamma_n^{(1)} & \delta_n^{(1)} & \end{bmatrix}.$$

Očigledno je da numerički metod za konstrukciju Gauss-ovih kvadraturnih formula baziran na određivanju sopstvenih vrednosti matrice sastavljene od koeficijenata rekurentnih relacija (teorema 1.14) ovde ne može biti primenjen, jer $A_{n+1/2}^C$ i $A_{n+1/2}^S$, $n \in \mathbb{N}$, zadovoljavaju sistem petočlanih rekurentnih relacija.

Za konstrukciju čvorova iskoristićemo algebarski polinom $Q_{2n+1}(z)$ definisan u lemi 2.3. Iz reprezentacije

$$A_{n+1/2}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x}}{2} Q_{2n+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}),$$

vidimo da nule algebarskog polinoma $Q_{2n+1}(z)$ na jediničnom krugu određuju nule trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}(x)$ iz intervala $[0, 2\pi)$. Kako, prema teoremi 2.2, ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}(x)$ ima $2n+1$ različitih nula u intervalu $[0, 2\pi)$, to i odgovarajući algebarski polinom $Q_{2n+1}(z)$ ima $2n+1$ prostih nula na jediničnom krugu. Za $A_{n+1/2}^C(x)$, odgovarajući algebarski polinom $Q_{2n+1}(z)$ je oblika

$$Q_{2n+1}(z) = 1 + \overline{a}_{n-1}^{(n)} z + \cdots + \overline{a}_1^{(n)} z^{n-1} + \overline{a}_0^{(n)} z^n + a_0^{(n)} z^{n+1} + \cdots + z^{2n+1},$$

gde je $a_\nu^{(n)} = c_\nu^{(n)} - \mathrm{i} d_\nu^{(n)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ (videti lemu 2.3).

Daćemo prvo metod za određivanje nula algebarskog polinoma $Q_{2n+1}(z)$. Kada znamo nule z_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, algebarskog polinoma Q_{2n+1}, nule x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}^C$ mogu se odrediti na sledeći način

$$x_\nu = \arg z_\nu \in [0, 2\pi), \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Za sva izračunavanja koristili smo programski paket MATHEMATICA i odgovarajući paket opisan u [9]. Pritom, radili smo u $D-$aritmetici (16 decimalnih cifara u mantisi).

Za simultano izračunavanje nula z_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, algebarskog polinoma $Q_{2n+1}(z)$, koristimo iterativni proces

$$z_\nu^{(k+1)} = z_\nu^{(k)} - \frac{Q_{2n+1}(z_\nu^{(k)})}{P_k'(z_\nu^{(k)})}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n;\ k = 0, 1, \ldots, \tag{3.8}$$

gde je $P_k(z) = \prod_{\nu=0}^{2n} (z - z_\nu^{(k)})$. Startne vrednosti moraju biti međusobno različite, tj. $z_i^{(0)} \neq z_j^{(0)}$, $i \neq j$.

Iterativni proces (3.8) je ekvivalentan metodu Newton–Kantorovich-a primenjenom na Viète-ove formula (videti [47, p. 418]). Prema tome, iterativni proces (3.8) ima kvadratnu konvergenciju.

Lako se vidi da je $P_k'(z_\nu^{(k)}) = \prod_{\mu \neq \nu} (z_\nu^{(k)} - z_\mu^{(k)})$. Za iteratvini proces (3.8) potrebno je još izračunati vrednost $Q_{2n+1}(z_\nu^{(k)})$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, $k = 0, 1, \ldots$, za proizvoljno $z_\nu^{(k)} \in \mathbb{C}$. Kao što znamo važi

$$A_{n+1/2}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x}}{2} Q_{2n+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}), \quad x \in [0, 2\pi).$$

Pošto su u prethodnoj jednakosti sve funkcije analitičke, na osnovu principa analitičkog produženja (videti [27]), jednakost važi i za sve $x \in \mathbb{C}$. Kao što je već rečeno, vrednost $A_{n+1/2}(x)$ može se računati na stabilan način korišćenjem petočlanih rekurentnih relacija, pa se i vrednost polinoma Q_{2n+1} može računati na isti način. Problem je što moramo da računamo vrednost polinoma Q_{2n+1} u datoj tački $z_\nu^{(k)} \in \mathbb{C}$, tj. vrednost trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}$ u tački $-\mathrm{i}\mathrm{Log}(z_\nu^{(k)})$. Moglo bi se desiti da za različite grane Log funkcije dobijemo različite vrednosti za $Q_{2n+1}(z_\nu^{(k)})$. Međutim, to nije slučaj. Naime, neka je $z \neq 0$ i $-\mathrm{i}\mathrm{Log} z = -\mathrm{i} \log z + 2k\pi$ za neko $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\log 1 = 0$. Tada za $x = -\mathrm{i} \log z$ važi

$$\begin{aligned} Q_{2n+1}(z) &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)(x+2k\pi)} A_{n+1/2}(x + 2k\pi) \\ &= 2(-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)x} (-1)^k A_{n+1/2}(x) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)x} A_{n+1/2}(x), \end{aligned}$$

tj. vrednosti dobijene korišćenjem bilo koje grane Log funkcije su iste. Ako je $z_\nu^{(k)} = 0$, tada jednostavno dobijamo da je $Q_{2n+1}(0) = 1$. Dakle, možemo zaključiti da je

$$Q_{2n+1}(z) = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ 2\mathrm{e}^{(n+1/2)\log z} A_{n+1/2}(-\mathrm{i} \log z), & z \neq 0. \end{cases}$$

Koristeći opisani postupak izračunavanje vrednosti polinoma Q_{2n+1} može biti slabo uslovljeno ako iteracija $z_\nu^{(k)}$ nije dovoljno blizu jediničnom krugu. Zbog toga je jako važno napraviti dobar izbor početnih vrednosti. Zapravo, glavni problem u procesu izračunavanja nula trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A^C_{n+1/2}$ je izbor startne iteracije $z_\nu^{(0)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$. Sledeća lema daje veoma korisne sugestije za izbor dobrih startnih vrednosti u iterativnom procesu (3.8).

Lema 3.2. *Postoji $\ell \in \mathbb{Z}$, takvo da za nule x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, trigonometrijskog polinoma $A^C_{n+1/2}$ važi*

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_{2n} = (2\ell + 1)\pi, \quad \ell \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Dokaz. Tvrđenje sledi direktno iz Viète-ovih formula:

$$z_0 z_1 \cdots z_{2n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1} \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_{2n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_0+x_1+\cdots+x_{2n})} = -1. \qquad \square$$

Napomena. Znajući koeficijente petočlanih rekurentnih relacija, za dobro izabrane startne vrednosti iterativnog procesa (3.8), za računanje nula trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A^C_{n+1/2}$ potrebno je $O(n^2)$ operacija. Kao što je već rečeno odgovarajuće težine (3.7) mogu se računati tačno primenom kvadraturne formule Gauss-ovog tipa sa $2[(n+1)/2]+1$ čvorova. Pošto je $\sum_{k=0}^{[\log_2 n]}(n/2^k)^2 = (4 - 2^{-2[\log_2 n]})n^2/3$, ukupan broj operacija za konstrukciju potrebnih $m = [\log_2 n] + 1$ kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa (3.6) je takođe $O(n^2)$.

Parna težinska funkcija na $(-\pi, \pi)$

Razmotrićemo na kraju pitanje konstrukcije kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa u slučaju kada težinska funkcija w zadovoljava $w(x) = w(-x)$, $x \in (-\pi, \pi)$. Koristeći teoremu 2.8, imamo

$$\widetilde{A}^C_{n+1/2}(\arccos x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}\,\widetilde{C}_n(x), \tag{3.10}$$

i algebarski polinomi zadovoljavaju sledeću tročlanu rekurentnu relaciju

$$\widetilde{C}_n(x) = (2x - \widetilde{\alpha}_n^{(1)})\widetilde{C}_{n-1}(x) - \widetilde{\alpha}_n^{(2)}\widetilde{C}_{n-2}(x), \quad \widetilde{\alpha}_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{C}_0 = 1. \tag{3.11}$$

To znači da možemo računati nule algebarskog polinoma $\widetilde{C}_n$ primenom QR-algoritma (videti odeljak 1.3.2 i [22], [17], [19], [47], [44]), tj. možemo računati nule trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $\widetilde{A}_{n+1/2}$ primenom QR-algoritma. Takođe i težine w_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, kvadraturne formule (3.4) se mogu dobiti QR-algoritmom.

Lema 3.3. *Neka je $\widetilde{w}$ parna težinska funkcija na $(-\pi,\pi)$. Obeležimo sa x_ν i ω_ν, $\nu = 1,\ldots,n$, redom čvorove i težine obične Gauss-ove kvadraturne formule (konstruisane za algebarske polinome) sa n tačaka u odnosu na težinsku funkciju $\widetilde{w}(\arccos x)\sqrt{(1+x)/(1-x)}$, $x \in (-1,1)$. Tada za kvadraturnu formulu Gauss-ovog tipa* (3.4) *(za trigonometrijske polinome) u odnosu na težinsku funkciju $\widetilde{w}$ na $(-\pi,\pi)$ imamo*

$$\widetilde{w}_{2n-\nu-1} = \widetilde{w}_\nu = \frac{\omega_{\nu+1}}{1+x_{\nu+1}}, \quad \nu = 0,1,\ldots,n-1, \quad \widetilde{w}_{2n} = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x - \sum_{\nu=0}^{2n-1} \widetilde{w}_\nu,$$

$$\tau_{2n-\nu-1} = -\tau_\nu = \arccos x_{\nu+1}, \quad \nu = 0,1,\ldots,n-1, \quad \tau_{2n} = \pi.$$

Dokaz. Gauss-ova kvadraturna formula (za algebarske polinome) može se konstruisati korišćenjem tročlane rekurentne relacije (3.11). U moničnoj varijanti, koeficijenti rekurentne relacije dati su sa $\widetilde{\alpha}_\nu^{(1)}/2$ i $\widetilde{\alpha}_\nu^{(2)}/4$, $\nu \in \mathbb{N}$. Primenom QR-algoritma dobijamo čvorove x_ν, $\nu = 1,\ldots,n$, odakle, smenom $x := \arccos x$, dobijamo da su nule trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $\widetilde{A}^C_{n+1/2}$ date sa $\tau_{2n-\nu} = -\tau_\nu = -\arccos x_\nu$, $\nu = 0,1,\ldots,2n-1$. Koristeći lemu 2.7 i teoremu 2.6, dobijamo $\tau_{2n} = \pi$.

Poznato je da se težine Gauss-ove kvadraturne formule mogu konstruisati korišćenjem Shohat-ove formule (videti [84], [53]). U našem slučaju važi

$$\omega_\nu = \mu_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\widetilde{C}_k(x_\nu)}{\prod_{j=2}^{k} \alpha_j^{(2)}} \right)^2 \right)^{-1},$$

gde je

$$\mu_0 = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, \widetilde{w}(\arccos x)\mathrm{d}x.$$

Primenom (3.10) dobijamo

$$\omega_\nu = \frac{(1+x_\nu)\mu_0}{2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\widetilde{A}^C_{k+1/2}(\tau_{2n-\nu-1})}{\prod_{j=2}^{k} \alpha_j^{(2)}} \right)^2}, \quad \nu = 1,\ldots,n.$$

Koristeći lemu 3.1 i rezultat iz [91], dobijamo da su težine w_ν za težinsku funkciju $w(x) = w(2\pi - x)$, $x \in [0,2\pi)$, date sa

$$w_{2n-\nu} = \widetilde{w}_{2n-\nu} = \frac{\mu_0}{2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{A^S_{k+1/2}(\tau_{2n-\nu}+\pi)}{\prod_{j=2}^{k} \alpha_j^{(2)}} \right)^2} = \frac{\mu_0}{2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\widetilde{A}^S_{k+1/2}(\tau_{2n-\nu})}{\prod_{j=2}^{k} \widetilde{\alpha}_j^{(2)}} \right)^2},$$

za $\nu = 0,1,\ldots,n-1$, pri čemu smo iskoristili činjenicu iz leme 3.1 da se čvorovi menjaju prema aditivnom zakonu, i da je

$$\mu_0 = \int_0^{2\pi} \sin^2\frac{x}{2}\, w(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\frac{x}{2}\, \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, \widetilde{w}(\arccos x)\mathrm{d}x.$$

Kombinujući formule za težine dobijamo

$$\widetilde{w}_{2n-\nu} = \frac{\omega_{\nu+1}}{1 + x_{\nu+1}}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Pošto je formula simetrična, to je $\widetilde{w}_\nu = \widetilde{w}_{2n-\nu-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$. Konačno iz uslova

$$\sum_{\nu=0}^{2n} \widetilde{w}_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x,$$

jednostavno sledi

$$w_{2n} = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x - \sum_{\nu=0}^{2n-1} \widetilde{w}_\nu. \qquad \square$$

Analogno se dokazuje i sledeća lema.

Lema 3.4. *Neka je $\widetilde{w}$ parna težinska funkcija na intervalu $(-\pi, \pi)$ i neka su x_ν i ω_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, redom čvorovi i težine Gauss-ove kvadraturne formule sa n tačaka (konstruisane za algebarske polinome) u odnosu na težinsku funkciju $\widetilde{w}(\arccos x)\sqrt{(1-x)/(1+x)}$, $x \in (-1, 1)$. Tada za kvadraturnu formulu Gauss-ovog tipa* (3.4) *(za trigonometrijske polinome) u odnosu na težinsku funkciju $\widetilde{w}$ na $(-\pi, \pi)$ imamo*

$$\widetilde{w}_{2n-\nu} = \widetilde{w}_\nu = \frac{\omega_{\nu+1}}{1 - x_{\nu+1}}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \widetilde{w}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x - \sum_{\nu=0}^{2n-1} \widetilde{w}_\nu,$$

$$\tau_{2n-\nu} = -\tau_\nu = \arccos x_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \tau_n = 0.$$

3.1.2 Numerički primeri

U ovom odeljku daćemo nekoliko numeričkih primera.

Primer 3.1. *Neka je $w(x) = 1 + \sin mx$, $x \in [0, 2\pi)$, gde je $m \in \mathbb{N}$ neparan broj.*

Prema eksplicitnim formulama datim u teoremi 2.10 i u njenom dokazu, za $m \geq 3$ za sve $n \leq [m/2]$, ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A^C_{n+1/2}$ je oblika $A^C_{n+1/2}(x) = \cos(n + 1/2)x$. U tom slučaju, lako se dobijaju eksplicitne formule za čvorove x_ν i težine w_ν:

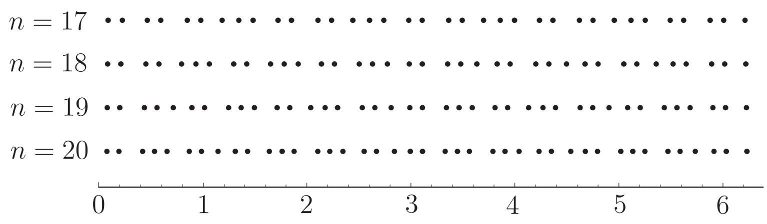
$$x_\nu = \frac{2\nu + 1}{2n + 1}\pi, \quad w_\nu = \frac{2\pi}{2n+1}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{3.12}$$

Lako se vidi da je zbir čvorova x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, datih sa (3.12), jednak $(2n + 1)\pi$.

Za $n > [m/2]$ čvorove računamo koristeći iterativni proces (3.8). Prvi korak je izbor početnih vrednosti $x_\nu^{(0)} \in (0, 2\pi)$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, iz kojih dobijamo startnu iteraciju $z_\nu^{(0)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_\nu^{(0)}}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$. Startne vrednosti $x_\nu^{(0)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, biramo tako da njihov zbir bude $(2n+1)\pi$. Za neke vrednosti $n > [m/2] + 1$, početne vrednosti $x_\nu^{(0)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, generišemo koristeći nule trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n-1/2}^C(x)$. Na osnovu velikog broja numeričkih eksperimenata primetili smo da za $n > [m/2] + 1$ nule imaju neku vrstu međusobnog razdvajanja (naravno, za $k = 0, 1, \ldots, [m/2]$ svi $A_{k+1/2}^C(x)$ imaju jednu zajedničku nulu $x_k = \pi$). Na slici 3.1 prikazane su nule ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}^C$ u odnosu na težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 15x$, za $n = 17(1)20$.

Ako su $\tau_0^{(n)} < \tau_1^{(n)} < \cdots < \tau_{2n}^{(n)}$ nule ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}^C(x)$, $n > [m/2] + 1$, tada za određivanje nula trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+3/2}^C(x)$ početne vrednosti $x_\nu^{(0)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n+2$, biramo tako da im zbir bude $(2n+3)\pi$ i da zadovoljavaju sledeći uslov

$$
\begin{aligned}
x_0^{(0)} < \tau_0^{(n)} < x_1^{(0)} < \tau_1^{(n)} < \cdots < \tau_n^{(n)} < x_{n+1}^{(0)} < x_{n+2}^{(0)} < \tau_{n+1}^{(n)} \\
< x_{n+3}^{(0)} < \cdots < \tau_{2n}^{(n)} < x_{2n+2}^{(0)}.
\end{aligned}
$$



Slika 3.1: Nule ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{n+1/2}^C$ u odnosu na težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 15x$, $x \in [0, 2\pi)$, za $n = 17(1)20$

Za koeficijente rekurentnih relacija (2.8) i (2.9) koristimo eksplicitne formule date u teoremi 2.10, odnosno u teoremi 2.9 za $m = 1$. U numeričkim eksperimentima ispostavlja se da je problem nalaženja dobrih početnih vrednosti komplikovaniji za male vrednosti m (na primer $m = 1, 3, 5$). Najjednostavnije početne vrednosti su

$$
x_\nu^{(0)} = \frac{2\nu + 1}{2n + 1}\pi, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n, \tag{3.13}
$$

(ekvidistantne tačke u intervalu $(0, 2\pi)$ i zbir im je $(2n+1)\pi$). Iterativni proces (3.8) sa startnom iteracijom $z_\nu^{(0)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_\nu^{(0)}}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, gde su $x_\nu^{(0)}$ dati sa (3.13) primenjivali smo u sledećim slučajevima:

- slučaj $m = 9$ za $5 \leq n \leq 45$;
- slučaj $m = 15$ za $8 \leq n \leq 25$ i za $n = 30(5)85$;
- slučaj $m = 75$ za $n \in \{38, 39, 40\}$ (broj iteracija jednak je 6) i za $n = 45(5)100$ (za sve ove vrednosti n broj iteracija je 5).

Međutim, u slučajevima $m = 1$, $m = 3$ i $m = 5$, početne vrednosti (3.13) možemo koristiti samo za $n < 10$, $n < 20$ i $n < 30$, respektivno. Za veće vrednosti n koristimo nule ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A^C_{n-1/2}$ da bi generisali startnu iteraciju.

U tabeli 3.1 dati su čvorovi x_ν i težine w_ν, kvadraturne formule Gauss-ovog tipa u odnosu na težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 15x$ za $n = 25$. Kako je $\mathrm{nzd}(2n + 1, m) = \mathrm{nzd}(51, 15) = 3$, to, prema teoremi 3.3, važi $w_\nu = w_{\nu+17j}$ i $x_{\nu+17j} = x_\nu + 2j\pi/3$, $j = 1, 2$, $\nu = 0, 1, \ldots, 16$. U tabeli 3.1 su dati čvorovi x_ν i težine $w_{17j+\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 16$, $j = 0, 1, 2$.

Tabela 3.1: Čvorovi x_ν i težine $w_{17j+\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 16$, $j = 0, 1, 2$, kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 15x$, $x \in [0, 2\pi)$, za $n = 25$

ν	x_ν	$w_{17j+\nu}$, $j = 0, 1, 2$
0	0.0734401134707617	0.1849824504539084
1	0.1720803992707313	0.1537846831517915
2	0.2993059533314362	0.0307792282514791
3	0.4461644342899088	0.1401732745185891
4	0.5445227530917630	0.1898081115080525
5	0.6414418782341709	0.0778455112386129
6	0.8337565680606713	0.0908209422996504
7	0.9305122558894531	0.1925521119018577
8	1.0284562970240495	0.1271338202783832
9	1.1941155620071260	0.0374793000746708
10	1.3057227567822522	0.1667479588549361
11	1.4044808463174123	0.1773988199716636
12	1.5068361968932778	0.0494873674658285
13	1.6866505393455060	0.1148661358623812
14	1.7841265106107811	0.1937788694612881
15	1.8811643708168992	0.1029645966854189
16	2.0695809349059611	0.0637919204146833

Primer 3.2. *Neka je $w(x) = 1 + \sin mx$, gde je $m \in \mathbb{N}$ paran broj.*

Prema eksplicitnim formulama datim u teoremi 2.11 i u njenom dokazu, u slučaju $m \geq 4$, za sve prirodne brojeve $n \leq m/2 - 1$ je $A^C_{n+1/2}(x) = \cos(n + 1/2)x$, pa su čvorovi x_ν i težine w_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, date sa (3.12).

Tabela 3.2: Čvorovi x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 50x$, $x \in [0, 2\pi)$, za $n = 25$

ν	x_ν	$x_{17+\nu}$	$x_{34+\nu}$
0	0.0437696975461690	2.1636406417855051	4.2651012450237054
1	0.1680572310428011	2.2883880600363662	4.3852058050373930
2	0.2924577772609259	2.4130974373388425	4.5046039583815650
3	0.4169517048517318	2.5377596507423607	4.6234496920089237
4	0.5415228156521995	2.6623641411606281	4.7420276283431659
5	0.6661575921351178	2.7868985020797753	4.8606971330055078
6	0.7908446090617998	2.9113479584697332	4.9797911584537416
7	0.9155740710944654	3.0356947016184854	5.0995317482730982
8	1.0403374458729844	3.1599170377010471	5.2200072319479234
9	1.1651271687302412	3.2839883015926769	5.3412019414901779
10	1.2899364005225395	3.4078754885382263	5.4630423375637033
11	1.4147588240731420	3.5315375783972615	5.5854341400227252
12	1.5395884676639467	3.6549236000621025	5.7082840158088338
13	1.6644195460588000	3.7779706681729619	5.8315092331359442
14	1.7892463108602127	3.9006026336522674	5.9550403615334283
15	1.9140629026986649	4.0227307996524905	6.0788207018859129
16	2.0388631978902007	4.1442595261254562	6.2028045110215764

Tabela 3.3: Težine w_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 50x$, $x \in [0, 2\pi)$, za $n = 25$

ν	w_ν	$w_{17+\nu}$	$w_{34+\nu}$
0	0.1242234407383922	0.1247636888477994	0.1204763708301496
1	0.1243476420018499	0.1247298161762916	0.1197370793194431
2	0.1244501944630916	0.1246874233622537	0.1190846784234882
3	0.1245349734569849	0.1246352503882133	0.1186551985157037
4	0.1246050049375511	0.1245716712995453	0.1185624353256949
5	0.1246626514561804	0.1244945990189778	0.1188336003611944
6	0.1247097559001120	0.1244013597149017	0.1193917984733010
7	0.1247477509830184	0.1242885289281262	0.1201035034380715
8	0.1247777417982283	0.1241517217768391	0.1208440219991488
9	0.1248005674244240	0.1239853332159593	0.1215325114340890
10	0.1248168462168162	0.1237822367135557	0.1221322173565282
11	0.1248270082283731	0.1235334819122534	0.1226356842093022
12	0.1248313172236255	0.1232281062294575	0.1230502424417207
13	0.1248298839460249	0.1228533330493070	0.1233886346224002
14	0.1248226716326329	0.1223957327593081	0.1236642040515870
15	0.1248094941871655	0.1218444226955629	0.1238888869081770
16	0.1247900068753692	0.1211979506978345	0.1240726312135605

Za $n \geq m/2$ čvorove računamo korišćenjem iterativnog procesa (3.8). Situacija sa startnim iteracijama je slična kao u primeru 3.1. U sledećim slučajevima smo koristili početne vrednosti (3.13):

- slučaj $m = 10$ za $5 \leq n \leq 50$;

- slučaj $m = 50$ za $n = 25(5)100$ (za $n = 25$ broj iteracija je 6, a za $n = 30(5)100$ broj iteracija je 5);
- slučaj $m = 100$ za $n = 50(5)100$ (za $n = 50$ i $n = 55$ broj iteracija je 6, a za $n = 60(5)100$ broj iteracija je 5).

U slučaju $m = 4$ početne vrednosti (3.13) možemo koristiti za $n \leq 22$, dok u slučaju $m = 2$ možemo koristiti startne vrednosti (3.13) samo za $n \leq 2$. Za veće vrednosti n početne iteracije generišemo pomoću nula ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A^C_{n-1/2}$.

U tabeli 3.2 i tabeli 3.3 dati su čvorovi x_ν i težine w_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 50x$, $x \in [0, 2\pi)$, za $n = 25$.

Napomena. Da bi koristili nule trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A^C_{n-1/2}$ za generisanje startnih vrednosti za računanje nula trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A^C_{n+1/2}$, moramo konstruisati niz kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa (3.6) tačnih na nizu prostora $\mathcal{T}_{2k}$, $1 \leq k \leq n$. Tada je ukupan broj operacija u našem algoritmu jednak $O(n^3)$.

3.2 Analiza različitih metoda

Na kraju ćemo ukratko uporediti opisani metod sa ostalim dostupnim metodima za konstrukciju kvadraturnih formula sa maksimalnim trigonometrijskim stepenom tačnosti. Ivan Petrovich Mysovskikh je u radovima [72] i [73] razmatrao aproksimaciju integrala oblika

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) w(x) \, \mathrm{d}x,$$

kvadraturnom sumom $\sum_{j=0}^{n} C_j f(x_j)$, kojom se integrali računaju tačno za sve $f \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Njegov pristup je baziran na reprodukcionom jezgru $S_n(a, x)$, gde je $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1}$ unapred fiksirano i $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Reprodukciono jezgro je sledećeg oblika

$$S_n(a, z) = -\frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} d_0 & d_{-1} & \cdots & d_{-n} & 1 \\ d_1 & d_0 & \cdots & d_{-n+1} & \overline{a} \\ \vdots & & & & \\ d_n & d_{n-1} & \cdots & d_0 & \overline{a}^n \\ 1 & z & \cdots & z^n & 0 \end{vmatrix}, \quad D_n = \begin{vmatrix} d_0 & d_{-1} & \cdots & d_{-n} \\ d_1 & d_0 & \cdots & d_{-n+1} \\ \vdots & & & \\ d_n & d_{n-1} & \cdots & d_0 \end{vmatrix},$$

gde su d_k, $k = -n, \ldots, n$, momenti dati sa

$$d_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{z}^k w(x) \, \mathrm{d}x, \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad d_{-k} = \overline{d_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Čvorovi kvadraturne formule sa maksimalnim trigonometrijskim stepenom tačnosti su nule reprodukcionog jezgra $S_n(a,z)$, koje je algebarski polinom stepena n. U [72] i [73] reprodukciono jezgro se generiše u razvijenom obliku, a koeficijenti polinoma dobijaju se kao količnici dve determinante reda $n+1$. Rezultati Mysovskikh-og imaju veliki teorijski značaj, ali njegov pristup nije pogodan za numerička izračunavanja jer zahteva računanje $n+2$ determinante reda $n+1$, a pritom se dobijaju polinomi u razvijenom obliku. Ako su momenti d_k, $k=0,1,\ldots,n$, poznati, tada možemo izračunati i koeficijente rekurentnih relacija (2.10).

Za paran trigonometrijski stepen tačnosti n može se primeniti i pristup dat u [71] za algebarske kubaturne formule. Da bi odredili čvorove potrebno je konstruisati dva kvazi-otogonalna trigonometrijska polinoma stepena $n/2+1$ (ortogonalna na $\mathcal{T}_{n/2-1}$), i izračunati $n+1$ zajedničku nulu tih trigonometrijskih polinoma, umesto nula jednog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena u našem algoritmu.

Slučaj neparnog trigonometrijskog stepena tačnosti n razmatran je u [8], gde je pokazano da su čvorovi nule tzv. bi–ortogonalnih trigonometrijskih polinoma (videti i [89]).

Gauss-Szegő-ve kvadraturne formule sa n čvorova (videti npr. [36], [40], [35]) su oblika

$$S_\tau(f)=\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu f(\lambda_\nu),$$

gde su sve težine w_ν, $\nu=1,\ldots,n$, pozitivne i čvorovi λ_ν, $\nu=1,\ldots,n$, su različite tačke sa jediničnog kruga, a karakterišu se osobinom da je

$$S_\tau(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})w(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{za sve} \ \ f\in\Lambda_{-(n-1),n-1},$$

gde je $w(x)$ integrabilna i nenegativna funkcija na $[-\pi,\pi)$, jednaka nuli samo na skupu mere nula i $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ označava skup Laurent-ovih polinoma

$$L_{n-1}(z)=\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} c_k z^k, \quad c_k\in\mathbb{C}$$

stepena ne višeg od $n-1$. Laurent-ov polinom $L_{n-1}(z)$ sa $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ može se prikazati kao trigonometrijski polinom stepena ne višeg od $n-1$. Dakle, Gauss-Szegő-va kvadraturna formula sa n tačaka integrali tačno sve trigonometrijske polinome stepena ne višeg od $n-1$. Čvorovi takve kvadraturne formule su nule tzv. para-ortogonalnih polinoma, datih sa

$$\widehat{\psi}_n(z)=z\psi_{n-1}(z)+\tau\psi^*_{n-1}(z),$$

gde je $\psi_k(z)$ moničan Szegő-v polinom stepena k, $\psi_k^*(z) = z^k\overline{\psi}_k(z^{-1})$ i τ proizvoljna fiksirana tačka sa jediničnog kruga (videti [35], [36], [40], [88], [85], [8]). Monični Szegő-vi polinomi zadovoljavaju rekurentnu relaciju oblika

$$\begin{aligned}
&\psi_0(z) = \psi_0^*(z) = 1,\\
&\psi_j(z) = z\psi_{j-1}(z) + \gamma_j\psi_{j-1}^*(z), \quad j = 1, 2, 3, \ldots,\\
&\psi_j^*(z) = \overline{\gamma}_j z\psi_{j-1}(z) + \psi_{j-1}^*(z).
\end{aligned}$$

Čvorovi Gauss-Szegő-ve kvadraturne formule su sopstvene vrednosti unitarne gornje Hessenbergove matrice $H_n(\tau)$, određene parametrom τ sa jediničnog kruga i rekurzivnim koeficijentima $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, a težine su određene kvadratom prvih komponenti odgovarajućih normiranih sopstvenih vektora (videti npr. [35], [36], [40]). Matrica $H_n(\tau)$ data je sa $H_n(\tau) = D_n^{-1/2}\widehat{H}_n(\tau)D_n^{1/2}$, gde je

$$\widehat{H}_n(\tau) = \begin{bmatrix} -\overline{\gamma}_0\gamma_1 & -\overline{\gamma}_0\gamma_2 & \cdots & -\overline{\gamma}_0\gamma_{n-1} & -\overline{\gamma}_0\tau \\ 1-|\gamma_1|^2 & -\overline{\gamma}_1\gamma_2 & \cdots & -\overline{\gamma}_1\gamma_{n-1} & -\overline{\gamma}_1\tau \\ 0 & 1-|\gamma_2|^2 & \cdots & -\overline{\gamma}_2\gamma_{n-1} & -\overline{\gamma}_2\tau \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1-|\gamma_{n-1}|^2 & -\overline{\gamma}_{n-1}\tau \end{bmatrix},$$

$\gamma_0 = 1$, $D_n = \operatorname{diag}[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}]$, $\delta_0 = 1$ i $\delta_j = \delta_{j-1}(1 - |\gamma_j|^2)$, $j = 1, \ldots, n-1$. Postoji nekoliko algoritama za rešavanje problema sopstvenih vrednosti za ovakav tip matrica (videti [26], [25], [24]). Ukupan broj operacija ovih metoda je $O(n^3)$, a u određenim slučajevima se može smanjiti na $O(n^2)$ operacija.

Mi smo se u ovoj disertaciji, razvijajući metod koji je dao Turetzkii u [91], ograničili samo na konstrukciju kvadraturnih formula sa maksimalnim trigonometrijskim stepenom tačnosti sa neparnim brojem čvorova (tj. sa parnim trigonometrijskim stepenom tačnosti). Za slučaj parnog broja čvorova kvadraturne formule se mogu konstruisati na sličan način koristeći trigonometrijske polinome umesto trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena.

Za dobijanje odgovarajućih ortogonalnih sistema koristimo rekurentne relacije, čime je isključena numerička nestabilnost karakteristična za Gramm-Schmidt-ov metod ortogonalizacije. Takođe, rekurentne relacije obezbeđuju stabilan način za računanje vrednosti trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena u nekoj fiksiranoj tački nasuprot korišćenju razvijenog oblika.

Ovaj metod je zapravo simulacija razvoja Gauss-ovih kvadraturnih formula za algebarske polinome. Pokazano je i kako se u slučaju simetričnih težinskih funkcija kvadraturne formule Gauss-ovog tipa mogu konstruisati koristeći ortogonalne algebarske polinome na realnoj pravoj.

Takođe, naš metod se može proširiti na kvadraturne formule sa višestrukim čvorovima sa maksimalnim trigonometrijskim stepenom tačnosti, što će biti urađeno u poglavlju 3.3.

3.3 Kvadraturne formule sa višestrukim čvorovima

Ghizzetti i Ossicini su u [21] razmatrali interpolacione kvadraturne formule sa višestrukim čvorovima za težinsku funkciju $w(x) = 1$, $x \in [-\pi, \pi)$, pri čemu svi čvorovi imaju istu višestrukost, tj. kvadraturne formule oblika

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2s} A_{j,\nu} f^{(j)}(x_\nu) + R(f), \tag{3.14}$$

gde je $s \in \mathbb{N}_0$. Maksimalni trigonometrijski stepen tačnosti takvih kvadraturnih formula je $(2n+1)(s+1)-1$, tj. $R(f) = 0$ za sve $f \in \mathcal{T}_{(2n+1)(s+1)-1}$. Pokazano je da će trigonometrijski stepen tačnosti biti maksimalan ako se čvorovi $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ izaberu tako da važi (videti [21])

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{\nu=0}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2}\right)^{2s+1} \cos\left(\ell + \frac{1}{2}\right) x\,\mathrm{d}x = 0, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{\nu=0}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2}\right)^{2s+1} \sin\left(\ell + \frac{1}{2}\right) x\,\mathrm{d}x = 0, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Očigledo je za $s = 0$ maksimalni trigonometrijski stepen tačnosti kvadraturne formule (3.14) jednak $2n$, tj. kvadraturna formula (3.14) se svodi na kvadraturnu formulu Gauss-ovog tipa (3.6).

Proizvod $\prod_{\nu=0}^{2n} \sin(x - x_\nu)/2$ je trigonometrijski polinom polu–celobrojnog stepena $n + 1/2$. Prema tome, čvorovi $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ kvadraturne formule (3.14) poklapaju se sa nulama trigonometrijskog polinoma polu–celobrojnog stepena $n + 1/2$ takvog da je njegov $(2s + 1)$-vi stepen ortogonalan na intervalu $[-\pi, \pi)$ u odnosu na težinsku funkciju $w(x) = 1$ na svim trigonometrijskim polinomima polu-celobrojnog stepena iz $\mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$. Ghizzeti i Ossicini su u [21] pokazali da je takav trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena oblika

$$c\cos(n + 1/2)x + d\sin(n + 1/2)x, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Dryanov je u radu [12] generalisao kvadraturne formule (3.14) na taj način što je posmatrao kvadraturne formule u kojima čvorovi imaju različite višestrukosti. Zapravo, posmatrao je kvadraturne formule sledećeg oblika

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2s_\nu} A_{j,\nu} f^{(j)}(x_\nu) + R(f), \tag{3.15}$$

$s_\nu \in \mathbb{N}_0$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, takve da je $R(f) = 0$ kad je f trigonometrijski polinom stepena ne višeg od $\sum_{\nu=0}^{2n}(s_\nu+1)-1$. Maksimalni trigonometrijski stepen tačnosti kvadraturne formule (3.15) je $\sum_{\nu=0}^{2n}(s_\nu + 1) - 1$. U slučaju kada je $s_0 = s_1 = \cdots = s_{2n} = s$, kvadraturna formula (3.15) svodi se na (3.14).

Kvadraturne formule (3.14) i (3.15) generališemo tako što umesto težinske funkcije $w(x) = 1$ posmatramo proizvoljnu nenegativnu integrabilnu težinsku funkciju na intervalu $[-\pi, \pi)$, koja je jednaka nuli samo na skupu mere nula. Za konstrukciju takvih kvadraturnih formula potrebni su nam s, odnosno $\sigma-$ortogonalni trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena.

3.3.1 $S-$ortogonalni trigonometrijski polinomi

Neka je w data težinska funkcija na $[-\pi, \pi)$, $s \in \mathbb{N}_0$, i neka su data dva niza realnih brojeva $\{c_n\}$ i $\{d_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, takvi da je $(c_n, d_n) \neq (0, 0)$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Želimo da konstruišemo niz $\{A_{s,n+1/2}(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, gde je $A_{s,n+1/2}(x)$ trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $n+1/2$ sa vodećim koeficijentima c_n i d_n, tj. $A_{s,n+1/2}(x) = c_n \cos(n + 1/2)x + d_n \sin(n + 1/2)x + \cdots$, takav da zadovoljava sledeće uslove ortogonalnosti

$$\int_{-\pi}^{\pi} (A_{s,n+1/2}(x))^{2s+1} A_{s,m+1/2}(x)\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{za sve } m < n,\ m \in \mathbb{N}_0,$$

odnosno

$$\int_{-\pi}^{\pi} (A_{s,n+1/2}(x))^{2s+1} \Pi_{n-1/2}(x)\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{3.16}$$

za sve $\Pi_{n-1/2}(x) \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$.

Takve trigonometrijske polinome polu-celobrojnog stepena zvaćemo $s-$*ortogonalnim trigonometrijskim polinomima polu-celobrojnog stepena* u odnosu na težinsku funkciju w na $[-\pi, \pi)$. Dokažimo prvo egzistenciju i jedinstvenost takvih trigonometrijskih funkcija.

Teorema 3.4. *Postoji jedinstveni niz $\{A_{s,n+1/2}(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ $s-$ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena, sa datim vodećim koeficijentima, u odnosu na težinsku funkciju w na $[-\pi, \pi)$.*

Dokaz. Za dokaz egzistencije i jedinstvenosti $s-$ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{s,n+1/2}(x)$ iskoristićemo neke dobro poznate činjenice vezane za najbolje aproksimacije (videti [11, p. 58–60]).

Neka je X Banach-ov prostor sa realnim ili kompleksnim skalarima, a Y zatvoreni potprostor prostora X. Za svako $f \in X$, greška aproksimacije elementa f elementima potprostora Y je $E(f) = \inf_{g\in Y} \|f - g\|$. Ako se infimum dostiže za neko $g = g_0$, tada se g_0 zove *najbolja aproksimacija* za f iz Y. Za svaki konačno dimenzionalni potprostor X_n prostora X i svako $f \in X$, postoji najbolja aproksimacija za f iz X_n. Ako je X striktno konveksan prostor (koje karakteriše svojstvo $f_1 \neq f_2,\ \|f_1\| = \|f_2\| = 1,\ \alpha_1, \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\| < 1$), tada svako $f \in X$ ima najviše jedan element najbolje aproksimacije u svakom linearnom potprostoru $Y \subset X$.

Mi ćemu uzeti $X = L^{2s+2}[-\pi, \pi]$,

$$u = w(x)^{1/(2s+2)}(c_n \cos(n + 1/2)x + d_n \sin(n + 1/2)x) \in L^{2s+2}[-\pi, \pi],$$

i fiksirati sledećih $2n$ linearno nezavisnih elemenata u $L^{2s+2}[-\pi, \pi]$:

$$u_j = w(x)^{1/(2s+2)} \cos(j + 1/2)x, \quad v_j = w(x)^{1/(2s+2)} \sin(j + 1/2)x,$$

gde je $j = 0, 1, \dots, n-1$. Obeležimo $Y = \mathfrak{L}\{u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}\}$. Kako je Y konačno dimenzionalni potprostor prostora X, to za svaki vektor iz X postoji najbolja aproksimacija iz Y, tj. postoji $2n$ konstanti α_j, β_j, $j = 0, 1, \dots, n-1$, takvih da je greška

$$\left\| u - \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_j u_j + \beta_j v_j) \right\| = \Bigg(\int_{-\pi}^{\pi} \bigg(c_n \cos(n + 1/2)x + d_n \sin(n + 1/2)x$$
$$- \sum_{j=0}^{n-1} \big(\alpha_j \cos(j + 1/2)x + \beta_j \sin(j + 1/2)x \big) \bigg)^{2s+2} w(x) \mathrm{d}x \Bigg)^{1/(2s+2)},$$

minimalna, tj. za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i svaki izbor vodećih koeficijenata $(c_n, d_n) \neq (0, 0)$, postoji trigonometrijski polinom polu–celobrojnog stepena $n + 1/2$

$$\begin{aligned} A_{s,n+1/2}(x) = {} & c_n \cos(n + 1/2)x + d_n \sin(n + 1/2)x \\ & - \sum_{j=0}^{n-1} \big(\alpha_j \cos(j + 1/2)x + \beta_j \sin(j + 1/2)x \big), \end{aligned}$$

takav da je integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} (A_{s,n+1/2}(x))^{2s+2}\, w(x) \mathrm{d}x$$

minimalan. Pošto je prostor $L^{2s+2}[-\pi, \pi]$ striktno konveksan to posmatrani problem najbolje aproksimacije ima jedinstveno rešenje.

Svaka od sledećih $2n$ funkcija

$$F_j^C(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(A_{s,n+1/2}(x) + \lambda \cos(j + 1/2)x \big)^{2s+2} w(x) \mathrm{d}x, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$
$$F_j^S(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(A_{s,n+1/2}(x) + \lambda \sin(j + 1/2)x \big)^{2s+2} w(x) \mathrm{d}x, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

za $\lambda = 0$ mora imati izvod jednak nuli. Odatle dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} (A_{s,n+1/2}(x))^{2s+1} \sin(j+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad j = 0,1,\ldots,n-1, \tag{3.17}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (A_{s,n+1/2}(x))^{2s+1} \cos(j+1/2)x\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad j = 0,1,\ldots,n-1, \tag{3.18}$$

što znači da $A_{s,n+1/2}(x)$ zadovoljava uslove ortogonalnosti (3.16). $\square$

Teorema 3.5. *$S-$ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{s,n+1/2}(x)$ u odnosu na težinsku funkciju w na $[-\pi,\pi)$, ima tačno $2n+1$ različitih prostih nula u intervalu $[-\pi,\pi)$.*

Dokaz. Primetimo najpre da $A_{s,n+1/2}(x)$ ima u intervalu $[-\pi,\pi)$ bar jednu nulu neparne višestrukosti. Ako pretpostavimo suprotno, za $n \geq 1$ dolazimo do kontradikcije sa (3.16)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (A_{s,n+1/2}(x))^{2s+1} \cos\frac{x}{2}\, w(x)\mathrm{d}x \neq 0,$$

jer tada $A_{s,n+1/2}(x)\cos x/2$ ne menja znak na $[-\pi,\pi)$.

Pretpostavimo da $A_{s,n+1/2}(x)$ u $[-\pi,\pi)$ ima $2m-1$ nula neparne višestrukosti, pri čemu je $m \leq n$. Obeležimo te nule redom sa $y_1,\ldots,y_{2m-1}$ i definišimo

$$\Pi(x) = \prod_{k=1}^{2m-1} \sin\frac{x-y_k}{2}.$$

Kako je $\Pi(x) \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$, moralo bi da važi $\int_{-\pi}^{\pi}(A_{s,n+1/2}(x))^{2s+1}\Pi(x)\, w(x)\mathrm{d}x = 0$, ali to nije moguće jer integrand ne menja znak na $[-\pi,\pi)$.

Ako pretpostavimo da $A_{s,n+1/2}(x)$ u $[-\pi,\pi)$ ima $2m$, $m \leq n-1$, nula neparne višestrukosti, obeležimo ih sa $y_1,\ldots,y_{2m}$ i definišemo

$$\Pi(x) = \cos\frac{x}{2}\prod_{k=1}^{2m} \sin\frac{x-y_k}{2},$$

opet dolazimo do kontradikcije.

Konačno, $A_{s,n+1/2}(x)$ ne može imati ni $2n$ nula neparne višestrukosti u $[-\pi,\pi)$. Pretpostavimo suprotno i obeležimo te nule sa $y_1,\ldots,y_{2n}$, pri čemu je $y_1 < \cdots < y_{2n}$. Ako je $y_1 = -\pi$ uzimajući

$$\Pi(x) = \prod_{k=2}^{2n} \sin\frac{x-y_k}{2}$$

takođe dobijamo kontradikciju jer je $\Pi(x) \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$. Međutim, ni slučaj $y_1 \neq -\pi$ nije moguć jer, prema (2.3), važi $A_{s,n+1/2}(-\pi) = -A_{s,n+1/2}(\pi)$, pa $A_{s,n+1/2}(x)$ mora imati neparan broj promena znaka.

Prema tome $A_{s,n+1/2}$ mora imati $2n+1$ nulu neparne višestrukosti, tj. ima $2n+1$ prostu nulu u $[-\pi, \pi)$. $\square$

Slično kao u dokazu teoreme 3.4 može se dokazati da za bilo koji prirodan broj n postoji jedinstveni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $n+1/2$ oblika

$$A_{s,n+1/2}^{C}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_{\nu}^{(n)} \cos(\nu + 1/2)x,$$

koji zavisi samo od kosinusnih funkcija, sa datim vodećim koeficijentom $c_n^{(n)}$, takav da je njegov $(2s+1)$-vi stepen ortogonalan na svim $\cos(k+1/2)x$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, u odnosu na težinsku funkciju w na $[-\pi, \pi)$. Takođe, za sve $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $n + 1/2$ oblika koji se sastoji samo od sinusnih funkcija, tj. oblika

$$A_{s,n+1/2}^{S}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} d_{\nu}^{(n)} \sin(\nu + 1/2)x,$$

sa datim vodećim koeficijentom $d_n^{(n)}$, takav da je njegov $(2s+1)$-vi stepen ortogonalan na svim $\sin(k+1/2)x$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, u odnosu na w na $[-\pi, \pi)$.

Parna težinska funkcija na $(-\pi, \pi)$

Razmotrimo sada slučaj kada je težinska funkcija w parna na $(-\pi, \pi)$, tj. kada je $w(-x) = w(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$. Kao i u slučaju ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena i $s-$ortogonalni trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena se svode na algebarske polinome.

Dokazaćemo najpre sledeću jednostavnu lemu.

Lema 3.5. *Ako je težinska funkcija w parna na $(-\pi, \pi)$, tada se $s-$ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{s,n+1/2}^{1,0}$ sa vodećim koeficijentima $c_n = 1$ i $d_n = 0$ poklapa sa $A_{s,n+1/2}^{C}$ sa vodećim koeficijentom $c_n^{(n)} = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Takođe, $s-$ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{s,n+1/2}^{0,1}$ sa vodećim koeficijentima $c_n = 0$ i $d_n = 1$ se poklapa sa $A_{s,n+1/2}^{S}$ sa vodećim koeficijentom $d_n^{(n)} = 1$.*

Dokaz. Kako su $A_{s,n+1/2}^{C}$ i w parne funkcije, zaključujemo da je $A_{s,n+1/2}^{C}$ ortogonalan na neparnim funkcijama $\sin(k+1/2)x$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ u odnosu na težinsku funkciju w na simetričnom intervalu $(-\pi,\pi)$. Prema tome, $A^C_{s,n+1/2}$ zadovoljava uslove $s-$ortogonalnosti (3.16). Sem toga, $A^C_{s,n+1/2}$ je trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $n+1/2$ sa vodećim koeficijentima $c_n=1$ i $d_n=0$. Prema dokazanoj jedinstvenosti $s-$ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena zaključujemo da se $A^{1,0}_{s,n+1/2}$ i $A^C_{s,n+1/2}$ poklapaju.

Tvrđenje za $A^S_{s,n+1/2}$ se slično dokazuje. $\square$

Teorema 3.6. *Nule $s-$ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{s,n+1/2}$, sa vodećim koeficijentima $c_n=1$ i $d_n=0$, u odnosu na parnu težinsku funkciju w na $(-\pi,\pi)$, date su sa*

$$x_0=-\pi,\quad x_{2n+1-\nu}=-x_\nu=\arccos\tau_\nu,\quad \nu=1,\ldots,n,$$

gde su τ_ν, $\nu=1,\ldots,n$, nule $s-$ortogonalnog algebarskog polinoma C_n u odnosu na težinsku funkciju $\sqrt{(1+x)^{2s+1}/(1-x)}\,w(\arccos x)$ na $(-1,1)$.

Dokaz. Prema lemi 3.5, $A_{s,n+1/2}$, $n\in\mathbb{N}_0$, je parna funkcija oblika

$$A_{s,n+1/2}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu^{(n)}\cos(\nu+1/2)x,\quad c_n^{(n)}=1.$$

Očigledno je $A_{s,n+1/2}(-\pi)=0$, tj. $x_0=-\pi$. Kako je $A_{s,n+1/2}(-x)=A_{s,n+1/2}(x)$, preostale nule su simetrične u intervalu $(-\pi,\pi)$. Iz uslova $s-$ortogonalnosti za $A_{s,n+1/2}$ imamo

$$\int_0^\pi (A_{s,n+1/2}(x))^{2s+1}A_{s,k+1/2}(x)\,w(x)\mathrm{d}x=0,\quad n\in\mathbb{N},\ k=0,1,\ldots,n-1. \tag{3.19}$$

Uvodeći smenu $x:=\arccos x$, dobijamo (videti teoremu 2.8)

$$A_{s,k+1/2}(\arccos x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}C_k(x),\quad C_k(x)=\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu^{(k)}(T_\nu(x)-(1-x)U_{\nu-1}(x)),$$

gde su T_ν i U_ν, $\nu\in\mathbb{N}_0$, Chebyshev-ljevi polinomi prve i druge vrste, respektivno. Iz (3.19) dobijamo

$$\int_{-1}^{1}(C_n(x))^{2s+1}C_k(x)\sqrt{\frac{(1+x)^{2s+1}}{1-x}}\,w(\arccos x)\mathrm{d}x=0,\ n\in\mathbb{N},\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

Iz dobro poznate činjenice da $s-$ortogonalni algebarski polinom C_n ima n prostih nula u intervalu $(-1,1)$ (teorema 1.11) sledi tvrđenje teoreme. $\square$

Analogno se dokazuje i sledeći rezultat.

Teorema 3.7. *Nule $s-$ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{s,n+1/2}$, sa vodećim koeficijentima $c_n = 0$ i $d_n = 1$, u odnosu na parnu težinsku funkciju w na $(-\pi, \pi)$, date su sa*

$$x_0 = 0, \quad x_{2n+1-\nu} = -x_\nu = \arccos \tau_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

gde su τ_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, nule $s-$ortogonalnog algebarskog polinoma S_n u odnosu na težinsku funkciju $\sqrt{(1-x)^{2s+1}/(1+x)}w(\arccos x)$ na $(-1, 1)$.

Daćemo na kraju nekoliko napomena za težinsku funkciju $w(x) = 1$, $x \in (-\pi, \pi)$. Neka su $A^{1,0}_{s,n+1/2}$ i $A^{0,1}_{s,n+1/2}$ $s-$ortogonalni trigonometrijski polinomi polu-celobrojnog stepena sa vodećim koeficijentima $c_n = 1$, $d_n = 0$ i $c_n = 0$, $d_n = 1$, respektivno. Na osnovu teorema 3.6 i 3.7 je

$$A^{1,0}_{s,n+1/2}(\arccos x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}\, C_n(x), \quad A^{0,1}_{s,n+1/2}(\arccos x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}\, S_n(x),$$

gde su $C_n(x)$ i $S_n(x)$ $s-$ortogonalni algebarski polinomi na $(-1, 1)$ u odnosu na težinske funkcije

$$w_3(t) = (1+t)^{1/2+s}(1-t)^{-1/2} \quad \text{and} \quad w_4(t) = (1-t)^{1/2+s}(1+t)^{-1/2},$$

respektivno. Poznato je (videti [76]) da su Chebyshev-ljevi polinomi treće vrste V_n i četvrte vrste W_n, definisani sa

$$V_n(x) = \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}, \quad W_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad x = \cos\theta,$$

$s-$ortogonalni polinomi u odnosu na težine w_3 i w_4, respektivno. Prema tome,

$$A^{1,0}_{s,n+1/2}(x) = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \quad A^{0,1}_{s,n+1/2}(x) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Sada se lako vidi da su nule iz intervala $[-\pi, \pi)$ trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A^{1,0}_{s,n+1/2}$ date sa

$$x_0 = -\pi, \quad x_{2n+1-\nu} = -x_\nu = \frac{2\nu+1}{2n+1}\pi, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

a trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A^{0,1}_{s,n+1/2}$ sa

$$x_0 = 0, \quad x_{2n+1-\nu} = -x_\nu = \frac{2\nu}{2n+1}\pi, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

3.3.2 Kvadraturne formule kod kojih svi čvorovi imaju istu višestrukost

Posmatrajmo najpre kvadraturne formule oblika

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,w(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2s} A_{j,\nu} f^{(j)}(x_\nu) + R(f), \quad s \geq 0, \tag{3.20}$$

kod kojih je $R(f) = 0$ za sve $f(x) \in \mathcal{T}_{(2n+1)(s+1)-1}$.

Definišimo sledeći granični problem

$$E(f) = 0, \quad f^{(j)}(x_\nu) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, 2s,\ \nu = 0, 1, \ldots, 2n, \tag{3.21}$$

gde je

$$E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\prod_{k=1}^{(2n+1)(s+1)-1}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + k^2\right),$$

i $f \in AC^{N-1}[-\pi, \pi]$. E je diferencijalni operator reda $N = (2n+1)(2s+2) - 1$.

Za $n > 0$ i $s \geq 0$ granični problem (3.21) ima $2n$ linearno nezavisnih netrivijalnih rešenja:

$$U_\ell(x) = \left(\prod_{\nu=0}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2}\right)^{2s+1} \cos\left(\ell + \frac{1}{2}\right)x, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$V_\ell(x) = \left(\prod_{\nu=0}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2}\right)^{2s+1} \sin\left(\ell + \frac{1}{2}\right)x, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Prema teoremi 1.17, čvorovi $x_0, \ldots, x_{2n}$ kvadraturne formule (3.20) moraju zadovoljavati uslove

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_{\nu=0}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2}\right)^{2s+1} \cos\left(\ell + \frac{1}{2}\right)x\,w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_{\nu=0}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2}\right)^{2s+1} \sin\left(\ell + \frac{1}{2}\right)x\,w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1,$$

što znači da se čvorovi kvadraturne formule (3.20) moraju poklapati sa nulama $s-$ortogonalnog trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{s,n+1/2}$, u odnosu na težinsku funkciju w na intervalu $[-\pi, \pi)$. Ako su vodeći koeficijenti trigonometrijskog polinoma polu-celobrojnog stepena $A_{s,n+1/2}$ unapred fiksirani (odnosno ako je jedan čvor unapred fiksiran), kvadraturna formula (3.20) je jedinstvena, jer je, prema oznakama datim u teoremi 1.17,

$$m(N - p) - N + q = (2n+1)(2s+1) - ((2n+1)(2s+2) - 1) + 2n = 0.$$

Kada odredimo čvorove kvadraturne formule (3.20), onda možemo da računamo i težine $A_{j,\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, $j = 0, 1, \ldots, 2s$. Računanje težina će biti detaljnije analizirano u odeljku 3.3.4.

3.3.3 Kvadraturne formule kod kojih čvorovi imaju različite višestrukosti

Posmatrajmo sada kvadraturne formule oblika

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, w(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2s_\nu} A_{j,\nu} f^{(j)}(x_\nu) + R(f), \tag{3.22}$$

gde su $s_\nu \in \mathbb{N}_0$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$ i koje imaju trigonometrijski stepen tačnosti $\sum_{\nu=0}^{2n}(s_\nu + 1) - 1$. Obeležimo $\sigma = (s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$.

Definišimo granični diferencijalni problem

$$E(f) = 0, \quad f^{(j)}(x_\nu) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, 2s_\nu,\ \nu = 0, 1, \ldots, 2n, \tag{3.23}$$

gde je

$$E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \prod_{k=1}^{N_1} \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + k^2 \right), \quad N_1 = \sum_{\nu=0}^{2n} (s_\nu + 1) - 1.$$

Očigledno je E diferencijalni operator reda $N = \sum_{\nu=0}^{2n}(2s_\nu + 2) - 1$.

Granični problem (3.23) ima sledećih $2n$ linearno nezavisnih netrivijalnih rešenja

$$U_\ell(x) = \prod_{\nu=0}^{2n} \left(\sin \frac{x - x_\nu}{2} \right)^{2s_\nu+1} \cos \left(\ell + \frac{1}{2} \right) x, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$V_\ell(x) = \prod_{\nu=0}^{2n} \left(\sin \frac{x - x_\nu}{2} \right)^{2s_\nu+1} \sin \left(\ell + \frac{1}{2} \right) x, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Prema teoremi 1.18, čvorovi kvadraturne formule (3.22) moraju zadovoljavati uslove

$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\nu=0}^{2n} \left(\sin \frac{x - x_\nu}{2} \right)^{2s_\nu+1} \cos \left(\ell + \frac{1}{2} \right) x\, w(x)\mathrm{d}x = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\nu=0}^{2n} \left(\sin \frac{x - x_\nu}{2} \right)^{2s_\nu+1} \sin \left(\ell + \frac{1}{2} \right) x\, w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

za $\ell = 0, 1, \ldots, n-1$, tj.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\nu=0}^{2n} \left(\sin \frac{x - x_\nu}{2} \right)^{2s_\nu + 1} t_{n-1/2}(x)\, w(x) \mathrm{d}x = 0, \tag{3.24}$$

za sve $t_{n-1/2} \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$.

Trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $\prod_{\nu=0}^{2n} \sin((x - x_\nu)/2)$ koji zadovoljava uslov (3.24) zvaćemo $\sigma-$ortogonalnim u odnosu na težinsku funkciju w na $[-\pi, \pi)$ i označavaćemo ga sa $A_{\sigma,n+1/2}$. Prema oznakama iz teoreme 1.18 je

$$mN - \sum_{\nu=1}^{m} p_\nu - N + q = \sum_{\nu=0}^{2n} (2s_\nu + 1) - \sum_{\nu=0}^{2n} (2s_\nu + 2) + 1 + 2n = 0.$$

Prema tome, ako je jedan čvor fiksiran unapred kvadraturna formula (3.22) je jedinstvena.

U slučaju $s_0 = s_1 = \cdots = s_{2n} = s$, uslov $\sigma-$ortogonalnosti (3.24) svodi se na uslov $s-$ortogonalnosti (3.16), odnosno $\sigma-$ ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{\sigma,n+1/2}$ svodi se na $s-$ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{s,n+1/2}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 3.8. *$\sigma-$ortogonalni trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $A_{\sigma,n+1/2}(x)$ u odnosu na težinsku funkciju w na $[-\pi, \pi)$ ima u intervalu $[-\pi, \pi)$ tačno $2n + 1$ različitih prostih nula.*

Dokaz. $A_{\sigma,n+1/2}(x) = \prod_{\nu=0}^{2n} \sin((x - x_\nu)/2)$ ima u intervalu $[-\pi, \pi)$ bar jednu nulu neparne višestrukosti, jer u suprotnom za $n \geq 1$ dolazimo do kontradikcije sa (3.24). Naime, važilo bi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\nu=0}^{2n} \left(\sin \frac{x - x_\nu}{2} \right)^{2s_\nu + 1} \cos \frac{x}{2}\, w(x) \mathrm{d}x \neq 0,$$

pošto intergand ne bi menjao znak na $[-\pi, \pi)$.

Pretpostavke da je broj nula neparne višestrukosti u intervalu $[-\pi, \pi)$ jednak $2m - 1$, odnosno $2m$, za $m \leq n$, dovode takođe do kontradikcije, analogno kao u dokazu teoreme 3.5. Prema tome, $A_{\sigma,n+1/2}$ ima $2n+1$ nula neparne višestrukosti u intervalu $[-\pi, \pi)$, tj. $A_{\sigma,n+1/2}$ ima $2n + 1$ prostih nula u intervalu $[-\pi, \pi)$. □

Engels je u [14, § 5.3] dokazao egzistenciju implicitno definisanih ortogonalnih algebarskih polinoma. Dokazaćemo u sledećoj teoremi egzistenciju implicitno definisanih ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena.

Teorema 3.9. *Neka je $p \geq 0$ neprekidna funkcija, jednaka nuli samo na skupu mere nula. Tada postoji trigonometrijski polinom $A_{n+1/2}$ polu-celobrojnog stepena $n+1/2$, koji je ortogonalan na svim trigonometrijskim polinomima polu-celobrojnog stepena ne višeg od $n-1/2$ u odnosu na težinu $p(A_{n+1/2}(x))w(x)$ na intervalu $[-\pi,\pi)$.*

Dokaz. Obeležimo sa $\widehat{\mathfrak{T}}_n^{1/2}$ skup svih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena $n+1/2$ koji imaju $2n+1$ različitih realnih nula $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < \pi$. Primetimo najpre da postoji "1–1" korespondencija između skupova $\widehat{\mathfrak{T}}_n^{1/2}$ i

$$S_{2n} = \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : -\pi < x_1 < \cdots < x_{2n} < \pi\}.$$

Za datu funkciju p i svaki trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $B_{n+1/2} \in \widehat{\mathfrak{T}}_n^{1/2}$, uvedimo skalarni proizvod

$$(f,g)_{B_{n+1/2}} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)p(B_{n+1/2}(x))w(x)\mathrm{d}x.$$

Tada za svaki element $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_{2n}) \in S_{2n}$ postoji jedinstveni sistem ortogonalnih trigonometrijskih polinoma polu-celobrojnog stepena $D_{k+1/2} \in \widehat{\mathfrak{T}}_n^{1/2}$, $k = 0,1,\ldots,n$, takav da je

$$(D_{n+1/2}, \cos(k+1/2)x)_{B_{n+1/2}} = (D_{n+1/2}, \sin(k+1/2)x)_{B_{n+1/2}} = 0$$

za sve $k = 0,1,\ldots,n-1$ i

$$(D_{n+1/2}, D_{n+1/2})_{B_{n+1/2}} \neq 0,$$

gde je

$$B_{n+1/2}(x) = \cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-x_\nu}{2}.$$

Na ovaj način smo definisali preslikavanje $T_n : S_{2n} \to S_{2n}$.

Za proizvoljno $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_{2n}) \in \overline{S_{2n}} \setminus S_{2n}$ označimo sa $Q_{n+1/2} \in \mathfrak{T}_n^{1/2}$ odgovarajući trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $n+1/2$ sa nulama u koordinatama vektora $\mathbf{x}$ i $-\pi$. Tada je $p(Q_{n+1/2})w(x)$ takođe prihvatljiva težinska funkcija i važi $T_n(Q_{n+1/2}) \in S_{2n}$.

Dokazaćemo da je ovako definisano preslikavanje T_n neprekidno na $\overline{S_{2n}}$. Neka je $\mathbf{x} \in \overline{S_{2n}}$ proizvoljna tačka i $\{\mathbf{x}^{(m)}\}$, $m \in \mathbb{N}$, konvergentan niz tačaka iz S_{2n}, koji konvergira ka $\mathbf{x}$ i

$$\mathbf{y} = T_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y}^{(m)} = T_n(\mathbf{x}^{(m)}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Obeležimo sa $\mathbf{y}^* \in \overline{S_{2n}}$ proizvoljnu tačku nagomilavanja niza $\{\mathbf{y}^{(m)}\}$ kad $m \to +\infty$. Tada je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-y_\nu^{(m)}}{2}\cos(k+1/2)x$$
$$\times p\left(\cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-x_\nu^{(m)}}{2}\right)w(x)\mathrm{d}x=0, \quad k=0,1,\ldots,n-1,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-y_\nu^{(m)}}{2}\sin(k+1/2)x$$
$$\times p\left(\cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-x_\nu^{(m)}}{2}\right)w(x)\mathrm{d}x=0, \quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Prema Lebesgue-ovoj teoremi o dominantnoj konvergenciji (videti [68, p. 83]), kad $m \to +\infty$ dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-y_\nu^{*}}{2}\cos(k+1/2)x$$
$$\times p\left(\cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right)w(x)\mathrm{d}x=0, \quad k=0,1,\ldots,n-1,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-y_\nu^{*}}{2}\sin(k+1/2)x$$
$$\times p\left(\cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right)w(x)\mathrm{d}x=0, \quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Dakle, $\cos(x/2)\prod_{\nu=1}^{2n}\sin((x-y_\nu^*)/2)$ je trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $n+1/2$ koji je na $(-\pi,\pi)$ ortogonalan na svim trigonometrijskim polinomima polu-celobrojnog stepena ne višeg od $n-1/2$, u odnosu na težinsku funkciju $p\left(\cos(x/2)\prod_{\nu=1}^{2n}\sin((x-x_\nu)/2)\right)w(x)$. Poznato je da takav trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena ima $2n+1$ različitu prostu nulu u $[-\pi,\pi)$ (Teorema 2.2). Prema tome, $\mathbf{y}^* \in S_{2n}$ i $\mathbf{y}^* = T_n(\mathbf{x})$. Kako je $\mathbf{y} = T_n(\mathbf{x})$, zbog jedinstvenosti imamo da je $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}$. Dakle, T_n je neprekidno preslikavanje na $\overline{S_{2n}}$.

Pokažimo sada da preslikavanje T_n ima fiksnu tačku. Preslikavanje T_n je neprekidno na $\overline{S_{2n}}$, i skup $\overline{S_{2n}} \subset \mathbb{R}^{2n}$ je ograničen, konveksan i zatvoren. Egzistencija fiksne tačke preslikavanja T_n sledi na osnovu Brouwer-ove teoreme o fiksnoj tački (videti [75]). Međutim, već smo videli da se fiksna tačka ne može naći u $\overline{S_{2n}} \setminus S_{2n}$, pa, prema tome, fiksna tačka preslikavanja T_n može biti samo u S_{2n}.

Ako obeležimo fiksnu tačku sa $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_{2n})$, tada je

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_{n+1/2}(x)\cos(k+1/2)x\, p(A_{n+1/2}(x))w(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_{n+1/2}(x)\sin(k+1/2)x\, p(A_{n+1/2}(x))w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

za sve $k = 0, 1, \ldots, n-1$, gde je

$$A_{n+1/2}(x) = \cos\frac{x}{2}\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-x_\nu}{2},$$

čime je dokazano tvrđenje. $\square$

U nastavku ćemo fiksirati čvor $x_0 = -\pi$. Označimo sa S sledeći simpleks

$$S = \{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : -\pi < y_1 < \cdots < y_{2n} < \pi\}.$$

Neka je $a \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Definišimo

$$F(\mathbf{x}, a) = \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2as_0+1}\prod_{\nu=1}^{2n}\left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+1} \times \operatorname{sgn}\left(\prod_{\nu=1}^{2n}\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right) t_{n-1/2}(x)\, w(x)\mathrm{d}x, \tag{3.25}$$

i posmatrajmo sledeći problem

$$F(\mathbf{x}, a) = 0 \quad \text{za sve} \quad t_{n-1/2} \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}, \tag{3.26}$$

sa nepoznatim $x_1, \ldots, x_{2n}$, Takav sistem za $w(x) = 1$ je razmatrao Dryanov ([12, Theorem 3.1.]).

Za $a = 1$ problem (3.26) je ekvivalentan uslovima $\sigma-$ortogonalnosti (3.24) (sa $x_0 = -\pi$). Naš cilj je da nađemo rešenje problema (3.26) za $a = 1$, tj. preostale čvorove kvadraturne formule (3.22). Već smo videli da je za $a = 1$ rešenje jedinstveno u simpleksu S. Takođe, za $a = 0$ problem (3.26) ima jedinstveno rešenje u simpleksu S.

Iz teoreme 3.9 direktno dobijamo sledeću lemu.

Lema 3.6. *Problem* (3.26) *ima rešenje u simpleksu S za sve $a \in [0, 1]$.*

Dokazaćemo indukcijom po n jedinstvenost rešenja problema (3.26) za sve $a \in (0, 1)$.

Uvedimo sledeće oznake

$$W(\mathbf{x}, a, x) = \prod_{\nu=1}^{2n}\left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+2},$$

i za $k = 1, \ldots, 2n$,

$$\varphi_k(\mathbf{x}, a) = \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2as_0+1}\frac{W(\mathbf{x}, a, x)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\, w(x)\mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

Lema 3.7. *Postoji* $\varepsilon > 0$ *tako da za svako* $a \in [0,1]$ *rešenje* $\mathbf{x}$ *problema* (3.26) *pripada simpleksu*

$$\overline{S}_\varepsilon = \{\mathbf{y} : \varepsilon \le y_1 + \pi,\ \varepsilon \le y_2 - y_1,\ \ldots,\ \varepsilon \le y_{2n} - y_{2n-1},\ \varepsilon \le \pi - y_{2n}\}.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da za sve $\varepsilon > 0$ postoji $a \in [0,1]$ takvo da je $x_{k+1} - x_k < \varepsilon$ za neko $k \in \{0,1,\ldots,2n\}$ ($x_0 = -\pi$, $x_{2n+1} = \pi$). Tada, zbog kompaktnosti skupova, postoje konvergentni nizovi $\varepsilon_m, a_m, \mathbf{x}_m = (x_1^{(m)}, \ldots, x_{2n}^{(m)})$ takvi da važi:

$$\begin{aligned}
&F(\mathbf{x}_m, a_m) = 0 \quad \text{za sve } \ t_{n-1/2} \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2};\\
&x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)} < \varepsilon_m \quad \text{za neko } \ k \in \{0,1,\ldots,2n\}\ (x_0^{(m)} = -\pi, x_{2n+1}^{(m)} = \pi);\\
&\varepsilon_m \to 0,\ a_m \to a_0,\ \mathbf{x}_m \to \mathbf{x}_0,\ m \to +\infty.
\end{aligned}$$

U zavisnosti od vrednosti indeksa k razlikujemo tri slučaja.

(i) $1 \le k \le 2n-1$.

U ovom slučaju je $-\pi < x_k^{(m)} < x_{k+1}^{(m)} < \pi$. Obeležimo $\delta_m = [x_k^{(m)}, x_{k+1}^{(m)}]$. Koristeći činjenicu da je

$$\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne k,k+1}}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu^{(m)}}{2} \cos\frac{x}{2} \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2},$$

i

$$\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{x - x_k^{(m)}}{2} \sin\frac{x - x_{k+1}^{(m)}}{2}\right) = \begin{cases} -1, & x \in (x_k^{(m)}, x_{k+1}^{(m)}),\\ 1, & x \in [-\pi,\pi] \setminus (x_k^{(m)}, x_{k+1}^{(m)}),\end{cases}$$

iz (3.26) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi]\setminus\delta_m} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2a_m s_0 + 2} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne k,k+1}}^{2n} \left|\sin\frac{x - x_\nu^{(m)}}{2}\right|^{2a_m s_\nu + 2}\\
&\qquad \times \left|\sin\frac{x - x_k^{(m)}}{2}\right|^{2a_m s_k + 1} \left|\sin\frac{x - x_{k+1}^{(m)}}{2}\right|^{2a_m s_{k+1} + 1} w(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_{\delta_m} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2a_m s_0 + 2} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne k,k+1}}^{2n} \left|\sin\frac{x - x_\nu^{(m)}}{2}\right|^{2a_m s_\nu + 2}\\
&\qquad \times \left|\sin\frac{x - x_k^{(m)}}{2}\right|^{2a_m s_k + 1} \left|\sin\frac{x - x_{k+1}^{(m)}}{2}\right|^{2a_m s_{k+1} + 1} w(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Puštajući da $m \to +\infty$ iz prethodne jednakosti dobijamo

$$\int_{[-\pi,\pi]} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2a_0 s_0+2} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k,k+1}}^{2n} \left|\sin\frac{x-x_\nu^{(0)}}{2}\right|^{2a_0 s_\nu+2}$$
$$\times \left|\sin\frac{x-x_k^{(0)}}{2}\right|^{2a_0 s_k+1} \left|\sin\frac{x-x_{k+1}^{(0)}}{2}\right|^{2a_0 s_{k+1}+1} w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

što je nemoguće jer je integrand pozitivan skoro svuda na $[-\pi,\pi]$.

(ii) $k = 0$.

Sada je $-\pi < x_1^{(m)} < \pi$. Obeležimo $\delta_m = [-\pi, x_1^{(m)}]$. Postupak je isti kao u slučaju (i), uz činjenice da je

$$\prod_{\nu=2}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu^{(m)}}{2} \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2},$$

i

$$\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{x-x_1^{(m)}}{2}\right) = \begin{cases} -1, & x\in[-\pi, x_1^{(m)}), \\ 1, & x\in(x_1^{(m)}, \pi], \end{cases}$$

(iii) $k = 2n$.

U ovom slučaju je $-\pi < x_{2n}^{(m)} < \pi$. Obeležimo sada $\delta_m = [x_{2n}^{(m)}, \pi]$. I u ovom slučaju postupak je isti kao u slučaju (i), koristeći činjenice da je

$$\prod_{\nu=1}^{2n-1} \sin\frac{x-x_\nu^{(m)}}{2} \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2},$$

i

$$\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{x-x_{2n}^{(m)}}{2}\right) = \begin{cases} -1, & x\in[-\pi, x_{2n}^{(m)}), \\ 1, & x\in(x_{2n}^{(m)}, \pi], \end{cases}$$

Dakle, u svim slučajevima dolazimo do kontradikcije, što dokazuje lemu. □

Lema 3.8. *Problemi* (3.26) *i*

$$\varphi_k(\mathbf{x}, a) = 0 \quad \text{za sve} \quad k = 1,\dots,2n \tag{3.28}$$

su ekvivalentni u simpleksu S ($\varphi_k(\mathbf{x}, a)$ je definisano sa (3.27)*).*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}\in S$ rešenje problema (3.26). Pošto je

$$\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu}{2} \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}, \qquad \text{za sve} \quad k = 1,\dots,2n,$$

to za sve $k = 1, \ldots, 2n$ važi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2as_0+1} \prod_{\nu=1}^{2n} \left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+1} \\ \times \operatorname{sgn}\left(\prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu}{2}\right) \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu}{2}\, w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

tj. $\mathbf{x}$ je rešenje problema (3.28).

Pretpostavimo sada da je $\mathbf{x}$ rešenje problema (3.28). Koristeći trigonometrijski interpolacioni polinom u Lagrange-ovom obliku, svaki trigonometrijski polinom polu-celobrojnog stepena $t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ možemo predstaviti u obliku

$$t(x) = \sum_{k=1}^{2n} t(x_k) \frac{\prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{2n} \sin\frac{x_k-x_\nu}{2}}.$$

Tada za sve $t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ dobijamo

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2as_0+1} \prod_{\nu=1}^{2n} \left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+1} \\ &\qquad \times \operatorname{sgn}\left(\prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu}{2}\right) t(x)\, w(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2as_0+1} \prod_{\nu=1}^{2n} \left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+1} \operatorname{sgn}\left(\prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu}{2}\right) \\ &\qquad \times \sum_{k=1}^{2n} t(x_k) \frac{\prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{2n} \sin\frac{x_k-x_\nu}{2}}\, w(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{t(x_k)}{\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{2n} \sin\frac{x_k-x_\nu}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2as_0+1} \prod_{\nu=1}^{2n} \left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+1} \\ &\qquad \times \operatorname{sgn}\left(\prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu}{2}\right) \frac{\prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{x-x_\nu}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\, w(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{t(x_k)}{\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{2n} \sin\frac{x_k-x_\nu}{2}} \varphi_k(\mathbf{x}, a) = 0, \end{aligned}$$

tj. $\mathbf{x}$ je rešenje problema (3.26). $\square$

Napomenimo da iz lema 3.7 i 3.8 sledi da su problemi (3.26) i (3.28) ekvivalentni u simpleksu $\overline{S}_\varepsilon$, za neko $\varepsilon > 0$, pa, prema tome, i u simpleksu $\overline{S}_{\varepsilon_1}$, za sve $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, ali ne i u simpleksu $\overline{S}$.

Lema 3.9. *Neka je $p_{\xi,\eta}(x)$ neprekidna funkcija na $[-\pi,\pi]$, koja zavisi neprekidno od parametara $\xi,\eta\in[c,d]$, tj. ako (ξ_m,η_m) teži ka (ξ_0,η_0), tada niz $p_{\xi_m,\eta_m}(x)$ teži ka $p_{\xi_0,\eta_0}(x)$ za svako fiksirano x. Pretpostavimo da je rešenje $\mathbf{x}(\xi,\eta)$ problema (3.28) sa težinom $p_{\xi,\eta}(x)w(x)$ uvek jedinstveno za sve $(\xi,\eta)\in[c,d]^2$. Tada rešenje $\mathbf{x}(\xi,\eta)$ zavisi neprekidno od (ξ,η) u $[c,d]^2$.*

Dokaz. Neka su $\xi_m,\xi,\eta_m,\eta\in[c,d]$ takvi da važi $\lim\limits_{m\to+\infty}\xi_m=\xi$ i $\lim\limits_{m\to+\infty}\eta_m=\eta$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}$ proizvoljna tačka nagomilavanja niza $\mathbf{x}(\xi_m,\eta_m)$ kad (ξ_m,η_m) taži ka (ξ,η). Prema definiciji $\mathbf{x}(\xi_m,\eta_m)$, za $k=1,\dots,2n$ imamo

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2as_0+1}\frac{W(\mathbf{x}(\xi_m,\eta_m),a,x)}{\sin\frac{x-x_k(\xi_m,\eta_m)}{2}}\,p_{\xi_m,\eta_m}(x)w(x)\mathrm{d}x=0.$$

Primenom Lebesgue-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji ([68, p. 83]) dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2as_0+1}\frac{W(\mathbf{x},a,x)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\,p_{\xi,\eta}(x)w(x)\mathrm{d}x=0,\quad k=1,\dots,2n.$$

Zbog pretpostavke o jedinstvenosti zaključujemo da je $\mathbf{x}(\xi,\eta)=\mathbf{x}$, tj.

$$\lim_{(\xi_m,\eta_m)\to(\xi,\eta)}\mathbf{x}(\xi_m,\eta_m)=\mathbf{x}(\xi,\eta).$$

Prema tome, rešenje $\mathbf{x}(\xi,\eta)$ zavisi neprekidno od (ξ,η) u $[c,d]^2$. □

Za dokaz sledeće teoreme biće nam potrebne neke osobine topološkog stepena preslikavanja. Napomenimo da je Barrow u [1] prvi put koristio topološki stepen u teoriji aproksimacija.

Neka je D otvoren ograničen skup u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ i preslikavanje $\phi:\overline{D}\to\mathbb{R}^n$ neprekidno. Neka je $c\in\mathbb{R}^n$ i $c\notin\phi(\partial D)$. Tada se definiše topološki stepen preslikavanja ϕ u odnosu na D i c, koji je ceo broj i obeležava se sa $\deg(\phi,D,c)$. Važe sledeće osnovne osobine topološkog stepena (videti [2]).

(i) Ako je $\phi\in C^1(D)$, $c\notin\phi(\partial D)$ i $\det(\phi'(x))\neq 0$ za sve $x\in D$ koji zadovoljavaju jednačinu $\phi(x)=c$, tada postoji konačan broj tačaka $x_i\in D$ takvih da je $\phi(x_i)=c$ i važi $\deg(\phi,D,c)=\sum\limits_i \operatorname{sgn}(\det(\phi'(x_i)))$.

(ii) Ako je funkcija $\phi(x,\alpha)$ neprekidna na $\overline{D}\times[0,1]$ i $\phi(x,\alpha)\neq c$ za sve $x\in\partial D$, $0\le\alpha\le 1$, tada je $\deg(\phi(\,\cdot\,,\alpha),D,c)$ konstanta nezavisna od α.

Sada možemo da dokažemo sledeću teoremu.

Teorema 3.10. *Problem $\varphi_k(\mathbf{x},a)=0$ za sve $k=1,\dots,2n$, ima jedinstveno rešenje u simpleksu S za sve $a\in[0,1]$.*

Dokaz. Za dokaz ćemo iskoristiti neke modifikacije ideja koje su koristili Bojanov u [2], Shi u [82], Shi i Xu u [83] (za algebarske $\sigma-$ortogonalne polinome) i Dryanov u [12]. Preciznosti radi, problem $\varphi_k(\mathbf{x}, a) = 0$, $k = 1, \ldots, 2n$, ćemo nazivati $(a; s_1, s_2, \ldots, s_{2n}; w)$ problem. Dokazaćemo tvrđenje indukcijom po n. Jedinstvenost za $n = 0$ je trivijalna. Pretpostavimo, kao indukcijsku hipotezu, da $(a; s_1, \ldots, s_{2n-2}; w)$ problem ima jedinstveno rešenje za svako $a \in [0, 1]$ i za sve težinske funkcije w, koje su nenegativne i integrabilne na $[-\pi, \pi)$, pri čemu vrednost nula mogu imati samo na skupu mere nula.

Posmatrajmo sledeće težinske funkcije

$$p_{\xi,\eta}(x) = \left|\sin \frac{x-\xi}{2}\right|^{2as_{2n-1}+2} \left|\sin \frac{x-\eta}{2}\right|^{2as_{2n}+2} w(x), \quad (\xi, \eta) \in [-\pi, \pi]^2.$$

Za svako $a \in [0, 1]$, problem $(a; s_1, \ldots, s_{2n-2}; p_{\xi,\eta})$ ima jedinstveno rešenje $(x_1(\xi, \eta), \ldots, x_{2n-2}(\xi, \eta))$, takvo da je $-\pi < x_1(\xi, \eta) < \cdots < x_{2n-2}(\xi, \eta) < \pi$. Prema lemi 3.9, $x_\nu(\xi, \eta)$ zavisi neprekidno od (ξ, η) na $[-\pi, \pi]^2$ za sve $\nu = 1, \ldots, 2n - 2$.

Treba da dokažemo da problem $(a; s_1, \ldots, s_{2n}; w)$ ima jedinstveno rešenje za svako $a \in [0, 1]$.

Obeležimo $x_{2n-1}(\xi, \eta) = \xi$, $x_{2n}(\xi, \eta) = \eta$,

$$W(\mathbf{x}(\xi, \eta), a, x) = \prod_{\nu=1}^{2n} \left|\sin \frac{x - x_\nu(\xi, \eta)}{2}\right|^{2as_\nu+2},$$

i za $k = 1, \ldots, 2n$

$$\varphi_k(\mathbf{x}(\xi, \eta), a) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2as_0+1} \frac{W(\mathbf{x}(\xi, \eta), a, x)}{\sin \frac{x - x_k(\xi,\eta)}{2}} w(x) \mathrm{d}x.$$

Prema indukcijskoj hipotezi važi

$$\varphi_k(\mathbf{x}(\xi, \eta), a) = 0, \quad k = 1, \ldots, 2n - 2, \tag{3.29}$$

za $(\xi, \eta) \in D$, gde je $D = \{(\xi, \eta) : x_{2n-2}(\xi, \eta) < \xi < \eta < \pi\}$.

Posmatrajmo sada sledeći problem u D

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{t}, a) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2as_0+1} \frac{W(\mathbf{x}(\xi, \eta), a, x)}{\sin \frac{x-\xi}{2}} w(x) \mathrm{d}x = 0, \\ \phi_2(\mathbf{t}, a) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2as_0+1} \frac{W(\mathbf{x}(\xi, \eta), a, x)}{\sin \frac{x-\eta}{2}} w(x) \mathrm{d}x = 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

sa nepoznatim $\mathbf{t} = (\xi, \eta)$.

Ako je $(\xi, \eta) \in D$ rešenje problema (3.30), tada je, prema (3.29), $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ rešenje problema $(a; s_1, \ldots, s_{2n}; w)$ u simpleksu S. Obratno, ako je $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n})$ rešenje problema $(a; s_1, \ldots, s_{2n}; w)$ u simpleksu S, tada je (x_{2n-1}, x_{2n}) rešenje problema (3.30). Prema lemi 3.7, svako rešenje problema (3.30) pripada skupu

$$\overline{D}_\varepsilon = \{(\xi, \eta) : \varepsilon \le \xi - x_{2n-2}(\xi, \eta),\ \varepsilon \le \eta - \xi,\ \varepsilon \le \pi - \eta\}.$$

Ako je $\mathbf{x}$ rešenje problema $(a; s_1, \ldots, s_{2n}; w)$ u $\overline{S}_\varepsilon$, tada u tački $\mathbf{x}$ za sve $k = 1, \ldots, 2n$, $k \neq 2n-1$, važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_k} = -(as_k + 1) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2as_0+1} \prod_{\nu=1}^{2n} \left|\sin\frac{x - x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+1} \\ \times \operatorname{sgn}\left(\prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2}\right) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq 2n-1,k}}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2} \cos\frac{x - x_k}{2}\, w(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pošto je

$$\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq 2n-1,k}}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2} \cos\frac{x - x_k}{2} \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2},$$

prema lemi 3.8 dobijamo

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, 2n,\ k \neq 2n-1.$$

Diferenciranjem ϕ_1 po x_{2n-1} dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{2n-1}} = -\frac{2as_{2n-1} + 1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2as_0+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq 2n-1}}^{2n} \left|\sin\frac{x - x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+2} \\ \times \left|\sin\frac{x - x_{2n-1}}{2}\right|^{2as_{2n-1}} \cos\frac{x - x_{2n-1}}{2}\, w(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Obeležimo sa I desnu stranu prethodne jednakosti. Elementarnim trigonometrijskim transformacijama dobijamo

$$\begin{aligned} \cos\frac{x-y}{2} &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} \\ &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x-y+y}{2}\sin\frac{y}{2} \\ &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}\sin^2\frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Koristeći prethodnu formulu dobijamo

$$
\begin{aligned}
I = &-\frac{2as_{2n-1}+1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2as_0+1}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 2n-1}}^{2n}\left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+2}\\
&\times\left|\sin\frac{x-x_{2n-1}}{2}\right|^{2as_{2n-1}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x_{2n-1}}{2}\,w(x)\mathrm{d}x\\
&-\frac{2as_{2n-1}+1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2as_0+1}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 2n-1}}^{2n}\left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+2}\\
&\times\left|\sin\frac{x-x_{2n-1}}{2}\right|^{2as_{2n-1}}\sin\frac{x-x_{2n-1}}{2}\sin\frac{x_{2n-1}}{2}\cos\frac{x_{2n-1}}{2}\,w(x)\mathrm{d}x\\
&-\frac{2as_{2n-1}+1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2as_0+1}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 2n-1}}^{2n}\left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+2}\\
&\times\left|\sin\frac{x-x_{2n-1}}{2}\right|^{2as_{2n-1}}\cos\frac{x-x_{2n-1}}{2}\sin^2\frac{x_{2n-1}}{2}\,w(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Označimo sa I_1 prvi integral sa desne strane prethodne jednakosti. Lako se vidi da je $I_1>0$ jer integrand ne menja znak u $[-\pi,\pi]$. Drugi integral sa desne strane prethodne jednakosti je jednak 0 zbog (3.30). Prema tome,

$$
I=-\frac{2as_{2n-1}+1}{2}I_1+\sin^2\frac{x_{2n-1}}{2}I,
$$

tj.

$$
\Big(1-\sin^2\frac{x_{2n-1}}{2}\Big)\,I=-\frac{2as_{2n-1}+1}{2}I_1<0.
$$

Kako je $-\pi<x_{2n-1}<\pi$, to je

$$
\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_{2n-1}}\right)=-1.
$$

Na isti način dobijamo i

$$
\frac{\partial\phi_2}{\partial x_k}=0,\quad k=1,\dots,2n-1,\quad \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_{2n}}\right)=-1.
$$

Dakle, u bilo kom rešenju $\mathbf{t}=(\xi,\eta)$ problema (3.30) iz $\overline{D}_\varepsilon$ važi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}&=\sum_{\substack{k=1\\ k\neq 2n-1}}^{2n}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_{2n-1}}=\frac{\partial\phi_1}{\partial x_{2n-1}}, &\qquad \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}&=0,\\
\frac{\partial\phi_2}{\partial\eta}&=\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\partial\phi_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\eta}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_{2n}}=\frac{\partial\phi_2}{\partial x_{2n}}, &\qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial\xi}&=0,
\end{aligned}
$$

pa je determinanta Jacobiana $J(\mathbf{t})$ pozitivna.

Dokazaćemo sada da problem (3.30) ima jedinstveno rešenje u $\overline{D}_{\varepsilon/2}$. Za tu svrhu koristićemo topološki stepen preslikavanja. Definišimo preslikavanje

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t}, a) : \overline{D}_{\varepsilon/2} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2,$$

sa $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t}, a) = (\phi_1(\mathbf{t}, a), \phi_2(\mathbf{t}, a))$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$, $a \in [0,1]$. Ako je $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ rešenje problema $(a; s_1, \dots, s_{2n}; w)$ u $\overline{S}_\varepsilon$, tada rešenje problema

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t}, a) = (0,0) \quad \text{u} \quad \overline{D}_{\varepsilon/2}$$

pripada skupu $\overline{D}_\varepsilon$. Za $a = 0$ problem $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t}, a) = (0,0)$ ima jedinstveno rešenje u $D_{\varepsilon/2}$. Očigledno je funkcija $\boldsymbol{\phi}(\,\cdot\,, 0)$ diferencijabilna na $D_{\varepsilon/2}$. Preslikavanje $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t}, a)$ je neprekidno na $\overline{D}_{\varepsilon/2} \times [0,1]$ i $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t}, a) \neq (0,0)$ za $\mathbf{t} \in \partial D_{\varepsilon/2}$ i $a \in [0,1]$. Prema tome, $\deg(\boldsymbol{\phi}(\,\cdot\,, a), D_{\varepsilon/2}, (0,0))$ je konstanta nezavisna od a, odnosno

$$\deg(\boldsymbol{\phi}(\cdot, a), D_{\varepsilon/2}, (0,0)) = \operatorname{sgn}\det(J(\mathbf{t})) = 1$$

za sve $a \in [0,1]$. To znači da problem $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t}, a) = (0,0)$ ima jedinstveno rešenje u $D_{\varepsilon/2}$ za sve $a \in [0,1]$, tj. problem $(a; s_1, \dots, s_{2n}; w)$ ima jedinstveno rešenje u S koje pripada $\overline{S}_\varepsilon$. □

Teorema 3.11. *Rešenje* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(a)$ *problema* (3.28) *zavisi neprekidno od* $a \in [0,1]$.

Dokaz. Neka je $\{a_m\}$, $a_m \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$, konvergentan niz i $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a^* \in [0,1]$. Za svako a_m, $m \in \mathbb{N}$, postoji jedinstveni vektor $\mathbf{x}(a_m) = (x_1(a_m), \dots, x_{2n}(a_m))$, koji je rešenje problema (3.28) za $a = a_m$. Obeležimo jedinstveno rešenje problema (3.28) za $a = a^*$ sa $\mathbf{x}(a^*) = (x_1(a^*), \dots, x_{2n}(a^*))$. Dovoljno je dokazati da je $\lim\limits_{a_m \to a^*} \mathbf{x}(a_m) = \mathbf{x}(a^*)$. Neka je $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_{2n}^*)$ bilo koja tačka nagomilavanja niza $\mathbf{x}(a_m)$ kada a_m teži ka a^*. Prema definiciji $\mathbf{x}(a_m)$, primenom teoreme 3.10, za svako $m \in \mathbb{N}$ dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2a_m s_0 + 1} \frac{W(\mathbf{x}(a_m), a_m, x)}{\sin\frac{x - x_k(a_m)}{2}}\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Kad $a_m \to a^*$ iz gornje jednakosti dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2a^* s_0 + 1} \frac{W(\mathbf{x}^*, a^*, x)}{\sin\frac{x - x_k^*}{2}}\, w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad k = 1, \dots, 2n,$$

što prema teoremi 3.10 znači da je $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(a^*)$, tj. $\lim\limits_{a_m \to a^*} \mathbf{x}(a_m) = \mathbf{x}(a^*)$. □

3.3.4 Numerička konstrukcija kvadraturnih formula sa višestrukim čvorovima

U ovom odeljku daćemo metod za konstrukciju kvadraturnih formula oblika (3.22). Kao specijalan slučaj konstruisaćemo i kvadraturne formule (3.20). Potrebno je najpre konstruisati čvorove, a zatim, kada su čvorovi poznati, konstruisati i težine.

Konstrukcija čvorova

Kao što je rečeno u odeljku 3.3.3, čvor $x_0 = -\pi$ ćemo fiksirati unapred. Preostale čvorove $x_1, \ldots, x_{2n}$ možemo računati rešavajući problem (3.28) za $a = 1$.

Pri rešavanju sistema nelinearnih jednačina (3.28) za bilo koje $a \in (0, 1]$, koristićemo sledeće oznake

$$\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_{2n}]^\top, \quad \mathbf{x}^{(m)} = [x_1^{(m)} \;\; x_2^{(m)} \;\; \cdots \;\; x_{2n}^{(m)}]^\top, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

i

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}) \;\; \varphi_2(\mathbf{x}) \;\; \cdots \;\; \varphi_{2n}(\mathbf{x})]^\top.$$

Sa $W = W(\mathbf{x})$ obeležavaćemo Jacobian od $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$. Nule $\sigma-$ortogonalnog trigonometrijskog polinoma $A_{\sigma,n+1/2}$ možemo računati metodom Newton–Kantorovich-a

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - W^{-1}(\mathbf{x}^{(m)})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(m)}), \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{3.31}$$

Za dobro izabranu startnu iteraciju $\mathbf{x}^{(0)}$ metod (3.31) ima kvadratnu konvergenciju.

Elementi Jacobiana

$$W = W(\mathbf{x}) = [w_{i,j}]_{2n\times 2n} = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right]_{2n\times 2n}$$

dati su sa

$$\begin{aligned} w_{i,j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} &= -(1 + as_j)\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2as_0+1} \prod_{\nu=1}^{2n} \left|\sin\frac{x - x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+1} \\ &\times \operatorname{sgn}\left(\prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2}\right) \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i,j}}^{2n} \sin\frac{x - x_\nu}{2} \cos\frac{x - x_j}{2}\, w(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

za $i \neq j$, i

$$w_{i,i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = -\frac{1+2as_i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2as_0+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{2n} \left|\sin\frac{x-x_\nu}{2}\right|^{2as_\nu+2}$$
$$\times \left|\sin\frac{x-x_i}{2}\right|^{2as_i} \cos\frac{x-x_i}{2}\, w(x)\mathrm{d}x.$$

Svi gore navedeni integrali mogu se računati tačno (sem grešaka zaokrugljivanja) primenom kvadraturnih formulama Gauss-ovog tipa (3.6), tj.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, w(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2N} A_\nu f(x_\nu) + R_N(f), \tag{3.32}$$

sa $2N \geq \sum_{\nu=0}^{2n} s_\nu + 2n$.

Prema rezultatima dobijenim u odeljku 3.3.3, za fiksirano n, sistem (3.28) rešavamo progresivno od nižih vrednosti a, povećavajući ih do ciljne vrednosti $a = 1$. Pritom, te vrednosti biramo tako da metod Newton–Kantorovich-a bude uspešan. Rešenje sistema (3.28) za neko $a^{(i)}$ koristimo kao početnu iteraciju za rešavanje sistema za $a^{(i+1)}$, $1 \geq a^{(i+1)} > a^{(i)}$. Ukoliko taj iterativni proces ne konvergira, tada smanjujemo $a^{(i+1)}$, tako da proces postane konvergentan. Teorema 3.11 nam garantuje da je to uvek moguće.

Ako su $x_0 = -\pi, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{2n}^{(0)}$ nule ortogonalnog trigonometrijskog polinoma stepena $n+1/2$, tada je $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{2n}^{(0)})$ rešenje sistema (3.28) za $a = 0$. To rešenje koristimo kao početnu iteraciju za prvi iterativni proces, za neko $a^{(1)} > 0$. Prema teoremi 3.11, takva iterativna strategija mora biti efikasna.

U slučaju jednake višestrukosti u svim čvorovima, $s_0 = s_1 = \cdots = s_{2n} = s$, odmah rešavamo sistem (3.28) za $a = 1$ metodom Newton–Kantorovich-a, uzimajući rešenje za $a = 0$ kao početnu iteraciju.

Konstrukcija težina

Ako su čvorovi x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, kvadraturne formule (3.22) poznati, moguće je računati težine $A_{j,\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, $j = 0, 1, \ldots, 2s_\nu$. Jedan način za računanje težina je da se fundamentalni polinomi trigonometrijske Hermite-ove interpolacije (videti [13] i [12]) pomnože sa w i to integrali na intervalu $[-\pi, \pi)$. Međutim konstrukcija Hermite-ovog interpolacionog trigonometrijskog polinoma je znatno komplikovanija od konstrukcije algebarskog Hermite-ovog interpolacionog polinoma. Zato za konstrukciju težina nećemo koristiti taj metod, već ćemo iskoristiti činjenicu da je kvadraturna formula (3.22) interpolacionog tipa i da kvadraturna formula (3.22) mora biti tačna za sve trigonometrijske polinome stepena ne višeg od $\sum_{\nu=0}^{2n}(s_\nu+1)-1$. Prema tome, težine računamo iz uslova da je kvadraturna formula (3.22) tačna za $f(x)=1, \cos \ell x, \sin \ell x$, gde je $1 \le \ell \le n+\sum_{\nu=0}^{2n} s_\nu$. Na taj način problem računanja težina svodi se na rešavanje sistema linearnih jednačina.

Kada je kvadraturna formula oblika (3.20) u pitanju, tada težine računamo iz uslova da je kvadraturna formula tačna za $f(x)=1, \cos \ell x, \sin \ell x$, pri čemu je $1 \le \ell \le n+2ns+s$.

3.3.5 Numerički primeri

U ovom poglavlju daćemo neke numeričke primere. Ograničićemo se samo na težinske funkcije $w(x)=1+\sin mx$, $m \in \mathbb{N}$, jer za te težine znamo eksplicitne formule za koeficijente petočlanih rekurentnih relacija (teoreme 2.9, 2.10 i 2.11) za odgovarajuće ortogonalne trigonometrijske polinome polu-celobrojnog stepena neophodne za konstrukciju kvadraturnih formula (3.32). Numerički rezultati su dobijeni korišćenjem postupka opisanog u odeljku 3.3.4. Za sva izračunavanja korišćen je paket MATHEMATICA i paket opisan u [9], sa $D-$aritmetikom (16 decimalnih cifara u mantisi).

Primer 3.3. *Za težinsku funkciju $w(x)=1+\sin 10x$ daćemo parametre kvadraturne formule tipa* (3.20) *u slučaju $n=3$, $s=4$.*

Opisanim postupkom čvorovi x_ν, $\nu=0,1,\ldots,6$, dobijaju se nakon 6 iteracija i oni su dati u tabeli 3.4. Težine $A_{j,\nu}$, $\nu=0,1,\ldots,6$, $j=0,1,\ldots,8$, su date u tabeli 3.5 (brojevi u zagradi označavaju decimalne eksponente).

Tabela 3.4: Čvorovi x_ν, $\nu=0,1,\ldots,6$, kvadraturne formule za težinsku funkciju $w(x)=1+\sin 10x$ u slučaju $n=3$, $s=4$

ν	x_ν
0	−3.141592653589793
1	−2.195607981849430
2	−1.333176069063883
3	−4.099098761827392(−1)
4	4.729443598876385(−1)
5	1.357189613375543
6	2.278805025752396

Tabela 3.5: Težine $A_{j,\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 6$, $j = 0, 1, \ldots, 8$, kvadraturne formule za težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 10x$ u slučaju $n = 3$, $s = 4$

j	$A_{j,0}$	$A_{j,1}$	$A_{j,2}$
0	8.736802944384789(−1)	8.780039484030546(−1)	9.692004149126866(−1)
1	1.833922061262777(−2)	−1.837878429586544(−2)	1.386435531448628(−2)
2	2.409833697575788(−2)	2.451851233462525(−2)	3.322697701991410(−2)
3	3.478677056578933(−4)	3.465923165145842(−4)	−2.369456795203014(−4)
4	1.558947988995572(−4)	1.584840976164456(−4)	2.158502088774562(−4)
5	−1.838132611006274(−6)	1.832393533366365(−6)	−1.262701277445712(−6)
6	3.338836720895908(−7)	3.387523716879377(−7)	4.560354529557524(−7)
7	−1.879808674224471(−9)	1.873697387438962(−9)	−1.285397680747573(−9)
8	2.175859924843315(−10)	2.203646226388774(−10)	2.938295810053380(−10)

j	$A_{j,3}$	$A_{j,4}$	$A_{j,5}$
0	7.873753863362594(−1)	1.017387489758429	7.849380122341280(−1)
1	−9.567180529417245(−3)	3.356370104432001(−4)	8.867465772551080(−3)
2	1.551402784551946(−2)	3.773549640978078(−2)	1.526596655883835(−2)
3	2.206191006423442(−4)	−5.425164321016498(−6)	−2.060655565192848(−4)
4	1.087043736594881(−4)	2.471671315937221(−4)	1.075161851751907(−4)
5	1.145439928442952(−6)	−2.901661875281969(−8)	−1.069199892115892(−6)
6	2.600589952717407(−7)	5.236333175630410(−7)	2.587178372059509(−7)
7	1.174751685812646(−9)	−2.941523023505351(−11)	−1.096667262757770(−9)
8	1.860767460000116(−10)	3.382349780304087(−10)	1.859502304196043(−10)

j	$A_{j,6}$
0	9.725997610965500(−1)
1	−1.346061059198731(−2)
2	3.354698088915084(−2)
3	2.291393236749525(−4)
4	2.180483113897306(−4)
5	1.221436897924084(−6)
6	4.607341215251486(−7)
7	1.243067569303820(−9)
8	2.968957276039136(−10)

Primer 3.4. *Neka je težinska funkcija $w(x) = 1 + \sin 15x$. Procedura opisana u odeljku 3.3.4 primenjivana je za razne vrednosti n i σ.*

- $n = 2$.
  Za $\sigma = (6, 6, 6, 3, 3)$ ili $\sigma = (7, 6, 3, 3, 3)$ imamo tri koraka, tj. tri iterativna procesa: za $a = 1/7$, $a = 1/2$ i, konačno, za $a = 1$.
  Za $\sigma = (5, 5, 5, 4, 4)$ imamo dva iterativna procesa: za $a = 1/2$ i $a = 1$.
  Broj iteracija u svakom od iterativnih procesa je od 5 do 7.

- $n = 3$.
  Za $\sigma = (5, 5, 5, 4, 4, 4, 4)$ ili $\sigma = (4, 4, 4, 4, 3, 3, 3)$ imamo dva koraka: $a = 1/2$, $a = 1$.

Za $\sigma = (6, 6, 6, 4, 4, 4, 4)$ ili $\sigma = (7, 7, 7, 5, 5, 5, 5)$ imamo tri koraka: $a = 1/7$, $a = 1/2$, $a = 1$.
Broj iteracija u svakom koraku je od 5 do 7.

- $n = 4$.
  Za $\sigma = (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$ imamo dva koraka: $a = 1/2$, $a = 1$.
  Za $\sigma = (7, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1)$ imamo tri koraka: $a = 1/5$, $a = 1/2$, $a = 1$.
  Za $\sigma = (6, 6, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 7, 7)$ imamo četiri koraka: $a = 1/10$, $a = 1/4$, $a = 3/4$, $a = 1$.
  Broj iteracija u svakom koraku je od 6 do 8.

Daćemo parametre kvadraturne formule (3.22) za $n = 3$, $\sigma = (5, 5, 5, 4, 4, 4, 4)$. Čvorovi x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 6$, dati su u tabeli 3.6, a težine $A_{j,\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 6$, $j = 0, 1, \ldots, 2s_\nu$, su date u tabeli 3.7.

Tabela 3.6: Čvorovi x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 6$, kvadraturne formule za težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 15x$ u slučaju $n = 3$, $\sigma = (5, 5, 5, 4, 4, 4, 4)$

ν	x_ν
0	−3.141592653589793
1	−2.142289082021412
2	−1.166433858435203
3	−0.2605173232946470
4	0.5758361786837509
5	1.408529709542752
6	2.242866498580637

Tabela 3.7: Težine $A_{j,\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 6$, $j = 0, 1, \ldots, 2s_\nu$, kvadraturne formule za težinsku funkciju $w(x) = 1 + \sin 15x$ u slučaju $n = 3$, $\sigma = (5, 5, 5, 4, 4, 4, 4)$

j	$A_{j,0}$	$A_{j,1}$	$A_{j,2}$
0	9.677875224336417(−1)	9.531676735698756(−1)	1.013233190569206
1	2.028602075502205(−2)	−1.213702606912967(−2)	−6.205384402876206(−3)
2	3.370542562028110(−2)	3.139811933707851(−2)	3.947125321579040(−2)
3	4.157187227289942(−4)	−2.260462190450483(−4)	−1.405985517394013(−4)
4	2.920451726171018(−4)	2.548760404654218(−4)	3.789914893847127(−4)
5	9.892119903945289(−7)	−1.840787846765896(−7)	−5.427834476408153(−7)
6	9.369122751227972(−7)	8.151181829594624(−7)	1.251346230604130(−6)
7	3.447654817922883(−10)	9.275296249257300(−10)	−7.742644070773603(−10)
8	1.211833433569280(−9)	1.076843363389778(−9)	1.619541201005613(−9)
9	−2.900204383998459(−13)	9.765877821136858(−13)	−3.861351229786107(−13)
10	5.318078200661739(−13)	4.855779990769611(−13)	7.037745858845391(−13)

j	$A_{j,3}$	$A_{j,4}$	$A_{j,5}$
0	8.450483076824410(−1)	8.324813718068735(−1)	8.312421276393454(−1)
1	1.363117963026762(−2)	1.540647023188423(−2)	1.465250028885229(−2)
2	2.274991506408189(−2)	2.185471298912329(−2)	2.183869845673810(−2)
3	2.883916551159689(−4)	3.219904145017409(−4)	3.054789366790949(−4)
4	1.517061060513543(−4)	1.435059989296148(−4)	1.442057799647988(−4)
5	7.292338226067105(−7)	8.716673371216379(−7)	8.385669403932208(−7)
6	3.156791619308204(−7)	2.943584862578417(−7)	2.963111252285077(−7)
7	4.416832399449249(−10)	5.872699652166557(−10)	5.763049514683460(−10)
8	1.934662425687248(−10)	1.779998550453076(−10)	1.791759019042322(−10)

j	$A_{j,6}$
0	8.402251134782032(−1)
1	1.559731715155896(−2)
2	2.253281007306902(−2)
3	3.217904178265226(−4)
4	1.512155359054232(−4)
5	9.251864321223748(−7)
6	3.144574541987427(−7)
7	6.751494958600252(−10)
8	1.919961224906652(−10)

Glava 4

Numerička integracija brzo oscilatornih funkcija

Potreba za računanjem integrala kod kojih je integrand oscilatorna funkcija javlja se u mnogim oblastima matematike, kompjuterskih nauka, fizike, hemije, mehanike itd. Standardni metodi za numeričku integraciju, kao što su Gauss-ove kvadraturne formule, ne mogu se uspešno primenjivati kod takvih integrala, posebno u slučajevima brzo oscilatornih funkcija. Za rešavanje takvih problema koriste se razni specijalni metodi. Navešćemo neke od brojnih autora koji su se bavili problemom integracije brzo oscilatornih funkcija: Davis i Rabinowitz [10, Section 2.10], Engels [14, Section 8.5], Milovanović [49], Evans i Webster [15], Ixaru [33], Ixaru i Paternoster [34], Kim, Coools i Ixary [38, 39], Iserles [29, 30], Iserles i Nørsett [31, 32], Levin [42, 43], Sauter [81], Olver [74].

U radu [57] mi smo se fokusirali na ideju korišćenja tzv. eksponencijalnog fitovanja, koju su koristili Ixary u [33], odnosno, Ixaru i Paternoster u [34]. Oni su posmatrali kvadraturne formule oblika

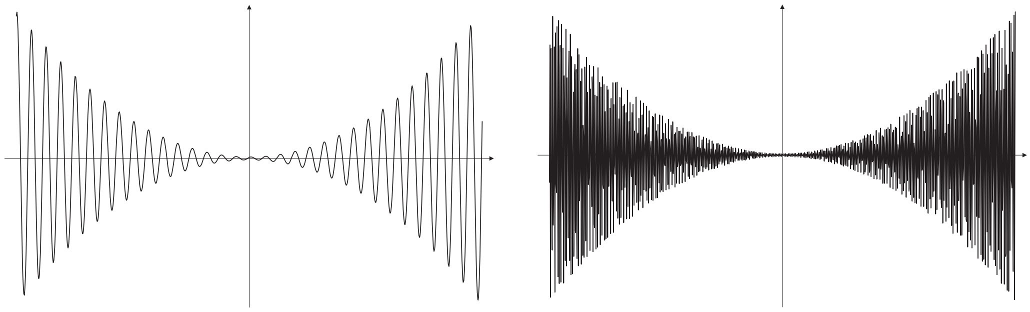
$$\int_{-1}^{1} y(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} w_k y(x_k),$$

koje tačno integrale prvih n parova iz skupa $\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu x}, x\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu x}, x^2\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu x}, x^3\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu x}, \ldots\}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Međutim, u njihovim radovima nije dokazana egzistencija takvih kvadraturnih formula. Dat je numerički postupak za konstrukciju kvadratura kod kojih su čvorovi antisimetrični unutar intervala $(-1, 1)$, a težine simetrične, pri čemu se na osnovu prezentovanih primera stiče utisak da su takve kvadraturne formule jedinstvene. Prezentovani su numerički rezultati za $n \leq 6$ i $0 < \mu < 50$. Njihov algoritam je slabo uslovljen. Radeći u $D-$aritmetici, faktor uslovljenosti je 10^4 za $\mu = 0$ (kada uopšte nemamo oscilatornu funkciju) i $n = 6$, a za $\mu = 50$ i $n = 6$ čak 10^9.

U ovoj glavi biće prezentovani rezultati objavljeni u [57], ali i novi rezultati koji su u pripremi za publikovanje. Takođe, daćemo i neke numeričke primere.

4.1 Kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za oscilatorne funkcije

Razmatraćemo kvadraturne formule pogodne za integraciju brzo oscilatornih funkcija oblika $f(x) = f_1(x)\sin\zeta x + f_2(x)\cos\zeta x$, gde su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ glatke funkcije, a $\zeta \in \mathbb{R}$. To su tzv. regularne oscilacije. Na slici 4.1 prikazan je grafik funkcije $f(x) = (x^2+1)(\cos\zeta x+\sin\zeta x)$, $x \in (-10, 10)$, za $\zeta = 10$ (levo) i $\zeta = 100$ (desno).



Slika 4.1: Grafik funkcije $f(x) = (x^2+1)(\cos\zeta x+\sin\zeta x)$, $x \in (-10, 10)$ za $\zeta = 10$ (levo) i $\zeta = 100$ (desno)

Analiziraćemo generalisane Gauss-ove kvadraturne formule oblika

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k f(x_k) + R_n(f), \tag{4.1}$$

gde su čvorovi x_k i težine σ_k, $k = 1, \ldots, n$, izabrane tako da kvadraturna formula bude tačna na linearnom prostoru

$$\mathcal{F}_{2n}(\zeta) = \mathcal{L}\{x^k\cos\zeta x, x^k\sin\zeta x : k = 0, 1, \ldots, n-1\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Kako sistem funkcija $\{x^k\cos\zeta x, x^k\sin\zeta x : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ nije Chebyshev-ljev sistem na $[-1, 1]$, egzistencija takvih kvadraturnih formula nije zagarantovana (videti odeljak 1.3.4).

Jedan od načina za konstrukciju ovakvih kvadraturnih formula je primenom algoritma opisanog u odeljku 1.3.4, pri čemu bi sistem funkcija $\{x^k\cos\zeta x, x^k\sin\zeta x : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ najpre trebalo ortogonalizovati na $[-1, 1]$. Međutim, mi ćemo ovde prezentovati jedan potpuno drugačiji pristup.

Primetimo da za $\zeta \neq 0$ važi $\dim \mathcal{F}_{2n}(\zeta) = 2n$. Očigledno je $\mathcal{F}_{2n}(-\zeta) = \mathcal{F}_{2n}(\zeta)$, tako da ćemo razmatrati samo slučaj $\zeta > 0$. Slučaj $\zeta = 0$ je trivijalan, jer se prostor $\mathcal{F}_{2n}(0)$ svodi na prostor algebarskih polinoma stepena ne viěg od $n-1$, tj. $\mathcal{F}_{2n}(0) = \mathcal{P}_{n-1}$.

Uvedimo najpre neke oznake radi jednostavnijeg zapisa. Za dato $n \in \mathbb{N}$ i skup čvorova $\{x_1, \ldots, x_n\}$ obeležimo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i definišimo monični polinom $\omega(x) = \omega^{(n)}(x)$ sa

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Dalje, za $\nu, \mu = 1, \ldots, n$, uvedimo

$$\omega_\nu(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_\nu} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^{n} (x - x_k), \quad \omega_{\nu,\mu}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_\nu)(x - x_\mu)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu,\mu}}^{n} (x - x_k)$$

i

$$\ell_\nu(x) = \frac{\omega_\nu(x)}{\omega_\nu(x_\nu)} = \frac{\omega(x)}{(x - x_\nu)\omega'(x_\nu)}.$$

Konačno, definišimo funkcije $\Phi_\nu(\mathbf{x})$ na sledeći način

$$\Phi_\nu(\mathbf{x}) = \int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \sin \zeta(x - x_\nu)\, \mathrm{d}x, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Najpre ćemo izvesti eksplicitne formule za težine σ_k, $k = 1, \ldots, n$, kvadraturne formule (4.1) kada su čvorovi x_k, $k = 1, \ldots, n$, poznati.

Teorema 4.1. *Pretpostavimo da su dati međusobno različiti čvorovi x_k, $k = 1, \ldots, n$, kvadraturne formule* (4.1). *Tada težine možemo predstaviti u obliku*

$$\sigma_k = \int_{-1}^{1} \ell_k(x) \cos \zeta(x - x_k)\, \mathrm{d}x, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Dokaz. Kako je $\omega_\nu(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$ i

$$\omega_\nu(x) \cos \zeta(x - x_\nu) = \omega_\nu(x) \cos \zeta x_\nu \cos \zeta x + \omega_\nu(x) \sin \zeta x_\nu \sin \zeta x, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

zaključujemo da je $\omega_\nu(x) \cos \zeta(x - x_\nu) \in \mathcal{F}_{2n}(\zeta)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Za takve funkcije kvadraturna formula (4.1) je tačna, pa za $\nu = 1, \ldots, n$ imamo

$$\int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \cos \zeta(x - x_\nu)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \omega_\nu(x_k) \cos \zeta(x_k - x_\nu) = \sigma_\nu \omega_\nu(x_\nu),$$

odakle lako dobijamo (4.2). $\square$

Prethodna teorema garantuje jedinstvenost težina kvadraturne formule (4.1) kada su čvorovi dati. Neposredna posledica prethodne teoreme je i da težine kvadraturne formule (4.1) možemo posmatrati kao neprekidne funkcije čvorova na zatvorenom podskupu od $\mathbb{R}^n$, koji ne sadrži tačke sa nekim parom jednakih koordinata. To sledi iz Lebesgue-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji (videti [68, p. 83]).

Teorema 4.2. *Ako su x_k, $k = 1, \ldots, n$, čvorovi kvadraturne formule* (4.1)*, onda oni zadovoljavaju sledeći sistem jednačina*

$$\int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \sin\zeta(x - x_\nu)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Obratno, ako x_k, $k = 1, \ldots, n$, zadovoljavaju sistem jednačina (4.3)*, pod uslovom da je $x_k \neq x_j$, $k \neq j$, $k, j = 1, \ldots, n$, tada su x_k, $k = 1, \ldots, n$, čvorovi kvadraturne formule* (4.1)*.*

Dokaz. Neka su x_k, $k = 1, \ldots, n$, čvorovi kvadraturne formule (4.1). Kako je $\omega_\nu \in \mathcal{P}_{n-1}$, $\nu = 1, \ldots, n$, to je $\omega_\nu(x) \sin\zeta(x - x_\nu) \in \mathcal{F}_{2n}(\zeta)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Prema tome, kvadraturna formula (4.1) je tačna za sve funkcije $\omega_\nu(x)\sin\zeta(x - x_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, odakle dobijamo

$$\int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \sin\zeta(x - x_\nu)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

tj. čvorovi x_k, $k = 1, \ldots, n$, zadovoljavaju sistem jednačina (4.3).

Obratno, pretpostavimo da je $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, gde je $x_k \neq x_j$, $k \neq j$, $k, j = 1, \ldots, n$, rešenje sistema (4.3). Funkcije iz prostora $\mathcal{F}_{2n}(\zeta)$ možemo predstaviti pomoću funkcija $\omega_\nu(x)\sin\zeta(x - x_\nu)$ i $\omega_\nu(x)\cos\zeta(x - x_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Zaista, za $\nu = 1, \ldots, n$ imamo

$$\begin{aligned}
\omega_\nu(x)\sin\zeta x &= \omega_\nu(x)\cos\zeta x_\nu \sin\zeta(x - x_\nu) + \omega_\nu(x)\sin\zeta x_\nu \cos\zeta(x - x_\nu),\\
\omega_\nu(x)\cos\zeta x &= -\omega_\nu(x)\sin\zeta x_\nu \sin\zeta(x - x_\nu) + \omega_\nu(x)\cos\zeta x_\nu \cos\zeta(x - x_\nu).
\end{aligned}$$

Obzirom da je $x_k \neq x_j$, za $k \neq j$, $k, j = 1, \ldots, n$, polinomi ω_ν, $\nu = 1, \ldots, n-1$, obrazuju bazu linearnog prostora polinoma stepena ne višeg od $n - 1$.

Treba još pokazati da težine σ_k, $k = 1, \ldots, n$, kvadraturne formule (4.1), možemo da odredimo tako da ona tačno integrali funkcije $\omega_\nu \cos\zeta(x - x_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Međutim, ovaj problem je veće rešen u dokazu teoreme 4.1 i znamo da su težine σ_k, $k = 1, \ldots, n$, jednoznačno određene. □

Sistem jednačina (4.3), koji se pojavljuje u prethodnoj teoremi, zauzima centralno mesto u svim narednim analizama tokom ovog poglavlja. Nažalost, postoje brojna rešenja sistema (4.3) koja ne predstavljaju čvorove kvadraturne formule (4.1). Naravno, to su rešenja sistema (4.3) kod kojih je $x_k = x_j$, za neke $k \neq j$,

$k, j = 1, \ldots, n$. Na primer, ako je n neparan broj, tada sistem (4.3) uvek ima trivijalno rešenje $x_\nu = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$.

Pošto nas interesuju jedino ona rešenja sistema (4.3) koja su čvorovi kvadraturne formule (4.1), bitno je da znamo ponašanje Jacobiana sistema (4.3) u bilo kom takvom rešenju. Važi sledeća teorema.

Teorema 4.3. *Neka su x_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, čvorovi kvadraturne formule* (4.1). *Ako je $\sigma_\nu \neq 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, tada je Jacobian sistema* (4.3) *u rešenju x_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, regularan.*

Za dokaz ove teoreme potrebna nam je neznatna modifikacija Bochner-ove teoreme. Prema Bochner-ovoj teoremi svaka neprekidna pozitivno definitna funkcija je Fourier-ova transformacija konačne pozitivne Borel-ove mere. Važi i obrat Bochner-ove teoreme ([79, p. 290]), tj. Fourier-ova transformacija svake konačne pozitivne Borel-ove mere na $\mathbb{R}^n$ je pozitivno definitna. Za modifikovanu teoremu koju ćemo dokazati potrebna nam je definicija striktno pozitivno definitne funkcije.

Definicija 4.1. *Funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ je striktno pozitivno definitna ako za svako $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ i svaki skup realnih, međusobno različitih tačaka x_k, $k = 1, \ldots, n$, važi*

$$\sum_{k,\nu=1}^{n} c_k \overline{c}_\nu f(x_k - x_\nu) > 0. \tag{4.4}$$

Teorema 4.4. *Neka je μ konačna pozitivna Borel-ova mera sa ograničenim realnim nosačem, koja je simetrična u odnosu na nulu i koja ima bar jednu tačku nagomilavanja na $\mathbb{R}$. Tada je funkcija*

$$f(x) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}\mu(t),$$

realna, parna i striktno pozitivno definitna.

Dokaz. Jasno je da je funkcija f realna, jer je nosač mere μ simetričan u odnosu na nulu, tj. $\int \sin xt \, \mathrm{d}\mu(t) = 0$. Takođe, lako se vidi i da je f parna funkcija jer je

$$f(-x) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}\mu(t) = \overline{f(x)} = f(x).$$

Primenjujući elementarne transformacije dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{k,\nu=1}^{n} c_k \overline{c}_\nu f(x_k - x_\nu) &= \sum_{k,\nu=1}^{n} c_k \overline{c}_\nu \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_k - x_\nu)t} \, \mathrm{d}\mu(t) \\ &= \int \sum_{k,\nu=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k t} \overline{c}_\nu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_\nu t} \, \mathrm{d}\mu(t) = \int \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k t} \right|^2 \mathrm{d}\mu(t). \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da postoji $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, takvo da (4.4) ne važi. Tada, na osnovu prethodne jednakosti, dobijamo

$$\int \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i} x_k t} \right|^2 \mathrm{d}\mu(t) = 0.$$

Pošto je μ Borel-ova mera i integrand neprekidan, sledi da je (videti [68, p. 71])

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i} x_k t} \right|^2 = 0, \quad t \in \operatorname{supp}(\mu),$$

odnosno, ekvivalentno

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i} x_k t} = 0, \quad t \in \operatorname{supp}(\mu).$$

Kako je ova funkcija cela u $\mathbb{C}$ i nosač mere μ sadrži bar jednu tačku nagomilavanja, koristeći standardni argument povezanosti (videti [27]) zaključujemo da prethodna jednakost važi u celoj kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$, tj.

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i} x_k t} = 0, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Pretpostavimo da su tačke x_k, $k = 1, \ldots, n$, uređene tako da važi $x_k < x_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n-1$; ukoliko to nije slučaj možemo ih prenumerisati. Množeći prethodnu jednakost sa $\mathrm{e}^{-\mathrm{i} x_n t}$ dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_k - x_n) t} + c_n = 0, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Ako sada izaberemo $t = -\mathrm{i}u$ i pustimo da $u \to +\infty$, dobićemo da je $c_n = 0$. Koristeći istu proceduru dobijamo da je $c_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, što je u kontradikciji sa našom pretpostavkom. $\square$

Sada možemo dokazati i teoremu 4.3.

Dokaz teoreme 4.3. Elemente Jacobiana sistema (4.3) u bilo kom rešenju sistema možemo predstaviti u sledećem obliku

$$\partial_{x_k} \Phi_\nu(\mathbf{x}) = - \int_{-1}^{1} \omega_{\nu,k}(x) \sin \zeta(x - x_\nu) \, \mathrm{d}x, \quad k \neq \nu, \quad k, \nu = 1, \ldots, n,$$

i

$$\partial_{x_\nu} \Phi_\nu(\mathbf{x}) = -\zeta \int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \cos \zeta(x - x_\nu) \, \mathrm{d}x, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

pri čemu je moguća zamena redosleda diferenciranja i integracije na osnovu Lebesgue-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji ([68, p. 85]). Kako je $\omega_{\nu,k} \in \mathcal{P}_{n-2}$ i $\omega_\nu \in \mathcal{P}_{n-1}$, možemo primeniti kvadraturnu formulu (4.1) za izračunavanje gornjih integrala. Na taj način dobijamo

$$\partial_{x_k} \Phi_\nu(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\sigma_k \omega_{\nu,k}(x_k) \sin\zeta(x_k - x_\nu), & k \neq \nu, \\ -\zeta\sigma_\nu\omega_\nu(x_\nu), & k = \nu. \end{cases}$$

Kako za $k = \nu$, zbog neprekidnosti, imamo

$$\frac{\sin\zeta(x_k - x_\nu)}{x_k - x_\nu} \to \zeta,$$

možemo pisati

$$\partial_{x_k} \Phi_\nu(\mathbf{x}) = -\sigma_k \omega_k(x_k) \frac{\sin\zeta(x_k - x_\nu)}{x_k - x_\nu}, \quad k, \nu = 1, \ldots, n.$$

Sada lako možemo računati determinantu Jacobiana:

$$\left| \partial_{x_k} \Phi_\nu(\mathbf{x}) \right|_{\nu,k=1}^{n} = \left(\prod_{k=1}^{n} \sigma_k \omega_k(x_k) \right) \left| \frac{\sin\zeta(x_k - x_\nu)}{x_k - x_\nu} \right|_{\nu,k=1}^{n}.$$

Koristeći teoremu 4.4 zaključujemo da je funkcija $\sin(\zeta x)/x$, po x, striktno pozitivno definitna, jer zbog

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = 2\frac{\sin x}{x},$$

predstavlja Fourier-ovu transformaciju Legendre-ove mere. To znači da matrica sa elementima $\sin(\zeta(x_k - x_\nu))/(x_k - x_\nu)$ ne može imati nulu kao sopstvenu vrednost, tj. njena determinanta ne može biti jednaka nuli. Zbog pretpostavke da je $\sigma_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, determinanta Jacobiana u bilo kom rešenju sistema (4.3) ne može biti jednaka nuli. $\square$

Uslov $\sigma_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, u teoremi 4.3 je sasvim prirodan. U suprotnom, ako bi važilo $\sigma_\mu = 0$, za neko $\mu = 1, \ldots, n$, tada kvadraturna formula uopšte ne bi zavisila od čvora x_μ, odnosno, mogli bi izabrati proizvoljno x_μ nezavisno od tačaka $x_1, \ldots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$. Da bi to videli potrebna nam je sledeća lema.

Lema 4.1. *Neka su x_k, $k = 1, \ldots, n$, međusobno različiti realni brojevi. Tada su x_k, $k = 1, \ldots, n$, čvorovi kvadraturne formule* (4.1)*, pri čemu je $\sigma_\mu = 0$, za neko $\mu = 1, \ldots, n$, ako i samo ako je*

$$\int_{-1}^{1} \omega_\mu(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta x}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{4.5}$$

i

$$\int_{-1}^{1} \omega_{\mu,\nu}(x) \sin\zeta(x - x_\nu)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 1, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, n. \tag{4.6}$$

Dokaz. Ako su x_k, $k = 1, \ldots, n$, čvorovi kvadraturne formule (4.1), pri čemu je $\sigma_\mu = 0$, iz (4.2) i (4.3) dobijamo (4.5). Izaberimo sada neko $\nu \neq \mu$. Ako primenimo kvadraturnu formulu (4.1) za izračunavanje integrala u (4.6) dobijamo upravo ono što se tvrdi u lemi.

Pretpostavimo sada da imamo dat skup međusobno različitih tačaka x_k, $k = 1, \ldots, n$, takvih da važi (4.5) i (4.6). Množeći (4.5) sa $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta x_\mu}$ i uzimajući imaginarni deo dobijamo

$$\int_{-1}^{1} \omega_\mu(x) \sin \zeta(x - x_\mu)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Ako sada izaberemo $\nu \neq \mu$, pomnožimo (4.5) sa $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta x_\nu}$ i uzmemo imaginarni deo, a zatim od toga oduzmemo jednakost (4.6) pomnoženu sa $x_\mu - x_\nu$, dobićemo

$$\int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \sin \zeta(x - x_\nu)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Prema teoremi 4.2, x_k, $k = 1, \ldots, n$, su čvorovi kvadraturne formule (4.1). Množeći (4.5) sa $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta x_\mu}$ i uzimajući realni deo dobijamo $\sigma_\mu = 0$. $\square$

Posledica prethodne leme je da je za date čvorove x_k, $k = 1, \ldots, n$, kvadraturne formule (4.1), uslov $\sigma_\mu = 0$ ekvivalentan sa

$$\int_{-1}^{1} \omega_\mu(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta x}\, \mathrm{d}x = 0.$$

Da bi dokazali teoremu o egzistenciji posmatranih kvadraturnih formula, potrebni su nam sledeći pomoćni rezultati.

Teorema 4.5. *Za*

$$u_{2n} = \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!} \int_{-1}^{1} x^{2n} \cos \zeta x\, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

važi

$$u_{2n+2} + u_{2n} = \frac{2\sin\zeta}{\zeta} \frac{\zeta^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{2\cos\zeta}{\zeta} \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.7}$$

i $u_0 = 2\sin\zeta/\zeta$. *Takođe, za* $n \in \mathbb{N}_0$ *važi*

$$u_{2n} = \frac{2\sin\zeta}{\zeta}(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} + \frac{2\cos\zeta}{\zeta}(-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{4.8}$$

Dokaz. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= \frac{\zeta^{2n+2}}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} x^{2n+2} \cos \zeta x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\zeta^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{2\sin\zeta}{\zeta} + \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{2\cos\zeta}{\zeta} - u_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Jednakost (4.8) dokazujemo induktivno. Tvrđenje je tačno za $n = 0$ i ako pretpostavimo da je tačno za neko $n \in \mathbb{N}$, zamenom izraza za u_{2n} u (4.7), dobijamo

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= \frac{\zeta^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{2\sin\zeta}{\zeta} + \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{2\cos\zeta}{\zeta} - u_{2n} \\ &= \frac{\zeta^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{2\sin\zeta}{\zeta} + \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{2\cos\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{2\sin\zeta}{\zeta}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} - \frac{2\cos\zeta}{\zeta}(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{2\sin\zeta}{\zeta}(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} + \frac{2\cos\zeta}{\zeta}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!}, \end{aligned}$$

tj. (4.8) važi za sve $n \in \mathbb{N}_0$. □

Slična teorema važi i za niz momenata sinusne funkcije.

Teorema 4.6. *Za*

$$v_{2n+1} = \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_{-1}^{1} x^{2n+1}\sin\zeta x\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

važi

$$v_{2n+1} = -\frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{2\cos\zeta}{\zeta} + u_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$v_{2n+1} = -\frac{2\cos\zeta}{\zeta}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{2\sin\zeta}{\zeta}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\zeta^{2k}}{(2k)!}. \tag{4.9}$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu teoreme 4.5. □

Kao posledicu prethodne dve teoreme imamo sledeće tvrđenje.

Teorema 4.7. *Ako je $\sin 2\zeta > 0$, tada je $\operatorname{sgn}(u_{2n}) = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)$ ili $u_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, a ako je $\sin 2\zeta < 0$, tada je $\operatorname{sgn}(v_{2n+1}) = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)$ ili $v_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. U slučaju $\sin\zeta = 0$ važi $\operatorname{sgn}(u_{2n}) = -\operatorname{sgn}(v_{2n+1}) = \operatorname{sgn}(\cos\zeta)$ ili $u_{2n} = 0$ ili $v_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, a u slučaju $\cos\zeta = 0$ važi $\operatorname{sgn}(u_{2n}) = \operatorname{sgn}(v_{2n+1}) = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)$ ili $u_{2n} = 0$ ili $v_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Kada je $\sin 2\zeta \geq 0$, u_{2n} i u_{2n+2} ne mogu biti istovremeno jednaki nuli za $n \in \mathbb{N}_0$, a kada je $\sin 2\zeta \leq 0$, v_{2n+1} i v_{2n+3} ne mogu istovremeno biti jednaki nuli za $n \in \mathbb{N}_0$.*

Dokaz. Za dokaz ovog tvrđenja iskoristićemo Leibnitz-ovu teoremu o alternativnim redovima (videti [69]). Kako je

$$\cos\zeta = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\zeta^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin\zeta = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

za sve $\zeta \in \mathbb{R}$, na osnovu Leibnitz-ove teoreme sledi da je

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} = \cos\zeta - \lambda(-1)^{n+1}\frac{\zeta^{2n+2}}{(2n+2)!}, \qquad \text{za neko } \lambda \in [0,1),$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin\zeta - \eta(-1)^{n+1}\frac{\zeta^{2n+3}}{(2n+3)!}, \qquad \text{za neko } \eta \in [0,1).$$

Koristeći ove relacije dobijamo sledeće ocene za u_{2n}, $n \in \mathbb{N}_0$, u slučaju kada je $\sin 2\zeta > 0$

$$\begin{aligned}\frac{u_{2n}}{2} &= \frac{\sin\zeta}{\zeta}(-1)^n\left(\cos\zeta - \lambda(-1)^{n+1}\frac{\zeta^{2n+2}}{(2n+2)!}\right)\\ &\quad + \frac{\cos\zeta}{\zeta}(-1)^{n-1}\left(\sin\zeta - \eta(-1)^{n}\frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\ &= \lambda\frac{\zeta^{2n+1}\sin\zeta}{(2n+2)!} + \eta\frac{\zeta^{2n}\cos\zeta}{(2n+1)!} = \frac{\zeta^{2n}\mathrm{sgn}(\sin\zeta)}{(2n+1)!}\left(\frac{\lambda\zeta|\sin\zeta|}{2n+2} + \eta|\cos\zeta|\right).\end{aligned}$$

Sada je jasno da znak od u_{2n} zavisi samo od znaka $\sin\zeta$, jer su sve ostale veličine u prethodnoj jednakosti nenegativne, uz mogućnost $\lambda = \eta = 0$, koja daje $u_{2n} = 0$. Tvrđenja o znaku u_{2n}, $n \in \mathbb{N}_0$, za $\sin\zeta = 0$ ili $\cos\zeta = 0$ su očigledna.

Koristeći slične argumente za v_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}_0$, u slučaju $\sin 2\zeta < 0$ dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{v_{2n+1}}{2} &= -\frac{\cos\zeta}{\zeta}(-1)^n\left(\sin\zeta - \eta(-1)^{n+1}\frac{\zeta^{2n+3}}{(2n+3)!}\right)\\ &\quad + \frac{\sin\zeta}{\zeta}(-1)^{n}\left(\cos\zeta - \lambda(-1)^{n+1}\frac{\zeta^{2n+2}}{(2n+2)!}\right)\\ &= -\eta\frac{\zeta^{2n+2}\cos\zeta}{(2n+3)!} + \lambda\frac{\zeta^{2n+1}\sin\zeta}{(2n+2)!} = \frac{\zeta^{2n+1}\mathrm{sgn}(\sin\zeta)}{(2n+2)!}\left(\frac{\eta\zeta|\cos\zeta|}{2n+3} + \lambda|\sin\zeta|\right),\end{aligned}$$

odakle se vidi da znak od v_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}_0$, zavisi samo od znaka $\sin\zeta$, jer su sve ostale veličine u prethodnoj jednakosti nenegativne, uz mogućnost $\lambda = \eta = 0$, koja daje $v_{2n+1} = 0$. Takođe, tvrđenja o znaku od v_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}_0$, za $\cos\zeta = 0$ ili $\sin\zeta = 0$ su očigledna.

Poslednje tvrđenje teoreme sledi iz rekurentne relacije (4.7) za niz u i iz slične rekurentne relacije za niz v. $\square$

Za fiksirano ζ opisaćemo skup rešenja x_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, sledeće jednačine

$$\int_{-1}^{1}\prod_{\nu=1}^{n}(x - x_\nu)\cos\zeta x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Obeležimo taj skup sa C_n.

Teorema 4.8. *Skup C_n, $n \geq 2$, je zatvoren, simetričan u odnosu na koordinatni početak i u slučaju* $\sin 2\zeta \geq 0$ *važi*

$$C_n \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_\nu > 0,\ \nu = 1, \dots, n\} = \varnothing.$$

Dokaz. Za $\mathbf{x} \in C_n$, iz činjenice da je cosinusna funkcija parna, dobijamo da je

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{n} (x + x_\nu) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{n} (-x - x_\nu) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x \\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

tj. $-\mathbf{x} \in C_n$, odnosno, da je skup C_n simetričan.

Neka je $\mathbf{x}^{(k)} \in C_n$, $k \in \mathbb{N}$, i $\lim_{k \to +\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)}$. Tada, primenom Lebesgue-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji ([68, p. 83]), dobijamo

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{k \to +\infty} \int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu^{(k)}) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \lim_{k \to +\infty} \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu^{(k)}) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu^{(0)}) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

tj. $\mathbf{x}^{(0)} \in C_n$, pa je skup C_n zatvoren.

Da bi dokazali poslednje tvrđenje teoreme izaberimo proizvoljne $x_\nu > 0$, $\nu = 1, \dots, n$. Polinom koji se javlja pod integralom možemo predstaviti u razvijenom obliku

$$\prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_{n,n-\nu} x^\nu,$$

gde su $\sigma_{n,\nu}$ elementarne simetrične funkcije, date sa

$$\sigma_{n,\nu} = (-1)^\nu \sum_{(k_1, \dots, k_\nu)} x_{k_1} \cdots x_{k_\nu}, \tag{4.10}$$

gde se sumiranje vrši po svim kombinacijama bez ponavljanja dužine ν skupa $\{1, \dots, n\}$ (videti [61, p. 275]). Ako prilikom integracije koristimo polinom u razvijenom obliku dobijamo

$$\int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{(2\nu)! \sigma_{n,n-2\nu} u_{2\nu}}{\zeta^{2\nu}},$$

gde je u_{2n} definisano u teoremi 4.5. Po pretpostavci je $\sin 2\zeta \geq 0$, a prema teoremi 4.7 svi u_{2n} imaju isti znak i bar jedan od njih nije jednak nuli. Takođe, i svi $\sigma_{n,n-2\nu}$, $\nu = 0, 1, \dots, [n/2]$, imaju isti znak jer su svi $x_\nu > 0$, $\nu = 1, \dots, n$.

Prema tome, svi sabirci u prethodnoj sumi imaju isti znak. To znači da ta suma ne može biti jednaka nuli, odnosno da $\mathbf{x} \notin C_n$. $\square$

Slično možemo opisati i skup S_n rešenja sledeće jednačine

$$\int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) \sin \zeta x \, \mathrm{d}x = 0.$$

Važi sledeća teorema.

Teorema 4.9. *Skup S_n, $n \geq 3$, je zatvoren, simetričan u odnosu na koordinatni početak i u slučaju* $\sin 2\zeta \leq 0$ *važi*

$$S_n \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_\nu > 0, \ \nu = 1, \ldots, n\} = \varnothing.$$

Sada možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 4.10. *U slučaju* $\sin 2\zeta \geq 0$ *za* $2 \leq n < \zeta/\pi - 1/2$ *sistem jednačina* (4.3) *ima najmanje* $2\binom{[\zeta/\pi - 1/2]}{n}$ *rešenja, kod kojih su svi čvorovi pozitivni ili svi negativni.*

U slučaju $\sin 2\zeta < 0$ *za* $3 \leq n < \zeta/\pi - 1$ *sistem jednačina* (4.3) *ima najmanje* $2\binom{[\zeta/\pi - 1]}{n}$ *rešenja, kod kojih su svi čvorovi pozitivni ili svi negativni.*

Dokaz. Razmotrimo najpre slučaj $\sin 2\zeta \geq 0$. Sistem jednačina (4.3) ćemo zapisati u obliku

(4.11)
$$x_\nu = \Psi_\nu^C(\mathbf{x}) = \frac{1}{\zeta} \left(\operatorname{arctg} \frac{\int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \sin \zeta x \, \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x} + k_\nu \pi \right), \quad k_\nu \in \mathbb{Z}, \ \nu = 1, \ldots, n.$$

Takav zapis ima smisla jedino za rešenja koja zadovoljavaju uslov

$$\int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x \neq 0, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Prema teoremi 4.8 za $\nu = n$ skup rešenja jednačine $\int_{-1}^{1} \omega_n(x) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x = 0$, možemo zapisati kao $C_{n-1} \times \mathbb{R}$. Ako definišemo funkcije $p_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\nu = 1, \ldots, n$, na sledeći način

$$p_\nu(x_1, \ldots, x_\nu, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

tada skup rešenja sistema

$$\int_{-1}^{1} \omega_\nu(x) \cos \zeta x \, \mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

možemo zapisati kao $p_\nu(C_{n-1} \times \mathbb{R})$. Prema tome, gornja transformacija sistema važi za sva rešenja koja pripadaju skupu $\mathbb{R}^n \backslash (\cup_{\nu=1}^n p_\nu(C_{n-1} \times \mathbb{R}))$. Prema teoremi 4.8, skup C_n ima neprazan presek sa skupom $\{\mathbf{x} \mid x_\nu > 0,\ \nu = 1, \ldots, n\}$. To znači da je $\{\mathbf{x} \mid x_\nu > 0,\ \nu = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n \backslash (\cup_{\nu=1}^n p_\nu(C_{n-1} \times \mathbb{R}))$. Dakle, bilo koje rešenje sistema (4.3) sa svim pozitivnim čvorovima će takođe biti i rešenje sistema (4.11). Prema teoremi 4.8, skup C_{n-1} je simetričan u odnosu na koordinatni početak, pa isto važi i za skup $\cup_{\nu=1}^n p_\nu(C_{n-1} \times \mathbb{R})$. To znači da sve što dokažemo za kvadraturne formule kod kojih su svi čvorovi pozitivni važi i za kvadraturne formule kod kojih su svi čvorovi negativni.

Izaberimo vektor $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ sa striktno rastućim koordinatama prirodnih brojeva, takvih da je $k_n < \zeta/\pi - 1/2$. Funkcije $\Psi_\nu^C(\mathbf{x})$, $\nu = 1, \ldots, n$, definisane sa (4.11), su neprekidne po $\mathbf{x}$ za $x_\nu > 0$, $\nu = 1, \ldots, n$. Definišimo sada preslikavanja $\mathbf{\Psi}_\mathbf{k}^C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa $\mathbf{\Psi}_\mathbf{k}^C(\mathbf{x}) = (\Psi_1^C(\mathbf{x}), \ldots, \Psi_n^C(\mathbf{x}))$. Ono je neprekidno po $\mathbf{x}$, za $x_\nu > 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, jer su mu sva koordinatna preslikavanja neprekidna. Preslikavanje $\mathbf{\Psi}_\mathbf{k}^C$ slika neprekidno konveksan zatvoren skup $A_\mathbf{k} = \mathop{\times}\limits_{\nu=1}^{n} \left[\left(k_\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\zeta}, \left(k_\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\zeta}\right]$ u samog sebe. Prema Brouwer-ovoj teoremi o fiksnoj tački (videti [75, pp. 161–162]), preslikavanje $\mathbf{\Psi}_\mathbf{k}^C$ ima fiksnu taču u $A_\mathbf{k}$. Dakle, postoji tačka $\mathbf{x_k} \in A_\mathbf{k}$ koja zadovoljava sistem jednačina $\mathbf{x_k} = \mathbf{\Psi}_\mathbf{k}^C(\mathbf{x_k})$. Kako je $\int_{-1}^1 \omega_\nu(x) \cos\zeta x \,\mathrm{d}x \neq 0$, zaključujemo da ne možemo imati rešenje kod koga je ν-ta koordinata jednaka $(k_\nu \pm 1/2)\pi/\zeta$. To znači da su sve koordinate rešenja $\mathbf{x_k}$ različite, jer su koordinate vektora $\mathbf{k}$ različite. Prema tome, koordinate vektora $\mathbf{x_k}$ su čvorovi kvadraturne formule (4.1). Prema lemi 4.1 znamo da su za ovakvo rešenje sve težine različite od nule.

Formula za broj rešenja se lako dobija. Na osnovu prethodno iznetih argumenata vidimo da je broj rešenja jednak broju izbora uređenih n-torki celih brojeva iz skupa $\{1, \ldots, [\zeta/\pi - 1/2]\}$, pomnoženom sa dva da bi uključili i rešenja kod kojih su svi čvorovi negativni.

Razmotrimo sada slučaj $\sin 2\zeta \leq 0$. Sistem jednačina (4.3) možemo zapisati u sledećem obliku:
(4.12)
$$x_\nu = \Psi_\nu^S(\mathbf{x}) = \frac{1}{\zeta}\left(\operatorname{arcctg}\frac{\int_{-1}^1 \omega_\nu(x)\cos\zeta x \mathrm{d}x}{\int_{-1}^1 \omega_\nu(x)\sin\zeta x \mathrm{d}x} + k_\nu\pi\right), \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad k_\nu \in \mathbb{Z}.$$

Neka je $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ vektor sa striktno rastućim koordinatama pozitivnih celih brojeva, takvih da je $k_n < \zeta/\pi - 1$. Koristeći iste argumente kao u prvom delu dokaza može se pokazati da je

$$\int_{-1}^1 \omega_\nu(x) \sin\zeta x \,\mathrm{d}x \neq 0, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

na skupu $\{\mathbf{x} \mid x_\nu > 0,\ \nu = 1, \ldots, n\}$ i da preslikavanje $\mathbf{\Psi}_\mathbf{k}^S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gde je $\mathbf{\Psi}_\mathbf{k}^S(\mathbf{x}) = (\Psi_1^S(\mathbf{x}), \ldots, \Psi_n^S(\mathbf{x}))$, ima fiksnu tačku u skupu $B_\mathbf{k} = \mathop{\times}\limits_{\nu=1}^{n}\left[k_\nu\frac{\pi}{\zeta}, (k_\nu + 1)\frac{\pi}{\zeta}\right]$, pri čemu ν-ta koordinata te fiksne tačke ne može imati nijednu od vrednosti $k_\nu \pi/\zeta$ i $(k_\nu + 1)\pi/\zeta$.

Konačno, broj rešenja u ovom slučaju jednak je broju načina izbora uređenih n-torki celih brojeva iz skupa $\{1, \dots, [\zeta/\pi - 1]\}$, pomnoženom sa dva da bi uključili i rešenja kod kojih su svi čvorovi negativni. $\square$

Teorema 4.10 delimično rešava problem egzistencije kvadraturne formule (4.1). Razmotrićemo sada pitanje egzistencije kvadraturne formule (4.1) koja ima i pozitivne i negativne čvorove. Za to su nam potrebni neki pomoćni rezultati.

Neka je $\mathcal{A} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}$ linearni funkcional na $\mathcal{P}$, gde je $\mathcal{P}$ skup svih polinoma. Svaki polinom p stepena n sa realnim nulama $x_1, \dots, x_n$ može se predstaviti u obliku

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n,n-k} x^k,$$

gde su $\sigma_{n,k}$ elementarne simetrične funkcije date sa (4.10).

Označimo vektor nula polinoma p sa $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i posmatrajmo sledeći problem: *Naći*

$$\min_{\mathbf{x} \in C} \mathcal{A}p = \min_{\mathbf{x} \in C} \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n,n-k} \mathcal{A} x^k$$

za dati kompaktan povezan skup $C \in \mathbb{R}^n$.

Definišimo funkciju Φ na sledeći način: $\Phi(\mathbf{x}) = \mathcal{A}p$, $\mathbf{x} \in C$. Naš problem se sada svodi na određivanje $\min\limits_{\mathbf{x} \in C} \Phi(\mathbf{x})$.

Lema 4.2. *Funkcija Φ je harmonijska na $C \setminus \partial C$.*

Dokaz. Svaka elementarna simetrična funkcija je očigledno harmonijska, tj. zadovoljava Laplace-ovu jednačinu

$$\Delta \sigma_{n,k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

gde je

$$\Delta = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}$$

Laplace-ov operator. Funkcija Φ je linearna kombinacija harmonijskih funkcija, pa je i sama harmonijska. $\square$

Prema strogom principu maksimuma (minimuma) za harmonijske funkcije važi sledeća lema.

Lema 4.3. *Funkcija Φ maksimalnu (minimalnu) vrednost na C mora dostizati na ∂C, tj.*

$$\max_{\mathbf{x} \in C} (\min_{\mathbf{x} \in C}) \Phi(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial C} (\min_{\mathbf{x} \in \partial C}) \Phi(\mathbf{x}).$$

Naš problem se sada svodi na određivanje $\min\limits_{\mathbf{x}\in\partial C}\Phi(\mathbf{x})$.

Razmotrimo prvo slučaj $\sin 2\zeta < 0$.

Neka je

$$b_\nu = (N-\nu+1)\frac{\pi}{\zeta}, \quad \nu = 1,\dots,N, \quad N = [\zeta/\pi] \tag{4.13}$$

($[t]$ označava ceo deo broja t) i

$$B_n = \mathop{\times}_{\nu=1}^{n}([-b_\nu,0]\times[0,b_\nu])\times[-b_{n+1},b_{n+1}], \quad n < N. \tag{4.14}$$

Obeležimo

$$I_k = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1} t\prod_{\nu=1}^{k}(t^2-b_\nu^2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t, \quad k = 0,1,\dots,N. \tag{4.15}$$

Za $\zeta > 0$ i $\sin 2\zeta < 0$ lako dobijamo da je

$$I_0 = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1} t\sin\zeta t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|\sin\zeta|}\frac{-\zeta\sin 2\zeta + 2\sin^2\zeta}{\zeta^2} > 0.$$

Koristeći dobro poznatu formulu (videti [23, 1.431, p. 43])

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

dobijamo da je

$$\sin\zeta t = \zeta t\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{\zeta}{k\pi}\right)^2 t^2\right). \tag{4.16}$$

Specijalno,

$$\sin\zeta = \zeta\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\zeta^2}{k^2\pi^2}\right).$$

U prethodnom proizvodu prvih N činilaca je negativno, a svi ostali su pozitivni, pa je $\operatorname{sgn}(\sin\zeta) = (-1)^N$, tj.

$$I_k = (-1)^N\int_{-1}^{1} t\prod_{\nu=1}^{k}(t^2-b_\nu^2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t, \quad k = 1,\dots,N.$$

Zamenom (4.16) u prethodnu formulu za I_k dobijamo

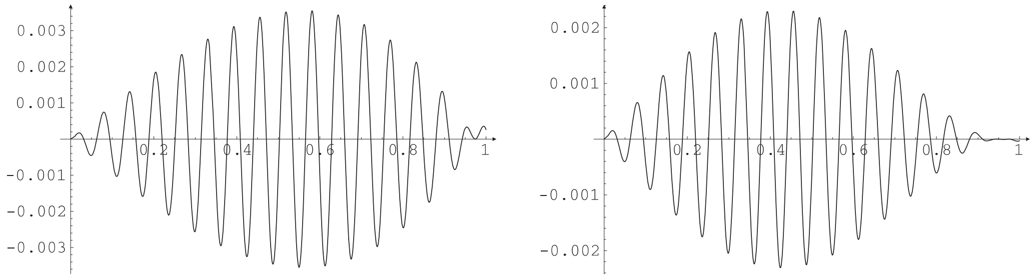
$$I_k = 2\zeta(-1)^{N+k}\int_0^1 t^2\prod_{\nu=1}^{k}(t^2-b_\nu^2)^2\prod_{l=1}^{N}\frac{\zeta^2}{l^2\pi^2}\prod_{l=1}^{N-k}\left(\frac{l^2\pi^2}{\zeta^2}-t^2\right)\prod_{l=N+1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2\zeta^2}{l^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t$$

(prazan proizvod jednak je 1). Iz prethodne jednakosti se lako vidi da je $I_N > 0$.

U prethodnom integralu, za $k = 1, \ldots, N-1$, svi činioci su pozitivni sem $\prod_{l=1}^{N-k}\left(\frac{l^2\pi^2}{\zeta^2} - t^2\right)$, što znači da podintegralna funkcija menja znak $N-k$ puta na intervalu $(0,1)$. Obeležimo podintegralnu funkciju sa $f(t,\zeta,k)$, tj.

$$f(t,\zeta,k) = t^2 \prod_{\nu=1}^{k}(t^2 - b_\nu^2)^2 \prod_{l=1}^{N} \frac{\zeta^2}{l^2\pi^2} \prod_{l=1}^{N-k}\left(\frac{l^2\pi^2}{\zeta^2} - t^2\right) \prod_{l=N+1}^{+\infty}\left(1 - \frac{t^2\zeta^2}{l^2\pi^2}\right).$$

Na slici 4.2 prikazan je grafik funkcije $f(t,\zeta,k)$, $t \in (0,1)$, za $\zeta = 100$, $k = 1$ (levo) i $k = 2$ (desno).



Slika 4.2: Grafik funkcije $f(t,\zeta,k)$, $t \in (0,1)$, za $\zeta = 100$, $k = 1$ (levo) i $k = 2$ (desno)

Na osnovu velikog broja numeričkih eksperimenata primetili smo da I_k ima isti znak kao i funkcija $f(t,\zeta,k)$ nakon poslednje promene znaka. Na osnovu toga formulisali smo sledeću hipotezu (videti [78, p. 40]).

Hipoteza 4.1. *Neka je $\zeta > 0$ i $\sin 2\zeta < 0$. Tada za veličine I_k, definisane sa* (4.15)*, važi $I_k > 0$ za sve $k = 1, \ldots, N$.*

Napomenimo da ćemo ubuduće jednostavno reći integral I_k, pri čemu ćemo podrazumevati da je to izraz oblika (4.15), tj. proizvod $\operatorname{sgn}(\sin\zeta)$ i odgovarajućeg integrala.

Uz hipotezu 4.1 možemo dokazati sledeću teoremu, koja je ključna za dokaz egzistencije kvadraturne formule (4.1) koja ima i pozitivne i negativne čvorove.

Teorema 4.11. *Neka je $\zeta > 0$ i $\sin 2\zeta < 0$. Tada za sve $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in B_n$, gde je skup B_n dat sa* (4.14)*, važi*

$$\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{2n+1}(t - x_\nu)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t > 0. \tag{4.17}$$

Za dokaz teoreme 4.11 potrebni su nam neki pomoćni rezultati.

Lema 4.4. *Ako je skup B_n definisan sa* (4.14), *tada je*

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{x}\in B_n}(\min_{\mathbf{x}\in B_n})\Phi(\mathbf{x}) \\
(4.18)\qquad &= \max_{k_i\in\{0,1\},i=1,\ldots,2n+1}(\min) \quad \mathcal{A}\prod_{\nu=1}^{n}(x+b_\nu)^{1-k_{2\nu-1}}x^{k_{2\nu-1}}(x-b_\nu)^{1-k_{2\nu}}x^{k_{2\nu}}\times \\
&\qquad \times (x+b_{n+1})^{1-k_{2n+1}}(x-b_{n+1})^{k_{2n+1}}.
\end{aligned}$$

Dokaz. Prema lemi 4.3 važi

$$\max_{\mathbf{x}\in B_n}(\min_{\mathbf{x}\in B_n})\Phi(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in \partial B_n}(\min_{\mathbf{x}\in \partial B_n})\Phi(\mathbf{x}),$$

pa sve što treba da uradimo je da opišemo skup ∂B_n. Tačka $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n+1})$, koja zadovoljava uslove

$$-b_\nu < x_{2\nu-1} < 0, \quad 0 < x_{2\nu} < b_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,n, \quad -b_{n+1} < x_{2n+1} < b_{n+1}$$

je unutrašnja tačka skupa B_n.

Tačka $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n+1})$ pripada skupu ∂B_n ako postoji indeks $\nu = 1,\ldots,n$, takav da je $x_{2\nu-1} = -b_\nu$ ili $x_{2\nu-1} = 0$ ili ako postoji indeks $\nu = 1,\ldots,n$ takav da je $x_{2\nu} = b_\nu$ ili $x_{2\nu} = 0$ ili ako je $x_{2n+1} = \pm b_{n+1}$. Prema tome, max(min) se mora dostizati u takvoj tački sa granice. Funkcija Φ je harmonijska. Izaberimo $x_1 = -b_1$ ili $x_1 = 0$ i definišimo sledeće dve funkcije

$$\begin{aligned}
\Phi_2^{-b_1}(x_2,\ldots,x_{2n+1}) &= \Phi(-b_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}), \\
\Phi_2^{0}(x_2,\ldots,x_{2n+1}) &= \Phi(0, x_2, \ldots, x_{2n+1}).
\end{aligned}$$

Očigledno su funkcije $\Phi_2^{-b_1}$ i Φ_2^0 harmonijske na

$$B_n^1 = [0, b_1] \times \mathop{\times}_{\nu=2}^{n}([-b_\nu, 0]\times[0, b_\nu]) \times [-b_{n+1}, b_{n+1}],$$

pa obe moraju dostizati max(min) na ∂B_n^1. Fiksirajmo sada $x_2 = 0$ ili $x_2 = b_1$. Nastavljajući dalje opisani postupak dobijamo jednakost (4.18). $\square$

Iz (4.18) dobijamo

$$\max_{\mathbf{x}\in B_n}(\min_{\mathbf{x}\in B_n})\Phi(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in Q_n}(\min_{\mathbf{x}\in Q_n})\Phi(\mathbf{x}), \tag{4.19}$$

gde je $Q_n \subset \partial B_n$, takav da važi $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in Q_n$ ako $x_{2\nu-1} \in \{-b_\nu, 0\}$, $x_{2\nu} \in \{0, b_\nu\}$, $\nu = 1,\ldots,n$, i $x_{2n+1} \in \{-b_{n+1}, b_{n+1}\}$.

U nastavku ćemo sa p_{2n+1} obeležavati polinome sa nulama $\mathbf{x} \in Q_n$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i to nećemo eksplicitno isticati.

Prema lemi 4.4 važi

$$\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{\nu=1}^{2n+1}(t-x_\nu)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t \geq \min_{\mathbf{x}\in Q_n}\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}p_{2n+1}(t)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t.$$

Prema tome, nejednakost (4.17) će sigurno važiti ako važi sledeća nejednakost

$$\min_{\mathbf{x}\in Q_n}\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}p_{2n+1}(t)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t > 0. \tag{4.20}$$

Uz pretpostavku da je hipoteza 4.1 tačna dokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 4.12. *Neka je $n \leq N$, $n \in \mathbb{N}_0$. Tada je*

$$I_n = \min_{\mathbf{x}\in Q_n}\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}p_{2n+1}(t)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t,$$

gde je I_n dato sa (4.15).

Dokaz. Primetimo da važi sledeća trivijalna jednakost

$$I_n = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{\nu=1}^{n}(t^2-b_\nu^2)(t\pm b_{n+1})\sin\zeta t\,\mathrm{d}t.$$

Pokažimo najpre da je tvrđenje tačno za $n=1$. Tada je

$$I_1 = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}(t^2-b_1^2)t\sin\zeta t\,\mathrm{d}t.$$

Razmotrićemo i sve ostale moguće vrednosti za nule x_1, x_2, x_3. Za

$$I_1^{1,2} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}(t+b_1)t(t\pm b_2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}(t^3\pm b_1b_2t)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t$$

lako vidimo da je $I_1^{1,2}-I_1 = b_1(b_1\pm b_2)I_0 > 0$ jer je $b_1 > b_2 > 0$ i $I_0 > 0$. Slično, za

$$I_1^{3,4} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}(t-b_1)t(t\pm b_2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}(t^3\mp b_1b_2t)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t$$

imamo $I_1^{3,4}-I_1 = b_1(b_1\mp b_2)I_0 > 0$. Konačno,

$$I_1^{5,6} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}t^2(t\pm b_2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t = \operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}t^3\sin\zeta t\,\mathrm{d}t,$$

pa je $I_1^{5,6}-I_1 = b_1^2 I_0 > 0$.

Dakle, pokazali smo da je

$$I_1 = \min_{\mathbf{x}\in Q_1} \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} p_3(t) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t.$$

Pokazaćemo sada da ako je

$$I_{n-1} = \min_{\mathbf{x}\in Q_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} p_{2n-1}(t) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t$$

za neko $2 \le n \le N-1$, tada je i

$$I_n = \min_{\mathbf{x}\in Q_n} \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} p_{2n+1}(t) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t,$$

uz pretpostavku da je hipoteza 4.1 tačna. Taj dokaz ima tri ključna koraka. Prvi korak je da pokažemo da u slučajevima kada zamenimo bilo koji simetričan faktor $t^2 - b_l^2$, $1 \le l \le n$, u $\prod_{\nu=1}^{n}(t^2 - b_\nu^2)$ bilo kojim mogućim nesimetričnim faktorom, kao i drugim mogućim simetričnim faktorom (t^2), dobijeni integrali su veći od I_n. Obzirom na moguće vrednosti za x_{2l-1}, x_{2l} i x_{2n+1} lako se vidi da imamo šest takvih slučajeva. Obeležićemo odgovarajuće integrale sa I_n^i, $i = 1, \ldots, 6$ i razmotrićemo svaki od njih. Sada je

$$\begin{aligned} I_n^{1,2} &= \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2)(t + b_l)t(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2)(t^3 \pm b_l b_{n+1} t) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

pa je

$$I_n^{1,2} - I_n = b_l(b_l \pm b_{n+1}) \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2) t \sin\zeta t \,\mathrm{d}t > 0,$$

jer je $b_l > b_{n+1} > 0$ i

$$\operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2) t \sin\zeta t \,\mathrm{d}t \ge I_{n-1} > 0$$

(jednakost u prethodnoj nejednakost važi za $l = n$).

Slično

$$\begin{aligned} I_n^{3,4} &= \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2) t(t - b_l)(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2)(t^3 \mp b_l b_{n+1} t) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

pa je

$$I_n^{3,4} - I_n = b_l(b_l \mp b_{n+1}) \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2) t \sin\zeta t \, \mathrm{d}t > 0.$$

Konačno

$$\begin{aligned} I_n^{5,6} &= \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2) t^2 (t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \, \mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2) t^3 \sin\zeta t \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

i

$$I_n^{5,6} - I_n = b_l^2 \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq l}}^{n} (t^2 - b_\nu^2) t \sin\zeta t \, \mathrm{d}t \geq b_l^2 I_{n-1} > 0.$$

Drugi korak je dokaz sledećeg tvrđenja:

Ako je $p_{2n+1,k}(t)$, $1 < k \leq n$, polinom sa k parova nesimetričnih nula i

$$I_{2n+1}^{(k)} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} p_{2n+1,k}(t) \sin\zeta t \, \mathrm{d}t,$$

tada postoji $p_{2n+1,k-1}$ tako da važi $I_{2n+1}^{(k)} > I_{2n+1}^{(k-1)}$.

Neka je $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ proizvoljna permutacija brojeva $\{1, 2, \ldots, n\}$. Moguće vrednosti za $I_{2n+1}^{(k)}$ su

$$I_{2n+1}^{(k)} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=1}^{k-j} (t + b_{i_l}) \prod_{\nu=k-j+1}^{k} (t - b_{i_\nu}) t^k \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \, \mathrm{d}t,$$

za $0 \leq j \leq k$.

Pretpostavimo najpre da je $0 < j < k$ i izaberimo proizvoljne indekse i_s, $1 \leq s \leq k-j$, i i_r, $k-j+1 \leq r \leq k$. Posmatraćemo sledeće integrale

$$\begin{aligned} I_{2n+1}^{(k-1),1} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq s}}^{k-j} (t + b_{i_l}) \prod_{\nu=k-j+1}^{k} (t - b_{i_\nu}) t^{k-1} (t^2 - b_{i_s}^2) \times \\ \times \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2n+1}^{(k-1),2} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=1}^{k-j} (t + b_{i_l}) \prod_{\substack{\nu=k-j+1 \\ \nu\neq r}}^{k} (t - b_{i_\nu}) t^{k-1} (t^2 - b_{i_r}^2) \times \\ \times \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

i dokazaćemo da je jedna od razlika $I_{2n+1}^{(k)} - I_{2n+1}^{(k-1),1}$ i $I_{2n+1}^{(k)} - I_{2n+1}^{(k-1),2}$ pozitivna. Lako dobijamo

$$
\begin{aligned}
I_{2n+1}^{(k)} - I_{2n+1}^{(k-1),1} &= \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{l=1\\ l\neq s}}^{k-j} (t+b_{i_l}) \prod_{\nu=k-j+1}^{k} (t-b_{i_\nu}) t^{k-1} \times \\
&\quad \times \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \pm b_{n+1})(t^2 + tb_{i_s} - t^2 + b_{i_s}^2) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t, \\
&= b_{i_s} \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=1}^{k-j} (t+b_{i_l}) \prod_{\nu=k-j+1}^{k} (t-b_{i_\nu}) t^{k-1} \times \\
&\quad \times \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
I_{2n+1}^{(k)} - I_{2n+1}^{(k-1),2} &= \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=1}^{k-j} (t+b_{i_l}) \prod_{\substack{\nu=k-j+1\\ \nu\neq r}}^{k} (t-b_{i_\nu}) t^{k-1} \times \\
&\quad \times \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \pm b_{n+1})(t^2 - tb_{i_r} - t^2 + b_{i_r}^2) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t, \\
&= -b_{i_r} \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=1}^{k-j} (t+b_{i_l}) \prod_{\nu=k-j+1}^{k} (t-b_{i_\nu}) t^{k-1} \times \\
&\quad \times \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Dobijeni integrali na desnim stranama prethodnih izraza za razlike $I_{2n+1}^{(k)} - I_{2n+1}^{(k-1),1}$ i $I_{2n+1}^{(k)} - I_{2n+1}^{(k-1),2}$ su isti, $b_{i_s}, b_{i_r} > 0$, pa bar jedna od tih razlika mora biti pozitivna.

U slučajevima $j=0$ i $j=k$ imamo sledeće integrale

$$
I_{2n+1}^{(k),+} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=1}^{k} (t+b_{i_l}) t^k \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t
$$

i

$$
I_{2n+1}^{(k),-} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=1}^{k} (t-b_{i_l}) t^k \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t.
$$

Smenom $t := -t$ u $I_{2n+1}^{(k),-}$ dobijamo

$$
I_{2n+1}^{(k),-} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=1}^{k} (t+b_{i_l}) t^k \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2)(t \mp b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t.
$$

Prema tome, treba dokazati naše tvrđenje za $I_{2n+1}^{(k),+}$. Dokazaćemo da je dobijeni integral $I_{2n+1}^{(k),+}$ za $j = 0$ veći od odgovarajućeg integrala $I_{2n+1}^{(k)}$ za $j = 1$. Posmatrajmo sledeću razliku

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{l=1}^{k}(t+b_{i_l})t^k\prod_{\mu=k+1}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)(t\pm b_{n+1})\sin\zeta t\,\mathrm{d}t\\
&\qquad-\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{l=2}^{k}(t+b_{i_l})(t-b_{i_1})t^k\prod_{\mu=k+1}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)(t\pm b_{n+1})\sin\zeta t\,\mathrm{d}t\\
&=2b_{i_1}\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{l=2}^{k}(t+b_{i_l})(t\pm b_{n+1})t^k\prod_{\mu=k+1}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Dokazaćemo da za $1 < k \le n$ važi sledeća nejednakost

$$J_k=\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{l=2}^{k}(t+b_{i_l})(t\pm b_{n+1})t^k\prod_{\mu=k+1}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t>0.$$

Prvo ćemo dokazati da je $J_2 > 0$, a zatim da je $J_{k+1} > J_k$ za sve $k < n$.

Važi

$$\begin{aligned}
J_2&=\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}(t+b_{i_2})(t\pm b_{n+1})t^2\prod_{\mu=3}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t\\
&=\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}(t^2+(b_{i_2}\pm b_{n+1})t\pm b_{i_2}b_{n+1})t^2\prod_{\mu=3}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t\\
&=(b_{i_2}\pm b_{n+1})\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{\mu=3}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)t^3\sin\zeta t\,\mathrm{d}t>0,
\end{aligned}$$

jer je $b_{i_2} \pm b_{n+1} > 0$ i

$$\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{\mu=3}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)t^3\sin\zeta t\,\mathrm{d}t>I_{n-1}>0.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}
J_{k+1}-J_k&=\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{l=2}^{k+1}(t+b_{i_l})(t\pm b_{n+1})t^{k+1}\prod_{\mu=k+2}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t\\
&\quad-\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{l=2}^{k}(t+b_{i_l})(t\pm b_{n+1})t^k\prod_{\mu=k+1}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t\\
&=\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{l=2}^{k}(t+b_{i_l})(t\pm b_{n+1})t^k\prod_{\mu=k+2}^{n}(t^2-b_{i_\mu}^2)\times\\
&\qquad\times(t^2+b_{i_{k+1}}t-t^2+b_{i_{k+1}}^2)\sin\zeta t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= b_{i_{k+1}} \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=2}^{k+1} (t + b_{i_l})(t \pm b_{n+1}) t^k \prod_{\mu=k+2}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t > 0,$$

jer je $b_{i_{k+1}} > 0$ i

$$\operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=2}^{k+1} (t + b_{i_l})(t \pm b_{n+1}) t^k \prod_{\mu=k+2}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t > I_{n-1} > 0.$$

Dakle, naše tvrđenje je kompletno dokazano.

Treći korak je dokaz da integrali dobijeni tako što se neki od k simetričnih faktora, $2 < k \leq n$, u proizvodu $\prod_{\nu=1}^{n}(t^2 - b_\nu^2)$ zamene drugim simetričnim faktorima (t^2), a neki od njih zamene nesimetričnim faktorima, veći od I_n. Zato ćemo posmatrati sledeće integrale

$$I_{2n+1}^{(k),0} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=p+1}^{k-j} (t + b_{i_l}) \prod_{\nu=k-j+q+1}^{k} (t - b_{i_\nu}) t^{k-p-q} \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2) \times \\ \times t^{2(p+q)} (t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t,$$

za sve $0 \leq j \leq k$ i za sve $0 \leq p \leq k - j$ i $0 \leq q \leq j$ takve da je $p^2 + q^2 \neq 0$. Neka je s proizvoljan broj takav da je $1 \leq s \leq p$ ili $k - j + 1 \leq s \leq k - j + q$. Ako u prethodnom integralu zamenimo t^2 sa $t^2 - b_{i_s}^2$, dobićemo

$$I_{2n+1}^{(k-1),0} = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=p+1}^{k-j} (t + b_{i_l}) \prod_{\nu=k-j+q+1}^{k} (t - b_{i_\nu}) t^{k-p-q} \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2) \times \\ \times t^{2(p+q)-2} (t^2 - b_{i_s}^2)(t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t.$$

Lako se vidi da je

$$I_{2n+1}^{(k),0} - I_{2n+1}^{(k-1),0} = b_{i_s}^2 \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{l=p+1}^{k-j} (t + b_{i_l}) \prod_{\nu=k-j+q+1}^{k} (t - b_{i_\nu}) t^{k-p-q} \times \\ \times \prod_{\mu=k+1}^{n} (t^2 - b_{i_\mu}^2) t^{2(p+q)-2} (t \pm b_{n+1}) \sin\zeta t \,\mathrm{d}t > 0,$$

jer je integral na desnoj strani veći od I_{n-1}. Prema prvom koraku (integrali $I_n^{5,6}$ za $k = 1$) dobijamo da važi nejednakost $I_{2n+1}^{(k),0} > I_n$.

Sa opisana tri koraka teorema je kompletno dokazana. $\square$

Teorema 4.11 sledi direktno iz prethodne teoreme.

Razmotrimo sada slučaj kada je $\sin 2\zeta > 0$. Neka je

$$a_\nu = \left(N - \nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\zeta}, \quad \nu = 1, \ldots, N, \quad N = [\zeta/\pi], \tag{4.21}$$

i

$$A_n = \mathop{\times}_{\nu=1}^{n} \left([-a_\nu, 0] \times [0, a_\nu]\right), \quad n = 1, \ldots, N. \tag{4.22}$$

Obeležimo

$$I_k^C = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{k} (t^2 - a_\nu^2) \cos\zeta t \, \mathrm{d}t, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{4.23}$$

Lako se vidi da je

$$I_0^C = \operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \cos\zeta t \, \mathrm{d}t = \frac{2|\sin\zeta|}{\zeta} > 0.$$

Egzistenciju kvadraturne formule (4.1), koja ima i pozitivne i negativne čvorove, u ovom slučaju dokazaćemo pod pretpostavkom da važi sledeća hipoteza.

Hipoteza 4.2. *Neka je $\zeta > 0$ i $\sin 2\zeta > 0$. Tada za integrale I_k^C, definisane sa* (4.23)*, važi $I_k^C > 0$ za sve $k = 1, \ldots, N$.*

Pod pretpostavkom da je hipoteza 4.2 tačna možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 4.13. *Neka je $\zeta > 0$ i $\sin 2\zeta > 0$. Tada za sve $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in A_n$, gde je skup A_n dat sa* (4.22)*, važi*

$$\operatorname{sgn}(\sin\zeta) \int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{2n} (t - x_\nu) \cos\zeta t \, \mathrm{d}t > 0. \tag{4.24}$$

Za dokaz teorema 4.13 potrebni su nam neki pomoćni rezultati.

Lema 4.5. *Ako je skup A_n definisan sa* (4.22)*, tada je*

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}\in A_n}\big(\min_{\mathbf{x}\in A_n}\big)\Phi(\mathbf{x}) \\ &\quad = \max_{k_i\in\{0,1\}, i=1,\ldots,2n}(\min)\ \mathcal{A} \prod_{\nu=1}^{n} (x + a_\nu)^{1-k_{2\nu-1}} x^{k_{2\nu-1}} (x - a_\nu)^{1-k_{2\nu}} x^{k_{2\nu}}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu leme 4.4. □

Problem (4.25) možemo zapisati na sledeći način

$$\max_{\mathbf{x}\in A_n}\big(\min_{\mathbf{x}\in A_n}\big)\Phi(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in R_n}\big(\min_{\mathbf{x}\in R_n}\big)\Phi(\mathbf{x}), \tag{4.26}$$

gde je $R_n \subset \partial A_n$ takav da $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in R_n$ ako je $x_{2\nu-1} \in \{-a_\nu, 0\}$, $x_{2\nu} \in \{0, a_\nu\}$, $\nu = 1, \ldots, n$.

Obeležimo sa p_{2n} polinome sa nulama $\mathbf{x} \in R_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Prema lemi 4.5 važi

$$\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}\prod_{\nu=1}^{2n}(t-x_\nu)\cos\zeta t\,\mathrm{d}t \geq \min_{\mathbf{x}\in R_n}\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}p_{2n}(t)\cos\zeta t\,\mathrm{d}t.$$

Nejednakost (4.24) će sigurno važiti ako važi sledeća nejednakost

$$\min_{\mathbf{x}\in R_n}\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}p_{2n}(t)\cos\zeta t\,\mathrm{d}t > 0. \tag{4.27}$$

Teorema 4.13 sledi direktno iz sledeće teoreme.

Teorema 4.14. *Neka je $n \leq N$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$I_n^C = \min_{\mathbf{x}\in R_n}\operatorname{sgn}(\sin\zeta)\int_{-1}^{1}p_{2k}(t)\cos\zeta t\,\mathrm{d}t.$$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu teoreme 4.12. □

Sada možemo dokazati sledeće dve teoreme.

Teorema 4.15. *U slučaju $\sin 2\zeta < 0$ za sve parne prirodne brojeve n, $1 \leq n/2 < \zeta/\pi - 1$, sistem jednačina (4.3) ima najmanje $\binom{[\zeta/\pi-1]}{n/2}^2$ rešenja takvih da je $n/2$ čvorova pozitivno i $n/2$ čvorova negativno.*

Dokaz. Neka je $\sin 2\zeta < 0$ i n paran broj, $1 \leq n/2 < \zeta/\pi - 1$. Sistem jednačina (4.3) možemo zapisati u obliku

$$x_{2\nu-1} = \Psi_{2\nu-1}^S(\mathbf{x}) = \frac{1}{\zeta}\left(\operatorname{arcctg}\frac{\int_{-1}^{1}\omega_{2\nu-1}(x)\cos\zeta x\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}\omega_{2\nu-1}(x)\sin\zeta x\,\mathrm{d}x} + j_\nu\pi\right), \quad \nu = 1,\dots,n/2,$$

$$x_{2\nu} = \Psi_{2\nu}^S(\mathbf{x}) = \frac{1}{\zeta}\left(\operatorname{arcctg}\frac{\int_{-1}^{1}\omega_{2\nu}(x)\cos\zeta x\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}\omega_{2\nu}(x)\sin\zeta x\,\mathrm{d}x} + l_\nu\pi\right), \quad \nu = 1,\dots,n/2,$$

gde su $j_\nu, l_\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu = 1,\dots,n/2$. Izaberimo dva vektora pozitivnih celih brojeva sa striktno opadajućim koordinatama $\mathbf{j} = (j_1,\dots,j_{n/2})$ i $\mathbf{l} = (l_1,\dots,l_{n/2})$, pri čemu je $j_1 < \zeta/\pi - 1$ i $l_1 < \zeta/\pi - 1$, i obeležimo

$$B_{\mathbf{j},\mathbf{l}} = \mathop{\times}_{\nu=1}^{n/2}\left(\left[-(j_\nu+1)\frac{\pi}{\zeta}, -j_\nu\frac{\pi}{\zeta}\right]\times\left[l_\nu\frac{\pi}{\zeta}, (l_\nu+1)\frac{\pi}{\zeta}\right]\right).$$

Preslikavanje $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{l}}^S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gde je $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{l}}^S(\mathbf{x}) = (\Psi_1^S(\mathbf{x}),\dots,\Psi_n^S(\mathbf{x}))$, neprekidno slika konveksan zatvoren skup $B_{\mathbf{j},\mathbf{l}}$ u samog sebe, pa, prema Brouwer-ovoj teoremi o fiksnoj tački (videti [75, pp. 161–162]), $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{l}}^S$ ima fiksnu tačku u skupu $B_{\mathbf{j},\mathbf{l}}$. Zbog teoreme 4.11 ta fiksna tačka mora biti u unutrašnjosti skupa $B_{\mathbf{j},\mathbf{l}}$. To znači da su sve koordinate fiksne tačke različite, jer su koordinate i vektora $\mathbf{j}$ i vektora $\mathbf{l}$ različite. Prema tome, koordinate fiksne tačke preslikavanja $\mathbf{\Psi}^S_{\mathbf{j},\mathbf{l}}$ su čvorovi kvadraturne formule (4.1). Tada su, prema lemi 4.1, sve težine kvadraturne formule različite od nule.

Sada je lako dobiti i broj rešenja. On je jednak broju načina na koji se mogu izabrati dve uređene $n/2$-torke celih brojeva iz skupa $\{1, \ldots, [\zeta/\pi - 1]\}$. □

Teorema 4.16. *U slučaju* $\sin 2\zeta > 0$ *za sve neparne prirodne brojeve* n, $1 \leq [n/2] \leq [\zeta/\pi] - 1$, *sistem jednačina* (4.3) *ima najmanje* $\binom{[\zeta/\pi]-1}{[n/2]}$ *rešenja kod kojih su čvorovi antisimetrični, tj. važi:*

$$x_\nu = -x_{n+1-\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, [n/2], \quad x_{[n/2]+1} = 0.$$

Dokaz. Neka je $\sin 2\zeta > 0$ i n neparan prirodan broj, $1 \leq [n/2] \leq [\zeta/\pi] - 1$. Obeležimo $\widetilde{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{[n/2]})$ i posmatrajmo sledeći sistem

$$x_\nu = \widetilde{\Psi}^C_\nu(\widetilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\zeta}\left(\operatorname{arctg}\frac{\int_{-1}^1 x(x+x_\nu)\prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{[n/2]}(x^2 - x_k^2)\sin\zeta x\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1 x(x+x_\nu)\prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{[n/2]}(x^2 - x_k^2)\cos\zeta x\,\mathrm{d}x} + k_\nu\pi\right)$$

$$= \frac{1}{\zeta}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_\nu\int_{-1}^1 x\prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{[n/2]}(x^2 - x_k^2)\sin\zeta x\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1 x^2\prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{[n/2]}(x^2 - x_k^2)\cos\zeta x\,\mathrm{d}x} + k_\nu\pi\right), \quad \nu = 1, \ldots, [n/2],$$

gde su $k_\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu = 1, \ldots, [n/2]$.

Izaberimo vektor pozitivnih celih brojeva sa striktno opadajućim koordinatama $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_{[n/2]})$, pri čemu je $k_1 \leq [\zeta/\pi] - 1$, i obeležimo

$$\widetilde{A}_{\mathbf{k}} = \mathop{\times}_{\nu=1}^{[n/2]}\left[\left(k_\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\zeta}, \left(k_\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\zeta}\right].$$

Definišimo preslikavanje $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^C_{\mathbf{k}} : \mathbb{R}^{[n/2]} \to \mathbb{R}^{[n/2]}$ na sledeći način $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^C_{\mathbf{k}}(\widetilde{\mathbf{x}}) = (\widetilde{\Psi}^C_1(\widetilde{\mathbf{x}}), \ldots, \widetilde{\Psi}^C_{[n/2]}(\widetilde{\mathbf{x}}))$. Tako definisano preslikavanje, prema teoremi 4.13, neprekidno slika konveksan zatvoren skup $\widetilde{A}_{\mathbf{k}}$ u samog sebe, pa, prema Brouwer-ovoj teoremi o fiksnoj tački, $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^C_{\mathbf{k}}$ ima fiksnu tačku u skupu $\widetilde{A}_{\mathbf{k}}$. Zbog teoreme 4.13 ta fiksna tačka mora biti u unutrašnjosti skupa $\widetilde{A}_{\mathbf{k}}$. Pošto su koordinate vektora $\mathbf{k}$ različite, to su i sve koordinate fiksne tačke različite. Neka su koordinate te fiksne tačke x_ν, $\nu = 1, \ldots, [n/2]$. Lako se vidi da tada tačke 0, x_ν, $-x_\nu$, $\nu = 1, \ldots, [n/2]$, zadovoljavaju sistem (4.3), tj. predstavljaju čvorove kvadraturne formule (4.1).

Broj rešenja jednak je broju načina na koji se može izabrati uređena $[n/2]$-torka celih brojeva iz skupa $\{1, \ldots, [\zeta/\pi] - 1\}$. □

4.2 Numerički primeri

U ovom poglavlju daćemo nekoliko numeričkih primera. U svim primerima čvorove x_k, $k = 1, \ldots, n$, kvadraturne formule (4.1) smo računali primenom metoda Newton–Kantorovich-a na sistem (4.3) sa pogodno odabranim startnim vrednostima. Teorema 4.3 obezbeđuje da je Jacobian sistema (4.3) u rešenju tog sistema regularan. Kada imamo čvorove, težine σ_k, $k = 1, \ldots, n$, računamo primenom formule (4.2). Za sva izračunavanja koristili smo programski paket MATHEMATICA i paket opisan u [9], sa $D-$aritmetikom.

4.2.1 Kvadraturne formule kod kojih su svi čvorovi istog znaka

Tabela 4.1: Čvorovi x_ν i težine σ_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za oscilatorne integrande, za $\zeta = 1000$, $n = 10$

ν	x_ν	σ_ν
1	0.08227317490466181	3.332609519185553(1)
2	0.2236447375670234	3.242737294844341(2)
3	0.3650163223412639	1.593898369111925(3)
4	0.5001047404753007	5.183315608193287(3)
5	0.6226268036316312	1.184220374757565(4)
6	0.7325825073981575	1.994167645385242(4)
7	0.8268302572329836	−2.482595925314130(4)
8	0.9085116428079892	2.632193185156080(4)
9	0.9556355200068546	1.812328574389024(4)
10	0.9933346224203500	−4.647474192872242(3)
ν	x_ν	σ_ν
1	0.06970639005564088	1.544567038682079(2)
2	0.1545293231919083	7.972722191570242(2)
3	0.3178920342621190	−1.808887757892068(4)
4	0.3493079432435246	2.616272957215216(4)
5	0.4498388572151283	−1.563076408499756(4)
6	0.5503697780502463	1.002781593495415(4)
7	0.7043077616542470	8.646416142282168(3)
8	0.7577148201208147	6.616740619173390(3)
9	0.8519625749534823	−1.197465034287728(3)
10	0.9493519410276697	−1.134198256092919(2)

U tabeli 4.1 predstavljeni su parametri dve kvadraturne formule sa 10 čvorova za $\zeta = 1000$, kod kojih su svi čvorovi pozitivni. Kod prve kvadraturne formule za početnu iteraciju uzete su pozitivne nule Chebyshev-ljevog polinoma druge vrste stepena 20. Čvorove dobijamo nakon 8 iteracija, pri čemu faktor uslovljenosti Jacobiana u tim iteracijama ima redom sledeće vrednosti: 6.73, 4.78, 3.44, 3.38, 2.30, 1.82, 1.84, 1.84. Kod druge kvadraturne formule početna iteracija je $(7/100, 15/100, 25/100, 35/100, 45/100, 55/100, 70/100, 75/100, 85/100, 95/100)$. Čvorove dobijamo takođe nakon 8 iteracija, a faktor uslovljenosti Jacobiana u tim iteracijama ima redom sledeće vrednosti: 11.43, 83.44, 8.28, 3.36, 2.14, 1.82, 1.82, 1.82.

4.2.2 Kvadraturne formule koje imaju i pozitivne i negativne čvorove

Daćemo sada primere kvadraturnih formula koje imaju i pozitivne i negativne čvorove. U slučaju $\sin 2\zeta < 0$, teorema 4.15 garantuje egzistenciju kvadraturne formule (4.1) sa parnim, a teorema 4.16 u slučaju $\sin 2\zeta > 0$ sa neparnim brojem čvorova.

Kao i obično kod metoda Newton–Kantorovich-a glavni problem je dobro odabrati početnu iteraciju. U svim numeričkim testovima koje smo radili početna iteracija je određivana uvek na isti način, koji ćemo u nastavku opisati.

Slučaj $\sin 2\zeta < 0$

U slučaju $\sin 2\zeta < 0$ za konstrukciju kvadraturne formule sa n čvorova (gde je n paran broj), najpre odredimo n intervala oblika $[k_\nu \pi/\zeta, (k_\nu + 1)\pi/\zeta]$, gde su $k_\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu = 1, \ldots, n$, tako da ti intervali sadrže nule Chebyshev-ljevog polinoma prve vrste stepena n. Tada za početnu iteraciju uzimamo $n-$torku čije su koordinate središta uočenih intervala, odnosno $n-$torku sa koordinatama $(k_\nu + 1/2)\pi/\zeta$, $\nu = 1, \ldots, n$.

Sa opisanim izborom početne iteracije dobijamo kvadraturnu formulu (4.1) sa antisimetričnim čvorovima $x_\nu = -x_{n+1-\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n/2$. Primenom formule (4.2) lako se pokazuje da antisimetričnim čvorovima odgovaraju simetrične težine, tj. $\sigma_\nu = \sigma_{n+1-\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n/2$.

U tabeli 4.2 dati su pozitivni čvorovi x_ν i težine σ_ν, $\nu = 1, \ldots, n/2$, kvadraturne formule (4.1) za $\zeta = 10^5$ ($\sin 2\zeta = -0.0714519 < 0$) i $n = 20$. Preostali čvorovi i težine su $x_{n+1-\nu} = -x_\nu$ i $\sigma_{n+1-\nu} = \sigma_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n/2$. Čvorove dobijamo nakon tri iteracije, a faktor uslovljenosti Jacobiana je približno 161.

Tabela 4.2: Pozitivni čvorovi x_ν i odgovarajuće težine σ_ν, $\nu = 1, \ldots, n/2$, kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za oscilatorne integrande, za $\zeta = 10^5$, $n = 20$

k	x_k	σ_k
1	0.07846125157306100	1.006716114602902(−6)
2	0.2334359678921508	1.032080177072202(−6)
3	0.3826929873953842	1.086332358443854(−6)
4	0.5224938160072965	−1.177255793733855(−6)
5	0.6494455347273613	−1.320067367459013(−6)
6	0.7604065518710694	1.545773533562717(−6)
7	0.8526436826231335	−1.921931913354329(−6)
8	0.9238635648279031	−2.623606178826333(−6)
9	0.9723697376911976	4.301525963944241(−6)
10	0.9969055398288686	1.275758614461646(−5)

Slučaj $\sin 2\zeta > 0$

U ovom slučaju za konstrukciju kvadraturne formule sa n čvorova (n – neparan broj), najpre odredimo n intervala oblika $[(k_\nu - 1/2)\pi/\zeta, (k_\nu + 1/2)\pi/\zeta]$, gde su $k_\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu = 1, \ldots, n$, tako da ti intervali sadrže nule Chebyshev-ljevog polinoma prve vrste stepena n. Tada za početnu iteraciju uzimamo $n-$torku čije su koordinate središta uočenih intervala, odnosno $n-$torku sa koordinatama $k_\nu \pi/\zeta$, $\nu = 1, \ldots, n$.

Tabela 4.3: Pozitivni čvorovi x_ν i odgovarajuće težine σ_ν, $\nu = 1, \ldots, [n/2]$, kvadraturne formule Gauss-ovog tipa za oscilatorne integrande, za $\zeta = 5 \cdot 10^6$, $n = 25$

k	x_k	σ_k
1	0.1253332050739889	1.575501886509290(−8)
2	0.2486897201456025	−1.615582529158625(−8)
3	0.3681242711362743	1.686004608849574(−8)
4	0.4817537874967703	1.793042138089634(−8)
5	0.5877850482205917	−1.947456224905775(−8)
6	0.6845473544059015	2.167653836754810(−8)
7	0.7705132637663998	2.486322301586606(−8)
8	0.8443281216016946	−2.966069909669671(−8)
9	0.9048270253979127	−3.741959560763283(−8)
10	0.9510561876579420	5.166093770280677(−8)
11	0.9822873872276619	−8.531562832938607(−8)
12	0.9980267657419743	2.547912320888487(−7)

Kao i u slučaju $\sin 2\zeta < 0$, početna iteracija je antisimetrična, i ovde dobijamo kvadraturne formule (4.1) sa antisimetričnim čvorovima i simetričnim težinama, tj.

$$x_{[n/2]+1} = 0, \quad x_\nu = -x_{n+1-\nu}, \quad \sigma_\nu = \sigma_{n+1-\nu}, \quad \nu = 1, \dots, [n/2].$$

U tabeli 4.3 dati su pozitivni čvorovi x_ν i težine σ_ν, $\nu = 1, \dots, [n/2]$, kvadraturne formule (4.1) za $\zeta = 5 \cdot 10^6$ ($\sin 2\zeta = 0.420548 > 0$) i $n = 25$. Preostali čvorovi i težine su

$$\begin{aligned} &x_{n+1-\nu} = -x_\nu, \quad \sigma_{n+1-\nu} = \sigma_\nu, \quad \nu = 1, \dots, [n/2], \\ &x_{[n/2]+1} = 0, \quad \sigma_{[n/2]+1} = -1.5624823119176 10(-8). \end{aligned}$$

Čvorove dobijamo nakon tri iteracije, a faktor uslovljenosti Jacobiana u prvoj iteraciji je 253.6, a u ostale dve 259.7.

4.2.3 Primena kvadraturnih formula

U ovom odeljku ćemo testirati kvadraturne formule tipa (4.1). Pritom ćemo kao test funkcije koristiti

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta x} \quad \text{i} \quad f_2 = \frac{1}{x - \mathrm{i}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta x}, \quad x \in (-1, 1),$$

jer lako možemo izračunati tačne vrednosti integrala tih funkcija na intervalu $(-1, 1)$ i analizirati apsolutnu gresku aproksimacije tih integrala odgovarajućim vrednostima kvadraturnih suma sa n čvorova za razne vrednosti n. Pritom za vrednosti ζ za koje je $\sin 2\zeta < 0$ koristimo kvadraturne sume sa parnim brojem čvorova, a za $\sin 2\zeta > 0$ sa neparnim brojem čvorova. Obeležimo sa $I(f_\nu)$ i $G_n(f_\nu)$, $\nu = 1, 2$, redom integral i odgovarajuću kvadraturnu sumu za funkciju f_ν, $\nu = 1, 2$.

Primer 4.1. *Za $\zeta = 10^5$ u tabelama 4.4 i 4.5 date su apsolutne greške aproksimacije integrala $I(f_\nu)$ kvadraturnom sumom $G_n(f_\nu)$, $\nu = 1, 2$, respektivno, za razne vrednosti n.*

Tabela 4.4: Apsolutna greška aproksimacije integrala $I(f_1)$ kvadraturnom sumom $G_n(f_1)$, za $n = 4(2)10$, $\zeta = 10^5$

n	4	6	8	10
$\lvert I_n(f_1) - G_n(f_1)\rvert$	2.2192245(−8)	1.32249(−10)	4.64(−13)	0.(−15)

Tabela 4.5: Apsolutna greška aproksimacije integrala $I(f_2)$ kvadraturnom sumom $G_n(f_2)$, za $n = 4(4)24$, $\zeta = 10^5$

n	4	8	12
$\lvert I_n(f_2) - G_n(f_2)\rvert$	6.08926752(−7)	1.7925344(−8)	5.27825(−10)
n	16	20	24
$\lvert I_n(f_2) - G_n(f_2)\rvert$	1.5529(−11)	4.58(−13)	1.3(−14)

Primer 4.2. *Za $\zeta = 5 \cdot 10^6$ u tabelama 4.6 i 4.7 date su apsolutne greške aproksimacije integrala $I(f_\nu)$ kvadraturnom sumom $G_n(f_\nu)$, $\nu = 1, 2$, respektivno, za razne vrednosti n.*

Tabela 4.6: Apsolutna greška aproksimacije integrala $I(f_1)$ kvadraturnom sumom $G_n(f_1)$, za $n = 5, 7, 9$, $\zeta = 5 \cdot 10^6$

n	5	7	9
$\lvert I_n(f_1) - G_n(f_1)\rvert$	5.9028(−11)	3.18(−13)	0.(−15)

Tabela 4.7: Apsolutna greška aproksimacije integrala $I(f_2)$ kvadraturnom sumom $G_n(f_2)$, za $n = 9(4)21$, $\zeta = 5 \cdot 10^6$

n	9	13	17	21
$\lvert I_n(f_2) - G_n(f_2)\rvert$	1.71123(−10)	5.037(−12)	1.48(−13)	4.(−15)

Literatura

[1] D. Barrow: *On multiple node Gaussian quadrature formulae*, Math. Comp. **32** (1978), 431–439.

[2] B. D. Bojanov: *Oscillating polynomials of least L_1-norm*, In: G. Hämmerlin, ed., Numerical Integration, ISNM 57, Birkhäuser, Basel, (1982), 25–33.

[3] P. Borwein, T. Erdélyi and J. Zhang: *Müntz systems and orthogonal Müntz-Legendre polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994), 523–542.

[4] L. Chakalov: *Über eine allgemeine Quadraturformel*, C. R. Acad. Bulgar. Sci. **1** (1948), 9–12.

[5] L. Chakalov: *General quadrature formulae of Gaussian type*, East J. Approx. **2** (1995), 261–276 [prevod na engleski sa: Bulgar. Akad. Nauk Izv. Mat. Inst. **1** (1954), 67–84].

[6] L. Chakalov: *Formules générales de quadrature mécanique du type de Gauss*, Colloq. Math. **5** (1957), 69–73.

[7] T. S. Chihara: *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[8] R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. Gonzáles-Vera and O. Njåstad: *Quadrature rules for periodic integrands. Bi-orthogonality and para-orthogonality*, Ann. Math. et Informaticae **32** (2005), 5–44.

[9] A. S. Cvetković and G. V. Milovanović: *The Mathematica package "OrthogonalPolynomials"*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **19** (2004), 17–36.

[10] P. J. Davis and P. Rabinowitz: *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York, 1975.

[11] R. A. DeVore and G. G. Lorentz: *Constructive Approximation*, Springer–Verlag, Berlin, Heildeberg, 1993.

[12] D. P. Dryanov: *Quadrature formulae with free nodes for periodic functions*, Numer. Math. **67** (1994), 441–464.

[13] J. Du, H. Han and G. Jin: *On trigonometric and paratrigonometric Hermite interpolation*, J. Approx. Theory **131** (2004), 74–99.

[14] H. Engels: *Numerical Quadrature and Cubature*, Academic Press, London, 1980.

[15] G. A. Evans and J. R. Webster: *A comparison of some methods for the evaluation of highly oscillatory integrals*, J. Comput. Appl. Math. **112** (1999), 55–69.

[16] W. Gautschi: *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*, P. L. Butzer, F. Fehér (Eds.), E. B. Christoffel, Birkhäuser, Basel, 1981, 72-147.

[17] W. Gautschi: *Algorithm 726: ORTHPOL - A package of routines for generating orthogonal polynomials and Gauss-type quadrature rules*, ACM Trans. Math. Software **10** (1994), 21–62.

[18] W. Gautschi: *Orthogonal polynomials: applications and computation*, Acta Numerica (1996), 45–119.

[19] W. Gautschi: *Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation*, Oxford University Press, 2004.

[20] W. Gautschi and G. V. Milovanović: *S-orthogonality and construction of Gauss-Turán-type quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. **86** (1997), 205–218.

[21] A. Ghizzetti and A. Ossicini: *Quadrature Formulae*, Akademie Verlag, Berlin, 1970.

[22] G. H. Golub and J. H. Welsch: *Calculation of Gauss quadrature rule*, Math. Comput. **23** (1986), 221–230.

[23] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*, Sixth edition, Academic Press, London, 2000.

[24] W. B. Gragg: *The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices*, J. Comput. Appl. Math. **16** (1986), 1–8.

[25] W. B. Gragg and L. Reichel: *A divide and conquer method for the unitary and orthogonal eigenproblems*, Numer. Math. **57** (1990), 695–718.

[26] M. Gu, R. Guzzo, X.-B. Chi, and X.-Q. Cao: *A stable divide and conquer algorithm for the unitary eigenproblem*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **25** (2003), 385–404.

[27] M. Heins: *Complex Function Theory*, Academic Press, New York and London, 1968.

[28] I. Ichim: *Les polynômes trigonométriques orthogonaux et les quadratures de type Gauss* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **38**(4) (1993), 339–357 (na francuskom).

[29] A. Iserles: *On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals I: Fourier transforms*, IMA J. Numer. Anal. **24** (2004), 365–391.

[30] A. Iserles: *On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals II: Irregular oscillators*, Tech. Report NA2003/09, DAMTP, University of Cambridge, 2003.

[31] A. Iserles and S. P. Nørsett: *On quadrature methods for highly oscillatory integrals and their implementation*, BIT **44** (4) (2004), 755–772.

[32] A. Iserles and S. P. Nørsett: *Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **461** (2005), 1383–1399.

[33] L. Gr. Ixaru: *Operations on oscillatory functions*, Comput. Phys. Comm. **100** (1997), 1–19.

[34] L. Gr. Ixaru and B. Paternoster: *A Gauss quadrature rule for oscillatory integrands*, Comput. Phys. Comm. **133** (2001), 177–188.

[35] C. Jagels and L. Reichel: *On the construction of Szegő polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **46** (1993), 241–254.

[36] C. Jagels and L. Reichel: *Szegő-Lobatto quadrature rules*, J. Comput. Appl. Math. **200** (2007), 116–126.

[37] S. Karlin and W. J. Studden: *Tchebycheff Systems with Applications in Analysis and Statistics, Pure and Applied Mathematics*, Vol. XV, John Wiley Interscience (New York), 1966.

[38] K. J. Kim, R. Cools and L. Gr. Ixary: *Quadrature rules using first derivatives for oscillatory integrands*, J. Comput. Appl. Math. **140** (2002), 479–497.

[39] K. J. Kim, R. Cools and L. Gr. Ixary: *Extended quadrature rules for oscillatory integrands*, Appl. Numer. Math. **46** (2003), 59–73.

[40] S.-M. Kim and L. Reichel: *Anti-Szegő quadrature rules*, Math. Comp. **76** Number 258 (2007), 795–810.

[41] P. E. Koch: *An extension of the theory of orthogonal polynomials and Gaussian quadrature to trigonometric and hyperbolic polynomials*, J. Approx. Theory **43**(2) (1985), 157–177.

[42] D. Levin: *Fast integration of rapidly oscillatory functions*, J. Comput. Appl. Math. **67** (1996), 95–101.

[43] D. Levin: *Analysis of a collocation method for integrating rapidly oscillatory functions*, J. Comput. Appl. Math. **78** (1997), 131–138.

[44] G. Mastroianni and G. V. Milovanović: *Interpolation Processes: Basic Theory and Applications*, Springer-Verlag (knjiga u pripremi)

[45] J. Ma, V. Rokhlin and S. Wandzura: *Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), 971–996.

[46] J. C. Mason and D. Handscomb: *Chebyshev Polynomials*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, 2003.

[47] G. V. Milovanović: *Numerička analiza, I deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[48] G. V. Milovanović: *Numerička analiza, II deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[49] G. V. Milovanović: *Numerical calculation of integrals involving oscillatory and singular kernels and some applications of quadratures*, Comput. Math. Appl. **36** (1998), 19–39.

[50] G. V. Milovanović: *Müntz orthogonal polynomials and their numerical evaluation*, In: Applications and computation of orthogonal polynomials (W. Gautschi, G.H. Golub, G. Opfer, eds.), ISNM, Vol. **131**, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 179–202.

[51] G. V. Milovanović: *Some generalized orthogonal systems and their connections*, In: Proceedings of the Symposium "Contemporary Mathematics" (Belgrade, 1998) (N. Bokan, ed.), 181–200, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, 2000.

[52] G. V. Milovanović: *Quadratures with multiple nodes, power orthogonality, and moment-preserving spline approximation*, Numerical analysis 2000, Vol.V, Quadrature and orthogonal polynomials (W. Gautschi, F. Marcellan, and L. Reichel, eds.), J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 267–286.

[53] G. V. Milovanović and A. S. Cvetković: *Note on a construction of weights in Gauss-type quadrature formula*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **15** (2000), 69–84.

[54] G. V. Milovanović and A. S. Cvetković: *Orthogonal polynomials and Gaussian quadrature rules related to oscillatory weight functions*, J. Comput. Appl. Math. **179** (2005), 263–287.

[55] G. V. Milovanović and A. S. Cvetković: *Construction of Gaussian type quadrature formulas for Müntz systems*, SIAM J. Sci. Comput. **27** (2005), 893–913.

[56] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić: *Multiple orthogonal polynomials on the semicircle,* Facta Univ. Ser. Math. Inform. **20** (2005), 41–55.

[57] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić: *Gaussian quadratures for oscillatory integrands*, Appl. Math. Lett. **20** (2007) (u štampi)

[58] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić: *Trigonometric orthogonal systems and quadrature formulae with maximal trigonometric degree of exactness*, NMA 2006, Lecture Notes in Comput. Sci. **4310** (2007), 402–409.

[59] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić: *Trigonometric orthogonal systems and quadrature formulae* (predat za publikovanje)

[60] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić: *Explicit formulas for orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree* (predat za publikovanje)

[61] G. V. Milovanović and R. Ž. Đorđević: *Mathematička analiza I*, Elektronski fakultet, Niš, 2005.

[62] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović and Th. M. Rassias: *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalites, Zeros*, World Scientific–Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1994.

[63] G. V. Milovanović and M. M. Spalević: *Quadrature formulas connected to $\sigma-$orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **140** (2002) 619–637.

[64] G. V. Milovanović, M. M. Spalević and A. S. Cvetković: *Calculation of Gaussian type quadratures with multiple nodes*, Math. Comput. Modelling **39** (2004), 325–347.

[65] G. V. Milovanović and M. Stanić: *Construction of multiple orthogonal polynomials by discretized Stieltjes-Gautschi procedure and corresponding Gaussian quadratures*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **18** (2003), 9–29.

[66] G. V. Milovanović and M. Stanić: *Multiple orthogonal polynomials on the semicircle and corresponding quadratures of Gaussian type*, Math. Balkanica (N. S.) **18** (2004), 373–387.

[67] G. V. Milovanović and M. Stanić: *Multiple orthogonality and quadratures of Gaussian type,* Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Suppl. **76** (2005), 75–90.

[68] B. Mirković: *Teorija mere i integrala*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[69] D. S. Mitrinović: *Predavanja o redovima*, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.

[70] D. S. Mitrinović: *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[71] C. R. Morrow and T. N. L. Patterson: *Construction of algebraic cubature rules using polynomial ideal theory*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), 953-976.

[72] I. P. Mysovskikh: *Quadrature formulae of the highest trigonometric degree of accuracy*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **25**, No. 8 (1985), 1246–1252 (na ruskom).

[73] I. P. Mysovskikh: *Algorithms to construct quadrature formulae of highest trigonometric degree of precision*, Metody Vychisl. **16** (1991), 5–16 (na ruskom).

[74] S. Olver: *Moment-free numerical integration of highly oscillatory functions*, IMA J. Numer. Anal. **26** (2) (2006), 213–227.

[75] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, in: Classics in Applied Mathematics, vol. 30, SIAM, Philadelphia, PA, 2000, Reprint of the 1970 original.

[76] A. Ossicini and F. Rosati: *Funzioni caratteristiche nelle formule di quadratura gaussiane con nodi multipli*, Boll. Un. Math. Ital. (4) **11** (1975), 224–237.

[77] T. Popoviciu: *Sur une généralisation de la formule d'intégration numérique de Gauss*, Acad. R. P. Romîne Fil. Iaşi Stud. cerc. Şti. **6** (1955), 29–57 (na rumunskom).

[78] Th. M. Rassias: *Solved and unsolved problems*, Newsletter of the European Mathematical Society, **63** (2007), 39–43.

[79] W. Rudin: *Functional Analysis*, McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1973.

[80] H. E. Salzer: *A new form of trigonometric orthogonality and Gaussian-type quadrature*, J. Comput. Appl. Math. **2**(4) (1976), 241–248.

[81] T. Sauter: *Integration of highly oscillatory functions*, Comput. Phys. Comm. **125** (2000), 119–126.

[82] Y. G. Shi: *A kind of extremal problem of integration on an arbitrary measure*, Acta Sci. Math. (Szeged) **65** (1999), 567–575.

[83] Y. G. Shi and G. Xu: *Construction of $\sigma-$orthogonal polynomials and Gaussian quadrature formulas*, Adv. Comput. Math. (u štampi)

[84] J. A. Shohat: *On a certain formula of mechanical quadratures with non-equidistant ordinates*, Trans. Amer. Math. Soc. **31** (1929), 448–463.

[85] B. Simmon: *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.

[86] M. Stanić: *Nestandardne ortogonalnosti i odgovarajuće kvadrature Gaussovog tipa*, Magistarska teza, Univerzitet u Kragujevcu, 2003.

[87] M. Stanić: *$S-$orthogonality on the semicircle*, Kragujevac J. Math. **26** (2004), 39–48.

[88] G. Szegő: *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. **23**, 4th ed., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1975.

[89] G. Szegő: *On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials*, Magyar Tud. Alcad. Kutat Int. Kőzl Vol. 8 (1963), 255–273.

[90] P. Turán: *On the theory of the mechanical quadrature*, Acta Sci. Math. Szeged **12** (1950), 30–37.

[91] A. H. Turetzkii: *On quadrature formulae that are exact for trigonometric polynomials*, East J. Approx. **11** (2005), 337–359 [prevod na engleski sa: Uchenye Zapiski, Vypusk **1**(149), Seria math. Theory of Functions, Collection of papers, Izdatel'stvo Belgosuniversiteta imeni V.I. Lenina, Minsk, (1959), 31–54].

Dodatak

Summary

The theory and applications of integration is one of the most important and central themes of mathematics. According to this fact, the subject *Numerical Integration* is one of the basic in numerical analysis. The problem of numerical integration is open–ended, no finite collection of techniques is likely to cover all possibilities that arise and to which an extra bit of special knowledge may be of great assistance.

The field of research in this dissertation is consideration of some nonstandard types of orthogonality and their applications to constructions of quadrature rules with maximal degree of exactness, i.e., quadrature rules of Gaussian type. The research in this dissertation is connected with the following subjects: Theory of Orthogonality, Numerical Integration and Approximation Theory. We have tried to produce a balanced work between theoretical results and numerical algorithms.

Gauss's famous method of approximate integration from 1814 can be extended in the several ways. In this dissertation, two ways of possible generalizations are considered. The first, a natural way, is an extension to non-polynomial functions. The second way is a generalization to quadrature rules with multiple nodes. These two generalizations are connected with some systems of trigonometric functions. Also, Gaussian type quadratures for some systems of fast oscillatory functions are considered.

This dissertation, beside *Preface* and *References* with 91 items, consists of four chapters 1. *Orthogonality and Quadrature Formulae*; 2. *Orthogonal Systems of Trigonometric Functions*; 3. *Quadratures with Maximal Trigonometric Degree of Exactness*; 4. *Numerical Integration of Highly Oscillatory Functions.*

In Chapter 1 a brief review of the theory of orthogonal polynomials, as well as a review of interpolatory quadrature rules, Gaussian quadrature rules, and their generalizations, are presented.

Orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree are introduced and studied in details in Chapter 2.

Chapter 3 is devoted to quadrature rules with maximal trigonometric degree of exactness. At first, quadrature rules with simple nodes are considered. Also, $s-$ and $\sigma-$orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree are introduced and the corresponding quadratures with multiple nodes in the both cases (with equal multiplicities in each nodes and with fixed different multiplicities in each nodes) are considered. In all cases numerical methods for constructing such quadratures are presented. Several numerical examples are also included.

Finally, in Chapter 4, Gaussian quadrature rules for some classes of integrands involving highly oscillatory functions are considered. We focus on an idea of using the exponential fitting and solve the existence question of such quadratures, partially. Also, a numerical method for construction of such quadratures is given and some numerical examples are included.

Biografija

Marija Stanić je rođena 1975. godine u Gornjem Milanovcu. Osnovnu školu "Radoje Domanović" u Kragujevcu i Prvu kragujevačku gimnaziju završila je kao nosilac diplome "Vuk Karadžić" i oba puta proglašavana za đaka generacije. Učestvovala je na brojnim takmičenjima iz matematike, fizike i informatike od školskog do saveznog ranga.

Prirodno-matematički fakultet u Kragujevcu, studijska grupa Matematika, smer Računarstvo i informatika, upisala je 1994. godine, a diplomirala 1998. sa prosečnom ocenom 9,83.

Poslediplomske magistarske studije na grupi Matematika, smer Numerička matematika i optimizacija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Kragujevcu upisala je 1998. godine i sve predmete predviđene planom i programom položila sa prosečnom ocenom 10. Magistarsku tezu pod naslovom *"Nestandardne ortogonalnosti i odgovarajuće kvadrature Gauss-ovog tipa"*, pod mentorstvom prof. dr Gradimira Milovanovića, odbranila je 2003. godine.

U Institutu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Kragujevcu 1999. godine izabrana je za asistenta pripravnika, a 2004. za asistenta za užu naučnu oblast Matematička analiza sa primenama. Do sada je držala vežbe iz sledećih predmeta: Numerička analiza, Funkcionalna analiza sa primenama, Parcijalne i integralne jednačine, Analiza 2 i Teorija brojeva na Prirodno-matematičkom fakultetu u Kragujevcu, kao i iz Matematike 1 i Matematike 2 na Mašinskom fakultetu u Kragujevcu.

Jedan je od pokretača Matematičke radionice mladih, koja od 1999. godine radi sa mladim talentima iz Kragujevca. Od 2002. do 2005. godine bila je član Republičke komisije za takmičenja učenika osnovnih škola, a od 2002. do

2004. jedan od lidera državne ekipe Srbije i Crne Gore na Juniorskim balkanskim matematičkim olimpijadama. U periodu februar 2003 – januar 2006. bila je zamenik predsednika Upravnog odbora, a u periodu februar 2005 – januar 2006. član Izvršnog odbora Društva matematičara Srbije. Decembra 2006. izabrana je za predsednika Podružnice matematičara Kragujevca. Od 2003. godine je tehnički urednik časopisa za matematiku i računarstvo namenjenog učenicima srednjih škola – *"Tangenta"*, čiji je izdavač Društvo matematičara Srbije. Jedan je od redaktora (sa R. Tošićem, N. Ikodinovićem i S. Dimitrijević) zbirke zadataka *"Tangenta 10"* koju je 2006. godine izdalo Društvo matematičara Srbije povodom 10 godina izlaženja časopisa.

Bila je član Organizacionog odbora i tehnički sekretar međunarodnih konferencija *"Mathematics in 2004 at Kragujevac"* i *"International Conference on Numerical and Applied Mathematics" (ICNAM–2006, Kragujevac, Serbia).*

Aktivno se bavi naučno–istraživačkim radom u oblasti Numeričke analiza i Teorije aproksimacija, a posebno Numeričkom integracijom i Teorijom ortogonalnosti. Do sada je bila angažovana na sledećim projektima *"Metodi i modeli u teorijskoj, primenjenoj i industrijskoj matematici"* – Ministarstvo za nauku Republike Srbije (1999–2000) i *"Primenjeni ortogonalni sistemi, konstruktivne aproksimacije i numerički metodi"* – Ministarstvo za nauku i zaštitu životne sredine Republike Srbije (2002–2005), a trenutno je angažovana na projektima:

- *"Ortogonalni sistemi i primene"* – Ministarstvo za nauku i zaštitu životne sredine Republike Srbije (2006–2010);
- *"New Methods for Quadrature"* – Swiss National Science Foundation (2006–2008).

Koautor je sledećih knjiga:

1. Republička komisija za matematička takmičenja učenika osnovnih škola: *1000 zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola 1994–2003*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.
2. M. Stanić, N. Ikodinović: *Teorija brojeva – zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2004.
3. Republička komisija za matematička takmičenja učenika osnovnih škola: *1000 zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola 1996–2005. godine*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.
4. D. Bojović, B. Popović, M. Stanić: *Parcijalne i integralne jednačine – zbirka zadataka*, Univerzitet u Kragujevcu, Prirodno–matematički fakultet, Kragujevac, 2006.
5. M. Stanić, S. Dimitrijević, S. Simić, D. Bojović: *Funkcionalna analiza – zbirka zadataka*, Univerzitet u Kragujevcu, Prirodno–matematički fakultet, Kragujevac, 2007.

Učestvovala je na sledećim međunarodnim konferencijama:

1. First International Congress MASSEE' 2003 (Forth International Minisimposium "Transform Methods & Special Functions, Borovetz'2003"), September 15-21, 2003, Borovetz, Bulgaria
   G.V. Milovanović, M. Stanić: *Multiple orthogonal polynomials on the semicircle and corresponding quadratures of Gaussian type* (invited talk).

2. Fifth International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory (FAAT 2004), June 16 - 23, 2004, Acquafredda di Maratea, Italy
   G.V. Milovanović, M. Stanić: *Multiple orthogonality and quadratures of Gaussian type.*

3. Sixth International Conference on Numerical Methods and Applications (NM&A'06), August 20 - 24, 2006, Borovetz, Bulgaria
   G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, M.P. Stanić: *Trigonometric orthogonal systems and quadrature formulae with maximal trigonometric degree of exactness.*

4. International Conference on Numerical and Applied Mathematics (ICNAM-2006), September 27 - 30, 2006, Kragujevac, Serbia
   G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, M.P. Stanić: *Trigonometric orthogonal systems and Gaussian type quadraturae.*

Do sada ima objavljene sledeće naučne radove:

1. G.V. Milovanović, M. Stanić, *Construction of multiple orthogonal polynomials by discretized Stieltjes-Gautschi procedure and corresponding Gaussian quadratures*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **18** (2003), 9–29. MR2027227 (2004m:42032)

2. G.V. Milovanović, M. Stanić, *Multiple orthogonal polynomials on the semicircle and corresponding quadratures of Gaussian type*, Math. Balkanica (N. S.) **18** (2004), 373–387. MR2076203 (2005g:42063)

3. M. Stanić, *$S-$orthogonality on the semicircle*, Kragujevac J. Math. **26** (2004) 39–48. MR2125357 (2005j:42019)

4. G.V. Milovanović, M. Stanić, *Multiple orthogonality and quadratures of Gaussian type,* Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Suppl. **76** (2005), 75–90. MR2175548 (2006f:65026)

5. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, M.P. Stanić, *Multiple orthogonal polynomials on the semicircle,* Facta Univ. Ser. Math. Inform. **20** (2005), 41–55. MR2185966 (2006f:42025)

6. G.V. MILOVANOVIĆ, A.S. CVETKOVIĆ, M.P. STANIĆ, *Trigonometric orthogonal systems and quadrature formulae with maximal trigonometric degree of exactness,* NMA 2006, Lecture Notes in Comput. Sci. **4310** (2007), 402–409.

7. G.V. MILOVANOVIĆ, A.S. CVETKOVIĆ, M.P. STANIĆ, *Gaussian quadratures for oscillatory integrands,* Appl. Math. Lett. **20** (2007) (u štampi)