Поглавље 1

ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

1. Дефиниција векторског простора

Појам векторског простора је један од основних појмова у овом курсу.

Дефиниција 1. Под векторским простором над пољем реалних бројева R подразумевамо произвољан скуп X у коме су уведене две операције

(а) *сабирање вектора*, које сваком пару елемената $A, B \in X$ придружује известан вектор $A + B \in X$;

(б) *множење вектора скаларима* $\lambda \in R$, које сваком вектору $A \in X$ и скалару $\lambda \in R$ придружује известан вектор $\lambda A \in X$, тако да су задовољене следеће особине :

(1^0) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*асоцијативност сабирања*);

(2^0) Постоји елемент $O \in X$ тако да је испуњено

$$A + O = O + A = A \qquad (A \in X);$$

(3^0) За сваки елемент $A \in X$ постоји известан вектор $B \in X$ тако да је

$$A + B = O\,;$$

(4^0) $A + B = B + A$ (*комутативност сабирања*);

(5^0) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ (и дистрибутивност множења скаларима у односу на сабирање вектора);

(6^0) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ (*дистрибутивност множења скаларима у односу на сабирање скалара*);

(7^0) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;

(8^0) $1\cdot A=A$,

за произвољне векторе $A, B\in X$ и скаларе $\alpha,\beta\in R$.

Елементи векторског простора X називају се векторима тог простора.

Вектор O назива се нула–вектором простора X. Вектор B из особине (3^0) назива се супротним вектором вектора A, и означава са $-A$. Вектор $A+B$ назива се збиром вектора $A, B\in X$.

Очигледно је да особине (1^0)–(4^0) значе да је структура $(X,+)$ комутативна група, и O је неутрални елемент те групе.

На даље, векторске просторе означаваћемо обично словима X, Y итд, а њихове елементе словима $A, B\ldots$.

Пример 1. Геометријски вектори, тј. добро познати усмерени одсечци $\overrightarrow{PQ}$ у равни Oxy, тј. Еуклидском простору R^2, образују један реалан векторски простор.

Пример 2. Геометријски вектори, тј. усмерени одсечци $\overrightarrow{PQ}$ у Еуклидском простору R^3, образују такође један реалан векторски простор.

Пример 3. За произвољно $n\in N$, означимо са R^n скуп свих уређених n–торки реалних бројева. Дакле

$$R^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\,\big|\,x_1,\ldots,x_n\in R\}\,.$$

Бројеви $x_1,\ldots,x_n$ називају се координатама вектора $(x_1,\ldots,x_n)$. У скупу R^n уводимо једнакост са

$$(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n)$$

ако и само ако је $x_1=y_1, x_2=y_2,\cdots,x_n=y_n$.

У скуп R^n уводе се векторске операције на следећи начин:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \qquad (\lambda \in R).$$

Лако се проверава да се тиме добија векторски простор над пољем R. Нула–вектор овог простора је вектор $(0, 0, \dots, 0)$, а супротан вектор вектора $(x_1, \dots, x_n)$ је вектор $(-x_1, \dots, -x_n)$.

Простор R^n назива се *реалним Еуклидским векторским простором димензије* n.

2. Особине векторских простора

У овој тачки навешћемо неке елементарне особине векторских простора. Докази ових особина су обично непосредни, и следе из аксиома векторског простора.

Надаље, претпостављамо да је X произвољан реалан векторски простор.

СТАВ 1. *Постоји тачно један нула–вектор простора* X.

СТАВ 2. *За произвољан вектор* $A \in X$ *постоји тачно један супротан вектор* $-A$ *простора* X.

СТАВ 3. *Ако су* A *и* B *произвољни вектори простора* X *и* $A + B = B$, *тада је* $A = O$.

Ако су A и B произвољни вектори простора X, тада уместо $A + (-B)$ пишемо $A - B$. Вектор $A - B$ називамо *разликом вектора* A и B.

СТАВ 4. *За сваки вектор* $A \in X$ *важи једнакост* $0 \cdot A = O$.

СТАВ 5. *За произвољан скалар* α *важи* $\alpha \cdot O = O$.

СТАВ 6. *За произвољан вектор* $A \in X$ *важе једнакости*:

(а) $-A = (-1)A$; (б) $-(-A) = A$.

СТАВ 7. *Једнакост* $\alpha A = O$ *важи ако и само ако је* $\alpha = 0$ *или* $A = O$.

3. Потпростори векторских простора

Непразан подскуп E векторског простора X назива се потпростором простора X, ако за произвољна два вектора $A, B \in E$ и произвољне скаларе α, β, вектор $\alpha A + \beta B \in E$.

Ако је притом $E \neq X$, тада E називамо *правим потпростором* простора X.

Примери. (1^0) Скуп $E = \{O\}$ је увек потпростор простора X. Он се назива његовим тривијалним потпростором.

(2^0) Цео простор $E = X$ је такође потпростор простора X.

(3^0) Ако је $X = R^n$, тада сваки од скупова

$$Ox_i = \{(0,0,\dots,0,x_i,0,0,\dots,0) \,\big|\, x_i \in R\} \qquad (i = 1,\dots,n)$$

представља потпростор простора R^n. Скуп Ox_i назива се i–том координатном осом простора R^n.

(4^0) Скуп $\mathcal{P}_n$ свих реалних полинома реалне променљиве x, степена $\leq n$, представља потпростор простора $\mathcal{P}$ свих реалних полинома реалне променљиве x.

Може се лако видети да важи следећи став.

СТАВ 8. *Ако је E потпростор простора X, тада је скуп E такође векторски простор над пољем R.*

4. Линеарна комбинација вектора

Нека су $A_1, \dots, A_m$ произвољни вектори векторског простора X. Тада се било који вектор A простора X облика $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_m A_m$, за извесне скаларе $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, назива *линеарном комбинацијом* вектора $A_1, \dots, A_m$. Скалари $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ називају се *коефицијентима* те линеарне комбинације.

Нека су $A_1, \dots, A_m$ произвољни вектори векторског простора X, и

$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$. Тада се скуп

$$\mathcal{L}\{\mathcal{A}\} = \mathcal{L}\{A_1, \ldots, A_m\} = \{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R\}$$

назива *линеалом* над скупом $\mathcal{A}$.

Ако је $\mathcal{A}$ произвољан (коначан или бесконачан) скуп вектора у X, тада се скуп

$$\mathcal{L}\{\mathcal{A}\} = \{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m | \, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A},\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R,\, m \in N\}$$

такође назива *линеалом над скупом* $\mathcal{A}$.

СТАВ 9. *За произвољан непразан подскуп $\mathcal{A} \subseteq X$, линеал $\mathcal{L}\{\mathcal{A}\}$ је потпростор простора X.*

Приметимо, да линеал $\mathcal{L}\{\mathcal{A}\}$ може бити и тривијални потпростор простора X. Заиста, ако је $\mathcal{A} = \{O\}$, тада је $\mathcal{L}\{\mathcal{A}\} = \{t \cdot O \,|\, t \in R\} = \{O\}$.

Исто тако, ако је $X = R^n$ и $\mathcal{A} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ при чему је

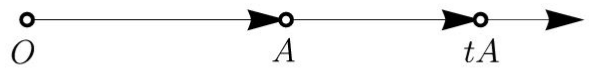
$$E_1 = (1, 0, \ldots, 0),\, E_2 = (0, 1, \ldots, 0),\, \ldots\, , E_n = (0, 0, \ldots, 1)\,,$$

тада се лако може видети да је $\mathcal{L}\{\mathcal{A}\} = R^n$.

Посебно, можемо да уочимо било који вектор $A \neq O$ простора X, и линеал

$$\mathcal{L}\{A\} = \{tA \,|\, t \in R\}.$$

Овај линеал назива се *правом* у простору X, која пролази кроз тачку O. Вектор A назива се *вектором правца* ове праве.



Слика 1.1

5. Линеарна независност вектора

Уочимо било које векторе $A_1, \dots, A_m$ векторског простора X. Рећи ћемо да су вектори $A_1, \dots, A_m$ *линеарно независни*, ако је релација

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m = 0, \tag{1}$$

за извесне скаларе $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in R$, могућа само за $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

У супротном, тј. ако релација (1) важи за извесне скаларе $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in R$, и притом је $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_m^2 \neq 0$, тада кажемо да су вектори $A_1, \dots, A_m$ *линеарно зависни.*

Није тешко видети да важи следећи став.

СТАВ 10. *Ако су вектори $A_1, \dots, A_m$ $(m \geq 1)$ простора X линеарно независни, тада је сваки од њих различит од нуле.*

Уочимо, посебно, скуп састављен од само једног вектора A простора X. Тада је он линеарно независан ако је $A \neq O$, и линеарно зависан за $A = O$. Заиста, ако је $A \neq O$, тада из $\lambda A = O$ следи $\lambda = 0$. Ако је $A = O$, тада је $1 \cdot A = 1 \cdot O = O$, па је O линеарно зависан вектор.

СТАВ 11. *Вектори $A_1, \dots, A_m$ $(m \geq 1)$ простора X су линеарно зависни ако и само ако се један од ових вектора може представити као линеарна комбинација преосталих вектора овог низа.*

Пример 5. Доказаћемо да су у простору R^n вектори

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0),\ E_2 = (0, 1, \dots, 0),\ \dots,\ E_n = (0, 0, \dots, 1)$$

линеарно независни. Заиста, имаћемо да је

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_n E_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

па из $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_n E_n = O$, очигледно следи да је $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Стога су вектори $E_1, \dots, E_n$ линеарно независни вектори простора R^n.

Пример 6. Докажимо да су вектори $A_1 = (1, 1)$, $A_2 = (-3, 2)$ у простору R^2 линеарно независни.

Претпоставимо да је

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-3,2) = (\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = 0,$$

за извесне скаларе λ_1, $\lambda_2 \in R$. Тада је

$$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \quad , \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0\,.$$

Решавањем горњег система линеарних једначина по $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, непосредно добијамо да је $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Дакле, вектори A_1 и A_2 су линеарно независни.

Пример 7. Доказаћемо да су вектори $A_1 = (1,0,-2,1)$, $A_2 = (2,1,3,-1)$ и $A_3 = (4,1,-1,1)$ линеарно зависни вектори простора R^4. Како очигледно важи

$$2A_1 + A_2 - A_3 = 2(1,0,-2,1) + (2,1,3,-1) - (4,1,-1,1) = 0,$$

непосредно добијамо тврђење.

Наводимо још једно тврђење за линеарно независне векторе и једну његову последицу.

СТАВ 12. *Било који непразан подскуп скупа линеарно независних вектора је такође линеарно независан скуп.*

ПОСЛЕДИЦА 1. *Низ вектора $A_1, \ldots, A_m$ је линеарно зависан, ако је неки његов подниз вектора линеарно зависан.*

6. База и димензија векторског простора

Произвољан непразан скуп вектора $\mathcal{A}$ векторског простора X ($X \neq \{O\}$) називамо *линеарно независним*, ако је било који његов коначан део састављен од линеарно независних вектора.

Скуп $\mathcal{A}$ притом може бити и коначан и бесконачан. Ако је коначан, претходна дефиниција се уклапа у уобичајену дефиницију скупа линеарно независних вектора.

Пример 1. У векторском простору $\mathcal{P}$ свих реалних полинома, лако се показује да полиноми $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) \equiv x$, $P_2(x) \equiv x^2, \ldots,$ образују један линеарно независан скуп вектора. Ово непосредно следи из чињенице да су за произвољно $n \in N$ полиноми $P_0, P_1, \dots, P_n$ линеарно независни, и да је сваки подскуп коначног линеарно независног скупа такође линеарно независан.

Дефиниција 2. Скуп вектора $\mathcal{B}$ векторског простора X $(X \neq \{O\})$, назива се *базом* (*алгебарском базом*) простора X, ако су сви вектори скупа $\mathcal{B}$ линеарно независни, и сваки вектор $A \in X$ може се приказати као линеарна комбинација

$$A = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots + \lambda_n B_n$$

неких вектора $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$, тј. важи $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = X$.

Ако је $\mathcal{B}$ база простора X, тада се може лако видети да је горњи приказ увек јединствен.

Пример 2. У векторском простору $\mathcal{P}$ свих реалних полинома $P(x)$ реалне променљиве x, низ полинома $\{P_0, P_1, \cdots\}$ из Примера 1 очигледно образује једну базу простора $\mathcal{P}$.

Следећа теорема представља један од најважнијих ставова који се односе на опште векторске просторе.

ТЕОРЕМА 1. *Сваки реални векторски простор X $(X \neq \{O\})$ поседује бар једну базу.*

Напомена. База било ког векторског простора X $(X \neq \{O\})$ никада није једнозначно одређена, и може се изабрати на бесконачно много начина. На пример у простору $X = R$, за базу простора можемо узети било који број $A \neq 0$.

Векторски простор $X \neq \{O\}$ над пољем R називаћемо *коначно–димензионалним*, ако поседује бар једну коначну базу $\mathcal{B}$.

У супротном, векторски простор X називаћемо *бесконачно–димензионалним*.

Треба напоменути да је претходна дефиниција коректна у смислу да ако векторски простор X бар једну коначну базу, тада је и свака његова друга база такође коначна, и поседује потпуно исти број елемената. Дакле важи следећа теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Ако нека фиксирана база векторског простора X има n елемената, тада и свака друга његова база има такође n елемената.*

Горња теорема назива се још и главном теоремом која се односи на базе векторског простора. Из ње непосредно добијамо следећу последицу.

ПОСЛЕДИЦА 2. *Ако векторски простор X поседује бар једну бесконачну базу, тада је и свака друга његова база такође бесконачна.*

Горње теореме омогућавају да се уведе димензија векторског простора X.

Дефиниција 3. Ако векторски простор X има бар једну коначну базу $\{B_1, \dots, B_n\}$, тада се број n назива *димензијом простора* X, и пишемо $\dim(X) = n$. Ако простор X има бар једну бесконачну базу, тада пишемо $\dim(X) = \infty$.

Дакле, димензија простора X дефинисана је увек, или као коначан природан број n $(n \in N)$, или као формалан број ∞.

Осим тога, ако је $X = \{O\}$, тада условно пишемо $\dim(X) = 0$. На тај начин дефинисана је димензија произвољног векторског простора X.

Ако је димензија простора X једнака n $(n \in N)$, тада се тај простор често означава и са $X = X^n$. Једна од најважнијих особина сваког векторског простора X^n јесте да он може да садржи највише n линеарно независних вектора, а било којих $n+1$ вектора у таквом простору морају бити линеарно зависни, тј. један од њих изражава се као линеарна комбинација преосталих вектора из тог скупа.

Напомена. Ако је E произвољан потпростор векторског простора X, тада се потпуно слично као, и за цео простор X, може дефинисати и димензија $\dim(E)$ потпростора E.

СТАВ 13. *Димензија векторског простора R^n једнака је n.*

Доказ. Уочимо стандардну базу простора R^n, тј. векторе

$$E_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ E_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ E_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Вектори $E_1, \ldots, E_n$ су очигледно линеарно независни, јер из $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_n E_n = O$, следи да је $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Поред тога, произвољан вектор $A \in R^n$, можемо приказати као линеарну комбинацију вектора $E_1, \ldots, E_n$.

Заиста, ако је $A = (a_1, \ldots, a_n)$, тада је очигледно

$$A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \cdots + a_n E_n.$$

Из претходног непосредно следи да је $\{E_1, \ldots, E_n\}$ база простора R^n, па је заиста $\dim(R^n) = n$. $\square$

У следећем ставу описани су сви потпростори векторског простора R^3.

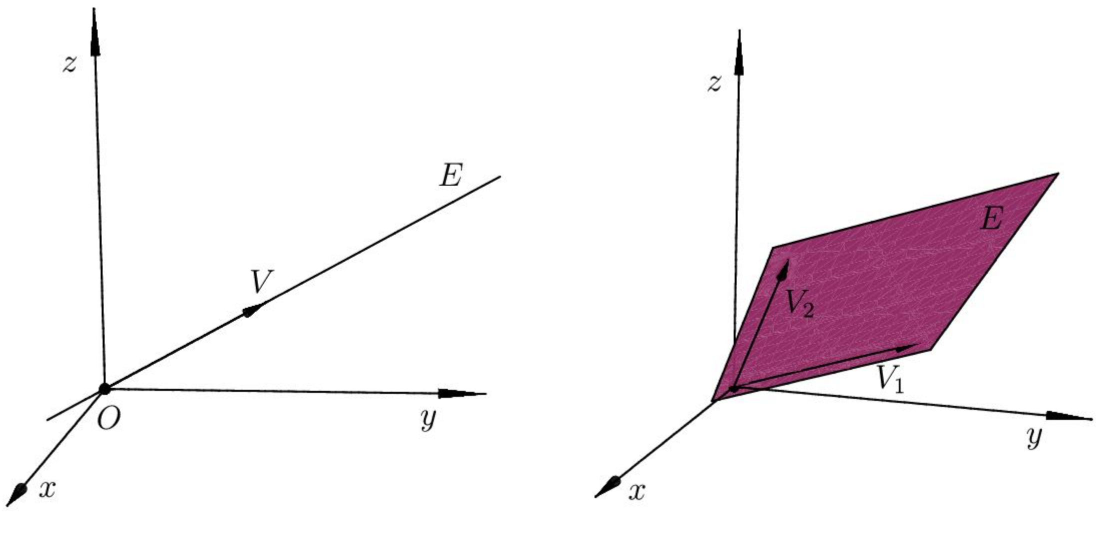
СТАВ 14. *Сваки потпростор E простора R^3 представља један од следећих скупова:*

(а) *Једночлани скуп $\{O\}$;*

(б) *Цео простор R^3;*

(ц) *Извесну праву кроз координатни почетак O;*

(д) *Извесну дводимензионалну раван кроз координатни почетак O.*



Слике 1.2 и 1.3

7. Колинеарност и компланарност вектора

Посматрајмо произвољан низ вектора $A_1, \ldots, A_m$ простора X^n. Рећи ћемо да су они *компланарни* ако важи

$$\dim \mathcal{L}\{A_1, \ldots, A_m\} \leq n - 1.$$

Посебно за $n = 1$ компланарност вектора $V_1, \ldots, V_m$ очигледно значи да су сви они једнаки нули.

Како је

$$\dim \mathcal{L}\{V_1, \ldots, V_m\} \leq m\,,$$

очигледно су, за $m \leq n - 1$, било којих m вектора $A_1, \ldots, A_m$ простора X^n, компланарни.

СТАВ 15. *Вектори $A_1, \ldots, A_n$ простора X^n су компланарни ако и само ако су линеарно зависни.*

Нека су даље A и B вектори простора X^n. Кажемо да су они *колинеарни* ако постоји известан вектор $P \neq 0$ и скалари α, β такви да је

$$A = \alpha P, \quad B = \beta P.$$

Може се лако показати да су вектори A и B колинеарни ако и само ако су линеарно зависни.

8. Изоморфност векторских простора

Дефиниција 4. Нека су X и Y реални векторски простори. Под *линеарним пресликавањем* φ простора X у простор Y, подразумевамо било које пресликавање $\varphi\colon X \to Y$ са особинама:

(а) $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, (б) $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$,

за било која два вектора $A, B \in X$ и било који скалар λ.

Особина (а) назива се *адитивношћу*, а особина (б) *хомогеношћу* пресликавања φ. Дакле, пресликавање $\varphi\colon X \to Y$ је линеарно ако и само ако има особину адитивности и хомогености.

Особине (а) и (б) могу се описати и само једном особином

$$\varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B)\,,$$

за произвољне векторе $A, B \in X$ и произвољне скаларе $\lambda, \mu \in R$.

Ако је φ било које линеарно пресликавање простора X у простор Y, тада се лако може видети да је $\varphi(O) = O$.

Заиста, имамо да је

$$\varphi(O) = \varphi(O + O) = \varphi(O) + \varphi(O),$$

одакле следи $\varphi(O) = O$.

Дефиниција 5. Свако бијективно линеарно пресликавање $\varphi\colon X \to Y$ векторског простора X на векторски простор Y, назива се *изоморфизмом* простора X и Y.

Дакле, пресликавање $\varphi\colon X \to Y$ је изоморфизам векторских простора X и Y, уколико је линеарно, "један–један" и "на". У том случају кажемо да је простор X изоморфан са простором Y, и пишемо $X \cong Y$.

Овде треба нагласити да у општем случају изоморфизам φ два изоморфна векторска није једнозначно одређен. Тачније, он је једнозначно одређен само у тривијалном случају $X = Y = \{O\}$.

Следећа два става су два најважнија става који се односе на изоморфност векторских простора.

СТАВ 16. *Релација изоморфности векторских простора је једна релација еквиваленције у скупу свих реалних векторских простора.*

СТАВ 17. *Коначно–димензионални векторски простори X^m и Y^n, који имају респективно димензије m и n, су изоморфни ако и само ако је $m = n$, тј. ако и само ако су им одговарајуће димензије једнаке.*

Из претходног става непосредно следи да је сваки n–димензионални реални векторски простор X^n изоморфан са векторским простором R^n, затим да су било која два векторска простора X^n и Y^n, истих димензија n међусобно изоморфни, као и да су било која два коначно–димензионална векторска простора X^m и Y^n различитих димензија увек неизоморфни.

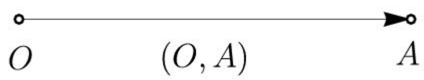
9. Геометријска интерпретација вектора векторског простора

Уочимо било који реалан векторски простор X. Показаћемо како се елементи тог простора могу интерпретирати као усмерене дужи, дакле као геометријски вектори. То се може учинити бар на два нач ина.

1. Уочимо скуп

$$X_1 = \{ (O, A) \,|\, A \in X \}$$

који очигледно представља подскуп Декартовог производа $X \times X$. За сваки вектор $A \in X$, уређени пар (O, A) назива се још и радијус-вектором који одговара вектору A, и визуелно се може схватити као усмерена дуж чији је почетак тачка O, а крај тачка A.



Слика 1.4

Стога се скуп X_1 назива још и скупом радијус–вектора простора X. У скуп X_1 можемо увести векторске операције са

$$(O, A) + (O, B) = (O, A + B)$$
$$\lambda(O, A) = (O, \lambda A),$$

за произвољне векторе $A, B \in X$ и скаларе $\lambda \in R$.

Лако се проверава да овако добијени скуп X_1 представља један нови векторски простор над пољем R. Нула–вектор простора X_1 је радијус–вектор (O, O), а супротан вектор вектора (O, A) је радијус–вектор $(O, -A)$.

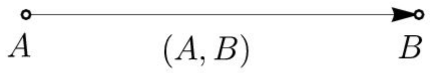
Даље се доказује да важи следеће тврђење.

СТАВ 18. *Простори X и X_1 су изоморфни.*

На основу претходног става, било који векторски простор X може се идентификовати са векторским простором одговарајућих радијус–вектора. Стога за радијус–векторе простора X_1 важе потпуно слична правила рачунања као и за радијус–векторе у простору R^2 или у простору R^3.

2. Ако је даље X поново произвољан реалан векторски простор, тада за било која два вектора $A, B \in X$, можемо да уочимо уређени пар $(A, B) \in X \times X$ тих вектора.

Он се визуелно може схватити и као усмерени одсечак чији је почетак у тачки $A \in X$ а крај у тачки $B \in X$.



Слика 1.5

Даље уочимо скуп

$$X_2 = \{(A, B) | \, A, B \in X \,\} \subseteq X \times X \,,$$

и уведимо у овај скуп следеће операције:

(а) *једнакост* са $(A, B) = (A_1, B_1)$ ако и само ако је $B - A = B_1 - A_1$;

(б) *сабирање* са

$$(A, B) + (A_1, B_1) = (A + A_1, B + B_1);$$

(ц) *множење скаларима* са

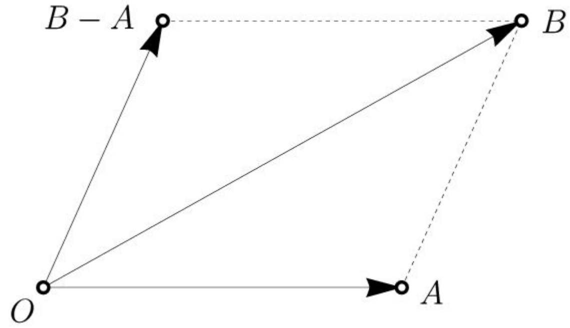
$$\lambda(A, B) = (\lambda A, \lambda B),$$

за произвољне векторе $A, B, A_1, B_1 \in X$ и скаларе $\lambda \in R$.

Тада се лако проверава да тако добијени количник–скуп $X_2^0 = X_2/_=$ представља један нови векторски простор над пољем R.

Посебно, у том скупу сваки елемент $(A, B) \in X_2^0$ идентификујемо са радијус–вектором $(O, B - A)$.

Нула–вектор у простору X_2^0 је било који уређени пар облика (A, A) $(A \in X)$, а супротан вектор вектора (A, B) је вектор $(B, A) = (-A, -B)$, а исто тако и било који вектор облика $(P + B, P + A)$ $(P \in X)$.



Слика 1.6

Једна од најважнијих особина простора X_2^0 је следећа особина. Ако су A, B, C произвољна три вектора из простора X, тада важи једнакост:

$$(A, B) + (B, C) = (A, C),$$

или са векторским ознакама: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Заиста, имаћемо да је

$$\begin{aligned}(A, B) + (B, C) &= (O, B - A) + (O, C - B) = (O, B - A + C - B) = \\ &= (O, C - A) = (A, C).\end{aligned}$$

Следећи став представља најважнију особину векторског простора X_2^0.

СТАВ 19. *Векторски простори X и X_2^0 су изоморфни.*

На основу претходна два става следи да су векторски простори X, X_1 и X_2^0 међусобно изоморфни.

Стога елементе простора X можемо интерпретирати било као одговарајуће радијус–векторе, било као усмерене одсечке неког векторског простора.

Тиме добијамо бар две нове интерпретације произвољног векторског простора X. Напоменимо да све што је речено о геометријској интерпретацији произвољног векторског простора X посебно важи и за векторски простор R^n $(n \in N)$.

Из свих наведених разлога не правимо разлику између тачке A као вектора векторског простора X, затим вектора A, радијус вектора $\overrightarrow{OA} =$

$\overrightarrow{A}$ који одговара тачки A и који такође означавамо са A, као и слободних вектора $\overrightarrow{AB}$ простора X. Дакле, стављамо да је $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{OA} = A$ и $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Поглавље 2

МАТРИЦЕ. ДЕТЕРМИНАНТЕ. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

1. Реалне матрице

Матрице представљају уопштења бројева, тачније то су уређене шеме бројева.

Под матрицом типа $m \times n$ $(m, n \in N)$ подразумевамо правоугаони систем реалних бројева

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

или у сажетом облику, $A = [a_{ij}]$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$. Бројеви a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ називају се елементима матрице A. Елементи $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ образују *i–ту врсту* матрице A, а елементи $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ *j–ту колону* те матрице.

Означавамо их још и са

$$V_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad (i = 1, \ldots, m), \quad K_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Према томе, матрица A типа $m \times n$ има m врста и n колона.

Ако специјално матрица A има исти број врста и колона, тј. ако је $m = n$, називамо је *квадратном матрицом реда* n.

Пример 1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

је реална матрица типа 2×3, са 2 врсте и 3 колоне, а матрица

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

је реална матрица типа 2×2 (реда 2).

Ако је матрица A типа $m \times n$, и $K_1, \dots, K_n$ су њене колоне, тада се понекад матрица A означава формално и са

$$A = (K_1, \dots, K_n)\,.$$

Елемент a_{ij} матрице $A = [a_{ij}]$ налази се према томе на пресеку i–те врсте и j–те колоне ове матрице.

Скуп свих реалних матрица типа $m \times n$ означава се са $M_{m,n}(R)$. Скуп свих реалних квадратних матрица реда n означавамо са $M_n(R)$.

Правоугаона матрица типа $m \times n$ назива се *нула–матрицом*, ако су сви њени елементи једнаки нули. Према томе, то је матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матрица A реда n назива се *дијагоналном* ако су за свако $i \neq j$ елементи $a_{ij} = 0$ (тзв. елементи изван главне дијагонале). То је према томе било која матрица облика

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Такву матрицу означавамо још и са $A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

Дијагонална матрица A назива се *јединичном* и означава са I_n или кратко са I, ако су сви њени елементи на главној дијагонали једнаки јединици, тј. ако је $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$. То је дакле матрица

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матрица A назива се (*горњом* или *доњом*) *троугаоном матрицом*, ако респективно има облик

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Другим речима, назива се горњом или доњом троугаоном матрицом ако су за $i > j$ сви елементи a_{ij} (испод главне дијагонале) једнаки нули, односно за $i < j$ сви елементи a_{ij} (изнад главне дијагонале) једнаки нули.

2. Операције над матрицама

Над матрицама се могу изводити разне операције. Кажемо да су две матрице $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ *једнаке*, ако су оне истог типа, и ако су им сви одговарајући елементи међусобно једнаки, тј. важи

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n).$$

Пример 2. Једначина по x и y

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & y \end{pmatrix},$$

има јединствено решење $x = 0$, $y = 3$. Супротно томе, једначина

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix},$$

нема решења.

Сваку матрицу можемо *помножити бројем*, а ако су матрице A и B истог типа, можемо их *сабрати или одузети.* Наиме, ове операције дефинишемо релацијама:

$$\lambda[a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] \quad , \quad [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}].$$

Дакле, матрицу множимо неким реалним бројем тако што све њене елементе помножимо тим бројем, а две матрице истог типа сабирамо (односно одузимамо), тако што све њихове одговарајуће елементе саберемо (односно одузмемо). Очигледно је множење матрица скаларима спољашња, а сабирање и одузимање матрица унутрашња операција.

Пример 3.

$$3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -15 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

СТАВ 1. *Ако су све матрице A, B, C, D истог типа, тада важе следеће релације:*

(1^0) $A + B = B + A$ *(комутативност сабирања);*

(2^0) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(асоцијативност сабирања);*

(3^0) $A + O = A$*,*

(4^0) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$*, за произвољан скалар* α*;*

(5^0) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$*;*

(6^0) $1 \cdot A = A$*.*

Све ове особине се лако доказују користећи уобичајена правила за сабирање и множење реалних бројева.

Из горњих особина непосредно добијамо следећи став.

СТАВ 2. *Скуп свих реалних правоугаоних матрица $M_{m,n}(R)$ типа $m \times n$ образује један реални векторски простор.*

Нула–вектор простора $M_{m,n}(R)$ је очигледно нула–матрица типа $m \times n$.

Нека је даље A произвољна матрица типа $m \times n$, а B произвољна матрица типа $n \times p$ (дакле, матрица A има исти број колона као матрица B врста, једнак броју n). Тада се њихов производ $A \cdot B$ дефинише као матрица $C = [c_{ik}]$ типа $m \times p$, при чему је

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \qquad (1 \leq i \leq m,\, 1 \leq k \leq p).$$

Дакле, $C = A \cdot B = [c_{ik}]$ је матрица типа $m \times p$, а елемент c_{ik} добија се неком врстом множења ("скаларним множењем") i–те врсте матрице A и k–те колоне матрице B:

$$c_{ik} = V_i(A) \cdot K_k(B) = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} \qquad (i \leq m,\, k \leq p).$$

Primer 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 17 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Осим тога, примећујемо да производ горњих двеју матрица у обрнутом поретку није дефинисан.

Посебно, ако су обе матрице A и B квадратне и истог реда n, тада је дефинисано и AB и BA. Али, за разлику од множења у скупу реалних бројева, у општем случају није увек $AB = BA$, тј. множење матрица у општем случају није комутативно.

Пример 5. Имамо да је

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

док је

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

СТАВ 3. *За множење матрица важе следеће релације:*

(1^0) $A(BC) = (AB)C$ *(асоцијативност множења);*

(2^0) $A(B + C) = AB + AC$ *(дистрибутивност множења);*

(3^0) $(A + B)C = AC + BC$*;*

(4^0) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$*;*

(5^0) $I \cdot A = A \cdot I = A$*,*

под одговарајућим претпоставкама које је потребно увести да би наведени збирови и производи матрица имали смисла.

Нека је даље $A = [a_{ij}]$ произвољна матрица типа $m \times n$. Тада можемо дефинисати одговарајућу транспоновану матрицу $A^\top$ матрице A (која је типа $n \times m$), на следећи начин:

$$A^\top = [b_{ij}]\,, \tag{1}$$

где је $b_{ij} = a_{ji}$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$.

Пример 6. Имамо да је

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нека је даље A произвољна реална квадратна матрица реда n. Ако матрица A задовољава једну од следећих релација

$$A^\top = A \quad , \quad A^\top A = AA^\top = I \quad \text{или} \quad A^\top A = AA^\top\,,$$

тада се респективно назива *симетричном*, *ортогоналном*, односно *нормалном матрицом*. Посебно је квадратна матрица $A = [a_{ij}]$ *симетрична* ако и само ако важи $a_{ij} = a_{ji}$ $(1 \le i, j \le n)$, тј. ако и само ако је симетрична у односу на главну дијагоналу.

СТАВ 4. *Под одговарајућим претпоставкама за матрице A и B, важе следеће релације:*

(1^0) $(A^\top)^\top = A$;

(2^0) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$;

(3^0) $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$;

(4^0) $(AB)^\top = B^\top A^\top$;

3. Детерминанте

Детерминанта матрице је број који се на одређени начин придружује матрици, и дефинише се само за квадратне матрице.

Нека је, пре свега, матрица $A = [a_{11}]$ реална квадратна матрица реда 1. Тада је њена детерминанта

$$\det [a_{11}] = a_{11}.$$

Нека је даље

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

реална квадратна матрица реда 2. Тада је њена детерминанта

$$\det (A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Ако је $A = [a_{ij}]$ реална квадратна матрица реда 3, тада је

$$\det (A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\,.$$

Уопште, нека је

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадратна матрица реда n, чији су елементи реални бројеви. Тада се њена детерминанта $\det (A)$, која се најчешће означава са

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

дефинише на следећи начин:

$$\det(A) = \sum (-1)^{\pi(i_1,\ldots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}. \tag{2}$$

При том се сумирање врши по свим пермутацијама $(i_1,\ldots,i_n)$ низа $(1,2,\ldots,n)$, а број $\pi(i_1,\ldots,i_n)$ означава парност одговарајуће пермутације. Због тога је укупан број сабирака једнак $n!$. Број $(-1)^{\pi(i_1,\ldots,i_n)}$ је увек једнак $+1$ или -1.

Напомена. Број $\pi(i_1,\ldots,i_n)$, парност пермутације $(i_1,\ldots,i_n)$, је природан број који означава са колико се најмање међусобних измена места по два елемента, може добити пермутација $(i_1,\ldots,i_n)$ од основне пермутације $(1,\ldots,n)$. Тако је на пример, $\pi(1,3,2)=1$, $\pi(2,3,1)=2$, $\pi(2,4,3,1)=2$, итд.

На основу опште формуле (2), очигледно је детерминанта $\det(A)$ реалне матрице A реалан број. Такође, није тешко видети да је $\det(O) = 0$ и $\det(I)=1$.

Под детерминантом реда n подразумевамо детерминанту одговарајуће матрице A реда n. Наводимо основне особине детерминанти, које се у пракси најчешће користе код њиховог израчунавања.

СТАВ 5. *Важи једнакост*

$$\det(A^\top) = \det(A),$$

тј. матрица A и одговарајућа транспонована матрица имају једнаке детерминанте.

Пример 7. За матрице другог реда имамо да је

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

СТАВ 6. *Детерминанта се множи неким реалним бројем тако што се сви елементи било које њене врсте (или колоне) помноже тим бројем.*

Пример 8. Имамо да је

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21}.$$

Одавде непосредно следи да је детерминанта једнака нули ако су сви елементи неке њене врсте (или колоне) једнаки нули.

СТАВ 7. *Детерминанта је једнака нули ако су одговарајући елементи неке две врсте (или колоне) међусобно једнаки.*

Пример 9.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

СТАВ 8. *Детерминанта је једнака нули, ако су сви одговарајући елементи неке њене две врсте (или колоне) пропорционални.*

Пример 10.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{12} - \lambda a_{11}a_{12} = 0\,.$$

СТАВ 9. *Ако две врсте или (две колоне) матрице A замене места, тада детерминанта мења знак.*

Пример 11.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad , \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6\,.$$

СТАВ 10. *Ако је A горња (или доња) троугаона матрица, тада важи једнакост*

$$\det(A) = a_{11}\,a_{22}\,\cdots\,a_{nn}\,,$$

тј. детерминанта је једнака производу свих својих дијагоналних елемената.

Пример 12.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,.$$

СТАВ 11. *Детерминанта матрице се не мења ако некој врсти (или колони) те матрице додамо било какву линеарну комбинацију преосталих врста или колона.*

Коришћењем Става 11, може се лако доказати да важи следећи став.

СТАВ 12. *Ако је нека врста (или колона) матрице A линеарна комбинација преосталих врста (или колона), тада је детерминанта те матрице једнака нули.*

Као једну од најзначајнијих особина детерминанти наводимо став о детерминанти производа двеју матрица.

СТАВ 13. *За било које две квадратне матрице A и B реда n важи једнакост*

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B).$$

Пример 13. Ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

тада је $\det(A) = -6, \det(B) = 10$, па је $\det(AB) = -60$. Непосредним израчунавањем налазимо да је

$$AB = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -60\,. \quad \square$$

Једна од најважнијих особина детерминанти је *особина развијања детерминанте по елементима било које врсте, или било које колоне.*

Означимо са M_{ij} минор елемента a_{ij} матрице $A = [a_{ij}]$, тј. детерминанту матрице која се добија када се из матрице A избаци i–та врста и j–та колона (тј. она врста и она колона у којима се налази елемент a_{ij}). Тада се број

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

назива *алгебарским кофактором* елемента a_{ij}.

Пример 14. За матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

имамо да је $A_{11} = 2,\ A_{12} = -3,\ A_{21} = -1,\ A_{22} = 0.$

ТЕОРЕМА 1. (Лапласова теорема). *За свако фиксирано* $i, j = 1, \ldots, n$ *важе једнакости:*

(а) $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$;

(б) $\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$;

(ц) $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$;

(д) $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$.

Формула (а) назива се развојем детерминанте по елементима i–те врсте, а формула (б) развојем детерминанте по елементима j–те колоне.

Пример 15. Развијањем детерминанте

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

по елементима прве врсте, добија се да је

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -20\,.$$

Претходна особина је једна од најчешће коришћених особина код израчунавања конкретних детерминанти, јер израчунавање детерминанте сводимо на израчунавање детерминанти једног реда мање (реда $n-1$), дакле поступном применом овог правила, на израчунавање детерминанти другог реда.

Напомена. Матрица A реда n назива се *регуларном* ако је $\det(A) \neq 0$, и *сингуларном* ако је $\det(A) = 0$. На пример, матрица $A = O$ (реда n) је сингуларна, јер је $\det(O) = 0$, а јединична матрица $I = I_n$ је регуларна, јер је $\det(I) = 1 \neq 0$.

4. Инверзна матрица матрице

Нека је $A = [a_{ij}]$ произвољна квадратна матрица реда n. Тада кажемо да је квадратна матрица $B = [b_{ij}]$ реда n *инверзна матрица* матрице A, ако је задовољена једнакост

$$AB = BA = I,$$

и то означавамо са $B = A^{-1}$.

Матрица A може, али не мора да има инверзну матрицу. Потребан и довољан услов за егзистенцију инверзне матрице даје Став 15.

СТАВ 14. *Ако инверзна матрица A постоји, тада је она јединствена.*

Доказ. Нека су B_1 и B_2 две инверзне матрице матрице A, тј. важи

$$AB_1 = B_1A = I \quad , \quad AB_2 = B_2A = I.$$

Множењем прве једнакости са леве стране матрицом B_2 и коришћењем друге једнакости, следи да је

$$B_2AB_1 = B_2, \quad \text{тј.} \quad IB_1 = B_1 = B_2,$$

дакле $B_1 = B_2$. $\square$

СТАВ 15. *Квадратна матрица A поседује инверзну матрицу A^{-1} ако и само ако је A регуларна матрица, тј. важи* $\det(A) \neq 0$. *Тада је*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\top}$$

Лако се може видети да је услов $\det(A) \neq 0$ неопходан за постојање инверзне матрице A^{-1}. Заиста, из услова $AA^{-1} = I$, следи да је

$$\det(A)\ \det(A^{-1}) = \det(I) = 1,$$

па је $\det(A) \neq 0$. Осим тога, непосредно добијамо да је $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Да је услов $\det(A) \neq 0$ и довољан за егзистенцију инверзне матрице, следи из тога што је матрица дефинисана горњом формулом једна инверзна матрица матрице A, и коришћењем става о јединствености. Ова последња чињеница лако се доказује применом Теореме 1 (Лапласове теореме). $\square$

Пример 16. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

је регуларна матрица, јер је $\det(A) = 5$. Тада је

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

СТАВ 16. *Ако су A и B регуларне матрице реда n, тада важе следеће релације:*

(а) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1} \qquad (\lambda \neq 0)$;

(б) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$;

(ц) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Напомена. Ако су A и B квадратне матрице реда n, и $AB = I$, тада матрица A поседује инверзну матрицу A и испуњено је $B = A^{-1}$. Наиме, из $AB = I$, следи да је $\det(A)\det(B) = 1$, па је A регуларна матрица. Стога постоји одговарајућа инверзна матрица A^{-1}. Притом, из релације $AB = I$, множењем са леве стране са A^{-1}, следи да је $B = A^{-1}$.

На потпуно сличан начин, може се доказати да из релације $BA = I$, следи да матрица A поседује одговарајућу инверзну матрицу A^{-1}, и да је $B = A^{-1}$.

5. Ранг матрице

Нека је $A = [a_{ij}]$ матрица типа $m \times n$. Колоне $K_1, \ldots, K_n$ матрице A можемо схватити као векторе простора R^m, а врсте матрице $V_1, \ldots, V_m$ као векторе простора R^n. Стога можемо да говоримо о линеарној комбинацији, зависности и независности вектора врста (или колона) матрице A. Посебно можемо да посматрамо два потпростора

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{L}\{K_1, \ldots, K_n\} \subseteq R^m, \quad \mathcal{R}^*(A) = \mathcal{L}\{V_1, \ldots, V_m\} \subseteq R^n,$$

при чему је први потпростор генерисан колонама $K_1, \ldots, K_n$ матрице A, а други $V_1, \ldots, V_m$ врстама матрице A.

Бројеви $r(K) = \dim(\mathcal{R}(A))$ и $r(V) = \dim(\mathcal{R}^*(A))$ називају се респективно *рангом простора колона*, и *рангом простора врста* матрице A. Број

$r(K)$ једнак је броју линеарно независних колона матрице A, а број $r(V)$ броју линеарно независних врста ове матрице. Очигледно је $r(K) \leq n$ и $r(V) \leq m$.

Једна од основних теорема тврди да су два горња броја међусобно једнака.

ТЕОРЕМА 2. (О рангу матрице). *Број линеарно независних врста матрице A једнак је броју линеарно независних колона те матрице, тј. важи једнакост*

$$r(V) = r(K).$$

Овај број се назива рангом матрице A, и означава се са $r(A)$.

Дакле, на основу дефиниције, важи једнакост $r(A) = r(V) = r(K)$.

На основу Теореме 2, непосредно се види да матрице A и $A^\top$ имају исти ранг. Такође, ранг матрице очигледно задовољава и неједнакости

$$0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Притом је $r(A) = 0$ ако и само ако је матрица $A = O$ (типа $m \times n$).

Код практичног израчунавања ранга матрице, веома често се користи појам елементарне трансформације над матрицом.

Под *елементарним трансформацијама над датом матрицом*, подразумевамо следеће трансформације:

(а) Множење једне врсте (или једне колоне) матрице неким скаларом $\lambda \neq 0$;

(б) Додавање једној врсти (или једној колони) матрице, неке друге врсте (или неке друге колоне), претходно помножене неким бројем.

За две матрице A и B типа $m \times n$ кажемо да су *еквивалентне*, ако се једна од њих добија од друге помоћу коначно много елементарних трансформација. Тада пишемо $A \sim B$.

ТЕОРЕМА 3. *Еквивалентне матрице имају исти ранг.*

Према томе, елементарне трансформације над матрицама не мењају ранг матрице. За израчунавање ранга матрице, најчешће се користи метод свођења матрице на тзв. *канонички облик.* Нагласимо да овај облик није јединствен.

Претпоставимо да је матрица A типа $m \times n$. Кажемо да је матрица B типа $m \times n$ *канонички облик* матрице A ако су матрице A и B еквивалентне, и матрица B састоји се само од нула и јединица, при чему се све јединице матрице B налазе у различитим врстама и различитим колонама те матрице.

Пример 17. Имамо следеће:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Према томе, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ је један канонички облик матрице A.

Интуитивно је јасно да се применом коначно много елементарних трансформација, свака реална правоугаона матрица A може свести бар на један начин на канонички облик. Описаћемо један такав поступак.

Уочимо матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и њену прву врсту или прву колону.

Најједноставнији случај је случај када су сви елементи прве врсте и прве колоне једнаки нули, дакле

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

када настављамо рад са њеном подматрицом $[a_{ij}]_{i,j \geq 2}$.

Претпоставимо даље да нису сви елементи прве врсте (или прве колоне) једнаки нули, и нека је на пример $a_{11} \neq 0$. Тада је она очигледно еквивалентна са извесном матрицом $[\tilde{a}_{ij}]$ истог реда у којој је $\tilde{a}_{11} = 1$. Даље, вршењем $(m-1)+(n-1)$ елементарних трансформација, можемо постићи да сви преостали елементи у првој врсти и првој колони буду једнаки нули, па је

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Настављајући сада овај поступак за одговарајућу подматрицу типа $(m-1) \times (n-1)$, добијамо жељени резултат.

На основу Теореме 3 непосредно следи

СТАВ 17. *Ранг $r(A)$ правоугаоне матрице A типа $m \times n$ једнак је броју јединица у било ком каноничком облику те матрице.*

Наиме, лако се може видети да су све врсте (или колоне) каноничког облика B матрице A, у којима се налазе јединице линеарно независне, а све остале врсте (колоне) једнаке нули, одакле добијамо тврђење.

Према томе, да би одредили ранг матрице A, довољно је одредити било који канонички облик те матрице, и пребројати јединице.

Тако је у Примеру 17 испуњено $r(A) = 2$.

Наводимо још један фундаменталан став о рангу квадратне матрице.

ТЕОРЕМА 4. *Квадратна матрица A реда n је регуларна, тј. важи* $\det(A) \neq 0$, *ако и само ако је њен ранг $r(A) = n$.*

Из Теореме 4 непосредно добијамо следећи став.

ПОСЛЕДИЦА 1. *Квадратна матрица A реда n је регуларна ако и само ако су све њене врсте (односно све њене колоне) линеарно независне.*

Пример 18. (а) Како је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

биће $r(A) = 1$.

(б) За матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имамо да је

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & -6 \\ 6 & 13 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -6 \\ 0 & 13 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

па је $r(A) = 2$, дакле $\det(A) = 0$.

(ц) За матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

биће $r(A) = 3$, па је $\det(A) \neq 0$.

6. Системи линеарних једначина

Претпоставимо да су дати вектори

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

векторског простора R^m ($A_1, \ldots, A_n \neq O$). Желимо да испитамо да ли је вектор B линеарна комбинација вектора $A_1, \ldots, A_n$, тј. да ли постоје скалари $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ такви да је

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = B\,. \tag{3}$$

Једнакост (3) своди се на задатак да се одреде скалари $x_1, \ldots, x_n \in R$ такви да је

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{4}$$

Стога се растављање вектора B у линеарну комбинацију вектора $A_1, \ldots, A_n$ своди на проблем решавања система линеарних једначина (4).

Такође важи и обрнуто, тј. решавање система (4) своди се на растављање вектора B по векторима $A_1, \ldots, A_n$.

Матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

мазивају се *матрицом система* и *проширеном матрицом система* (4).

Систем (4) очигледно можемо написати у матричном облику

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{5}$$

тј. у облику $AX = B$, где је $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.

Пример 19. (а) Систем линеарних једначина

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

нема ниједно решење, па се назива немогућим.

(б) Систем линеарних једначина

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

има једно јединствено решење $x_1 = 3, x_2 = 1$.

(ц) Систем линеарних једначина

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

има бесконачно много решења, тј. има решење у параметарском облику

$$x_1 = 1 - \lambda \quad , \quad x_2 = \lambda ,$$

при чему је $\lambda \in R$ произвољан скалар.

Следећа теорема је једна од најважнијих теорема које се односе на решавање система линеарних једначина.

ТЕОРЕМА 5. (а) *Систем једначина* (4) *је могућ тј. има бар једно решење, ако и само ако матрица система* A *и проширена матрица* $\tilde{A}$ *имају исти ранг* (**Кронекер–Капелијева теорема**).

(б) *Претпоставимо да је систем једначина* (4) *могућ, и нека је* r *заједнички ранг матрица* A *и* $\tilde{A}$. *Тада је систем* (4) *еквивалентан подсистему који се из система* (4) *добија узимањем било којих* r *линеарно независних једначина, тј. једначина чији коефицијенти у матрици* A *образују* r *линеарно независних врста.*

(ц) *Ако систем* (4) *има исти број једначина и непознатих, тј. ако је* $m = n$, *тада он има јединствено решење ако и само ако је матрица* A *тог система регуларна.*

(д) *Ако је* $m < n$ *и систем има бар једно решење, тада он има и бесконачно много решења.*

Уочимо посебно било који *квадратни систем* линеарних једначина, са n једначина и n непознатих $x_1, \ldots, x_n$:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n
\end{cases}
\tag{6}
$$

и претпоставимо да је он *регуларан*, тј. $\det(A) \neq 0$. На основу Теореме 5 (ц), овакав систем увек има једно јединствено решење $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. Ово решење може се представити формулама:

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{7}
$$

при чему је $D = \det(A)$, и за $j = 1, \ldots, n$:

$$
D_j = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

Горње формуле називају се *Крамеровим правилима* за посматрани систем линеарних једначина. Њихова важност огледа се и у томе што се произвољан систем линеарних једначина било ког типа $m \times n$, може свести на квадратни регуларни систем типа $r \times r$ (где је $r = r(A)$), а затим се тај систем може решити применом Крамерових правила.

У претходном ставу видели смо да квадратни систем линеарних једначина са особином регуларности увек има једно јединствено решење. Следећи став изражава једну важну општу особину система једначина (4) који нису квадратни или нису регуларни.

СТАВ 18. *Ако систем линеарних једначина* (4) *има два различита решења, тада он има и бесконачно много решења.*

Одавде следи да скуп решења система једначина (4) у општем случају може бити *празан, једночлан или бесконачан.*

Даље напоменимо да се систем једначина (4) назива *хомогеним* ако је $B = O$, тј. $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, и *нехомогеним* у супротном случају.

Претпоставимо да је систем (4) хомоген и означимо са

$$E_0 = \{X \in R^n \,\big|\, AX = O\}$$

скуп свих његових решења. Очигледно је вектор $X = 0$ (тј. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$) једно решење система (4), и оно се назива његовим *тривијалним решењем.* Било које друго решење $Y \in E_0$ ($Y \neq 0$) назива се *нетривијалним решењем* овог система.

Тада се лако може видети да важи следећи став.

СТАВ 19. *Скуп решења E_0 хомогеног система* (4) *је потпростор простора R^n.*

Даље уочимо произвољан систем (4) (хомоген или нехомоген). У матричном облику он дакле гласи:

$$AX = B\,. \tag{8}$$

Поред тога, уочимо и одговарајући хомогени систем

$$AX = O\,. \tag{9}$$

Означимо са E_0 скуп свих решења хомогеног система (9), и са E скуп свих решења нехомогеног система (8). Као што смо видели у Ставу

19, скуп E_0 представља потпростор простора R^n. Веза између скупова E_0 и E дата је следећом теоремом.

ТЕОРЕМА 6. (а) *Ако је нехомогени систем* (8) *могућ, и* X_0 *је било које партикуларно решење система* (8), *тада важи једнакост*

$$E = X_0 + E_0 = \{X_0 + Y \,\big|\, Y \in E_0\}. \tag{10}$$

(б) *Ако хомогени систем* (9) *има исти број једначина и непознатих (тј. важи* $m = n$*), тада одговарајући систем има само тривијално решење ако и само ако је матрица тог система регуларна.*

Сада ћемо навести један практичан поступак за решавање општег система (4) типа $m \times n$.

(1^0) Свести матрицу A система на било који канонички облик;

(2^0) Вршећи исте елементарне трансформације над проширеном матрицом система, свести проширену матрицу A на канонички облик.

Из ова два поступка, види се да ли је задовољен услов $r(A) = r(\tilde{A})$ Кронекер–Капелијевог става, као и важан положај јединица у каноничком облику матрице A, који мора бити потпуно исти као и код матрице $\tilde{A}$, док су сви елементи последње $(n+1)$–ве колоне матрице $\tilde{A}$ једнаки нули.

Претпоставимо да је систем могућ, тј. $r(A) = r(\tilde{A}) = r$ $(1 \leq r \leq m, n)$. Тада треба:

(3^0) Уочити само оне једначине посматраног система које одговарају врстама у којима се налазе јединице у каноничком облику матрице A. Остале једначине ће тада бити њихове алгебарске последице, тј. линеарне комбинације претходних једначина.

(4^0) На крају, уочити оне непознате посматраног система, које одговарају колонама у којима се налазе јединице, а све остале непознате узети за слободне параметре.

Тада је детерминанта тако добијеног квадратног система од r једначина са r непознатих, различита од нуле, и решење тако добијеног система добија се онда у параметарском облику, применом Крамерових правила.

На пример, ако се све јединице у каноничком облику матрице A налазе у првих r врста и првих r колона, тада је посматрани систем еквивалентан са подсистемом

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r & = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r & = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r & = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{array}\right. . \tag{11}$$

Ако уведемо слободне параметре $x_{r+1} = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_{n-r} \in R$, применом Крамерових правила, решење система (11) добија се у облику:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1 & = & c_1 + & \lambda_1\alpha_{11} + & \lambda_2\alpha_{12} + & \cdots + & \lambda_{n-r}\alpha_{1,n-r} \\ x_2 & = & c_2 + & \lambda_1\alpha_{21} + & \lambda_2\alpha_{22} + & \cdots + & \lambda_{n-r}\alpha_{2,n-r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & = & c_r + & \lambda_1\alpha_{r1} + & \lambda_2\alpha_{r2} + & \cdots + & \lambda_{n-r}\alpha_{r,n-r} \\ x_{r+1} & = & & \lambda_1 & & & \\ x_{r+2} & = & & & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ x_n & = & & & & & \lambda_{n-r} \end{array}\right. . \tag{12}$$

У векторском облику, ово решење се може приказати са

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_{n-r}V_{n-r}\,, \quad \text{тј.} \\ X &= X_0 + \mathcal{L}\{V_1, \ldots, V_{n-r}\}\,, \end{aligned}$$

при чему је

$$\left\{\begin{array}{l} X = (x_1, \ldots, x_n)^\top \quad , \quad X_0 = (c_1, \ldots, c_r, 0, 0, \ldots, 0)^\top\,, \\ V_i = [\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ri}, \underbrace{0, 0, \ldots, 1,}_{i} 0, 0, \ldots, 0]^\top \qquad (i = 1, \ldots, n-r) \\ \lambda_1, \ldots \lambda_{n-r} \in R\,. \end{array}\right.$$

Пример 20. Решимо систем линеарних једначина

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{13}$$

Један канонички облик матрице система гласиће:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

па је $r(A) = 2$. За одговарајућу проширену матрицу $\tilde{A}$ тог система одговарајући канонички облик биће:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

па је $r(\tilde{A}) = r(A) = 2$. Стога је систем (13) могућ, тј. има бар једно решење.

На основу претходно реченог, систем (13) своди се само на прву и трећу једначину, тј. еквивалентан је подсистему

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{cases}.$$

Сада ћемо уочити непознате x_1 и x_2 (јер се јединице налазе у првој и у другој колони). Узимајући да је $x_3 = \lambda$ слободан параметар, добијамо систем

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 - 2\lambda \\ & & x_2 & = & -1 + \lambda \end{cases}.$$

Одавде следи да је опште решење система (13) дато са

$$x_1 = 2 - 3\lambda, \quad x_2 = -1 + \lambda, \quad x_3 = \lambda \qquad (\lambda \in R).$$

Поглавље 3

ЕУКЛИДСКИ ПРОСТОР

1. Скаларни производ вектора

Напоменимо да ћемо у овом поглављу посматрати углавном тродимензионални простор R^3, као посебан случај Еуклидског простора R^n. Међутим, практично све дефиниције и сви резултати лако се могу пренети и на случај општег Еуклидског простора R^n, где је n произвољан природан број. Посебно то онда важи и за случај простора R^2. Простор R^3 ћемо обично звати тродимензионалним простором, а простор R^2 Еуклидском равни.

Појам растојања између тачака у простору R^3, дужине вектора и појам угла између два вектора простора R^3 базирају се на појму *скаларног производа.*

Дефиниција 1. Под скаларним производом вектора $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$ у простору R^3 подразумевамо реалан број

$$\langle A, B\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,. \tag{1}$$

За скаларни производ $\langle A, B\rangle$ некада се користи и ознака $A \cdot B$.

Скаларни производ вектора у простору R^3 очигледно представља реалну функцију дефинисану на Декартовом производу $R^3 \times R^3$.

У следећем ставу наведене су основне особине скаларног производа у простору R^3.

СТАВ 1. *За произвољне векторе $A, B, C \in R^3$ и реалне бројеве α, β важе следеће релације :*

(1^0) $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$;

(2^0) $\langle A, A\rangle \geq 0$ *и* $\langle A, A\rangle = 0$ *ако и само ако је* $A = O$;

(3^0) $\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = \alpha\langle A, C\rangle + \beta\langle B, C\rangle$;

(4^0) $\langle A, \alpha B + \beta C\rangle = \alpha\langle A, B\rangle + \beta\langle A, C\rangle$.

Све ове особине доказују се непосредно применом релације (1). Особина (1^0) назива се комутативношћу скаларног производа, особина (2^0) позитивном дефинитношћу, а особине (3^0) и 4^0 линеарношћу по првом и линеарнишћу по другом аргументу, респективно, тј. билинеарношћу скаларног производа вектора.

Из дефиниције скаларног производа (1) непосредно следи и да је за произвољни вектор $V \in R^n$ испуњено $\langle V, O\rangle = \langle O, V\rangle = 0$. Ненегативан број $A^2 = \langle A, A\rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ назива се *скаларним квадратом* вектора A.

Дефиниција 2. Под 3–*димензионалном реалним Еуклидским простором* R^3 подразумевамо 3–димензионални реални векторски простор R^3 снабдевен скаларним производом (1).

Дефиниција 3. За произвољан вектор $A \in R^3$ ненегативан број

$$|A| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$$

назива се *дужином* или *интензитетом* вектора A. Очигледно је $|A| \geq 0$ и $|A| = 0$ ако и само ако је $A = 0$.

Ако је вектор $A = (a_1, a_2, a_3)$, тада је

$$\langle A, A\rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2\,,$$

одакле је

$$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}\,.$$

Непосредно на основу дефиниције дужине вектора, може се установити да дужина вектора поседује следећу особину.

СТАВ 2. *За сваки вектор* $A \in R^3$ *и произвољан реалан број* λ *испуњено је*

$$|\lambda A| = |\lambda|\,|A|\,.$$

Уочимо даље стандардну базу $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ простора R^3. Тада је очигледно

$$|\overrightarrow{i}| = |\overrightarrow{j}| = |\overrightarrow{k}| = 1\,.$$

Како сваки вектор $A \in R^3$ чија је дужина једнака 1 називамо *јединичним вектором*, можемо да кажемо да су вектори $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{k}$ јединични вектори.

Следећа особина назива се *неједнакошћу Коши–Шварц–Буњаковског.*

СТАВ 3. *За произвољне векторе $A, B \in R^3$ испуњено је*

$$|\langle A, B\rangle| \le |A|\,|B|\,. \tag{2}$$

Доказ. Ако је вектор $B = O$, тада је очигледно десна страна горње релације једнака нули, а није тешко видети да је и лева страна једнака нули. Важи наиме $\langle A, O\rangle = 0$, за произвољан вектор $A \in R^3$.

Сада претпоставимо да је $B \neq O$. Приметимо да је за произвољан реалан број λ испуњено

$$|A + \lambda B|^2 \ge 0\,.$$

Како је $|B| \neq 0$ и

$$\begin{aligned}|A+\lambda B|^2 &= \langle A+\lambda B, A+\lambda B\rangle = \langle B, B\rangle\,\lambda^2 + 2\langle A, B\rangle\,\lambda + \langle A, A\rangle = \\ &= |B|^2\lambda^2 + 2\,\langle A, B\rangle\lambda + |A|^2 \ge 0\end{aligned}$$

за произвољан реалан број λ, следи да је дискриминанта горњег квадратног израза по λ, $D \le 0$. Стога је

$$D = (2\,\langle A, B\rangle)^2 - 4|A|^2\,|B|^2 \le 0,$$

одакле је $|\langle A, B\rangle| \le |A|\,|B|$.

Према томе, неједнакост (2) важи за произвољне векторе $A, B \in R^3$. $\square$

Такође се може непосредно видети да у релацији (2) важи знак једнакости ако је бар један од вектора A, B једнак нули. Ако су вектори $A, B \neq 0$, показује се да у неједнакости (2) важи знак једнакости ако и само ако су вектори A и B колинеарни, односно важи $A = rB$ за неко $r \neq 0$. Притом је $\langle A, B\rangle = |A|\,|B|$ за $r > 0$ и $\langle A, B\rangle = -|A|\,|B|$ за $r < 0$.

Применом неједнакости (2) доказује се да за произвољна два вектора $A, B \in R^3$ важи тзв. *неједнакост троугла*

$$(3) \qquad |A + B| \leq |A| + |B|\,.$$

Једнакост у овој неједнакости важи ако и само ако је $A = O$ или $B = O$ или $A = rB$ за неко $r > 0$.

Даље се коришћењем интензитета вектора дефинише растојање произвољне две тачке A и B у простору R^3.

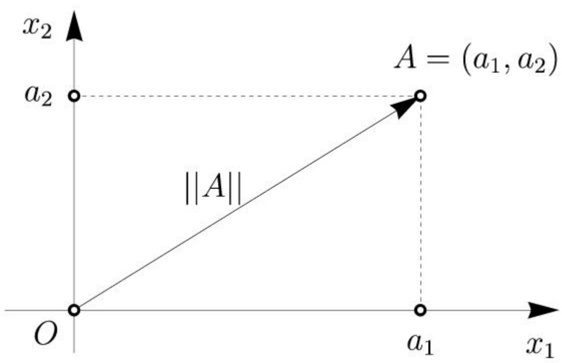
Дефиниција 4. За произвољне тачке $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ израз

$$AB = \mathrm{d}\,(A, B) = |B - A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(a_i - b_i)^2}$$

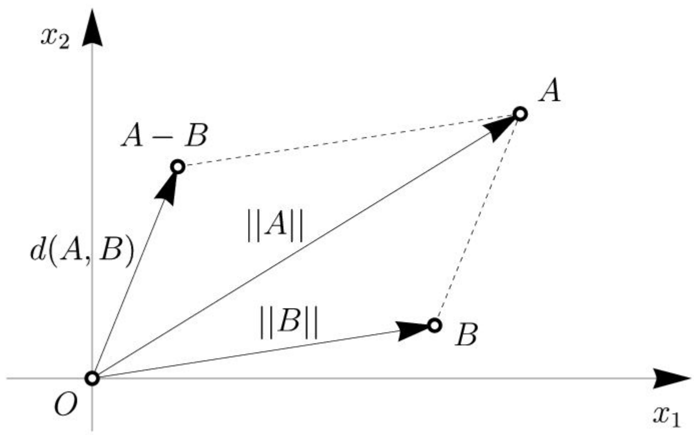
назива се *растојањем* између тачака A и B. Посебно је $OA = \mathrm{d}\,(O, A) = |A| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3} a_i^2}$ дужина вектора $\overrightarrow{OA}$.

Напоменимо да све напред наведене дефиниције и особине представљају уопштења добро познатих особина вектора из Еуклидске равни R^2.

Подсетимо се сада, кратко, дужине вектора и појма растојања у равни R^2.



Слика 3.1



Слика 3.2

Показује се да растојање тачака у простору R^3 има следеће особине.

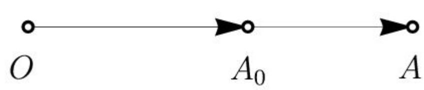
(1^0) $\mathrm{d}(A, B) \geq 0$ и $\mathrm{d}(A, B) = 0$ ако и само ако је $A = B$;

(2^0) $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$;

(3^0) $\mathrm{d}(A, B) \leq \mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, B)$, за произвољне тачке $A, B, C \in R^3$.

Напоменимо да се свака функција $\mathrm{d}\colon R^3 \times R^3 \to R$ која има особине (1^0), (2^0) и (3^0) назива *метриком* на простору R^3. Она у општем случају није једнозначно одређена. Стога је претходно дефинисано Еуклидско растојање једна метрика на простору R^3.

Ако је даље $A \neq O$ произвољан ненула вектор простора R^3, тада се може лако видети да је вектор $A_0 = \dfrac{1}{|A|} A$ јединичан и колинеаран са вектором A.



Slika 3.3

Заиста, тада је $\alpha = |A| > 0$, одакле је

$$|A_0| = \frac{1}{\alpha}\,|A| = \frac{|A|}{|A|} = 1.$$

Тада је вектор A потпуно одређен вектором $A_0 = \dfrac{1}{|A|}\,A$ и интензитетом $|A|$, јер очигледно важи једнакост $A = |A|\,A_0$.

Дефиниција 5. За произвољан вектор $A \in R^3$ $(A \neq O)$ вектор $A_0 = \dfrac{1}{|A|}\,A = \dfrac{A}{|A|}$ назива се *јединичним вектором* (или кратко ортом) вектора A.

Скуп свих јединичних вектора простора R^3 назива се *јединичном сфером* простора R^3 и означава се са S_3. Дакле

$$S_3 = \left\{A \in R^3 \,\middle|\, |A| = 1\right\}.$$

Скуп S_3 је очигледно непразан и садржи све ортове простора R^3. Он уопштава појмове јединичног круга у равни R^2. Притом тачка O (центар ове сфере) не припада скупу S_3.

Уопште, за произвољну тачку $P \in R^3$ и $r > 0$, може се дефинисати сфера са центром у тачки P полупречника r, на следећи начин:

$$S(P; r) = \{A \in R^3 \,|\, \mathrm{d}(P, A) = |A - P| = r\}.$$

2. Угао између вектора

Уочимо било која два ненула вектора $A, B \in R^3$. Тада из неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског, следи неједнакост

$$-1 \leq \frac{\langle A, B\rangle}{|A|\,|B|} \leq 1\,.$$

Одавде следи да постоји један јединствени угао $\theta \in [0, \pi]$ такав да је

$$\cos\theta = \frac{\langle A, B\rangle}{|A|\,|B|}\,. \tag{4}$$

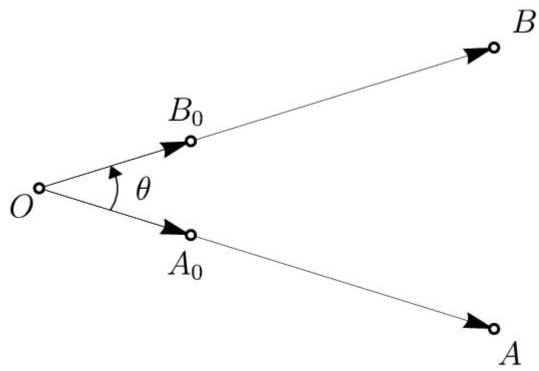
Ако означимо $A_0 = \dfrac{A}{|A|}$, $B_0 = \dfrac{W}{|B|}$, угао θ је одређен условом

$$\cos\theta = \langle A_0, B_0 \rangle,$$

односно

$$\theta = \arccos\left(\langle A_0, B_0\rangle\right). \tag{5}$$

Дефиниција 6. Угао θ $(0 \le \theta \le \pi)$ одређен релацијом (5) назива се углом између вектора A и B. Он се често обележава и са $\theta = \measuredangle(A, B)$.



Slika 3.4

Ако је $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$, тада релацију (4) можемо написати у облику

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,. \tag{6}$$

Формула (6) се најчешће користи код практичног израчунавања угла између вектора A и B.

Нека је даље $A = (a_1, a_2, a_3)$ било који вектор простора R^3. Знамо да је

$$A = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{j}\,.$$

Одавде непосредно налазимо да је

$$\begin{aligned}
\langle A, \overrightarrow{i}\rangle &= \langle a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}\rangle = a_1,\\
\langle A, \overrightarrow{j}\rangle &= \langle a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}\rangle = a_2,\\
\langle A, \overrightarrow{i}\rangle &= \langle a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}\rangle = a_3,
\end{aligned}$$

Према томе добијамо једнакост

$$A = \langle A, \overrightarrow{i} \rangle \overrightarrow{i} + \langle A, \overrightarrow{j} \rangle \overrightarrow{j} + \langle A, \overrightarrow{k} \rangle \overrightarrow{k}.$$

Претпоставимо даље да је вектор A јединични, тј. важи $|A| = 1$, и означимо са $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ углове које тај вектор гради редом са векторима $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$. Како су вектори A, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ јединични, непосредно налазимо да је

$$\cos\alpha_1 = \langle A, \overrightarrow{i} \rangle, \quad \cos\alpha_2 = \langle A, \overrightarrow{j} \rangle, \quad \cos\alpha_3 = \langle A, \overrightarrow{k} \rangle.$$

Дакле добијамо да је $a_i = \cos\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$, тј.

$$\begin{aligned} A = (a_1, a_2, a_3) &= (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3) = \\ &= (\cos\alpha_1)\overrightarrow{i} + (\cos\alpha_2)\overrightarrow{j} + (\cos\alpha_3)\overrightarrow{k}. \end{aligned}$$

Нека је даље $A \neq O$ произвољан вектор простора R^3 и $A_0 = \dfrac{A}{|A|}$ одговарајући орт. Ако је $A_0 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$, тада су углови α_i одређени релацијама

$$\cos\alpha_1 = \langle A_0, \overrightarrow{i} \rangle, \quad \cos\alpha_2 = \langle A_0, \overrightarrow{j} \rangle, \quad \cos\alpha_3 = \langle A_0, \overrightarrow{k} \rangle.$$

Углови α_i и бројеви $a_i = \cos\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$ називају се респективно *угловима правца* и *косинусима правца* вектора A.

Претпоставимо да су A и B произвољни ненула вектори простора R^3 и

$$A_0 = \frac{A}{|A|} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3), \quad B_0 = \frac{B}{|B|} = (\cos\beta_1, \cos\beta_2, \cos\beta_3)$$

одговарајући ортови. Тада је угао $\theta = \measuredangle(A, B)$ одређен релацијом

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3 .$$

Сада ћемо дефинисати појам ортогоналности два вектора простора R^3.

Дефиниција 7. Вектори $A, B \neq O$ простора R^3 називају се *ортогоналним* (или нормалним), и тада пишемо $A \perp B$ уколико је $\langle A, B \rangle = 0$.

Непосредном применом горње дефиниције може се доказати следећи став.

СТАВ 4. *Нека су $A, B \neq O$ произвољни вектори простора R^3. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1^0) *Вектори A и B су ортогонални;*

(2^0) *Вектори B и A су ортогонални;*

(3^0) *Вектори $A_0 = \dfrac{A}{|A|}$ и $B_0 = \dfrac{B}{|B|}$ су ортогонални;*

(4^0) *Угао $\theta = \measuredangle(A, B) = \dfrac{\pi}{2}$.*

СТАВ 5. *Нека су $A, B \neq O$ произвољни вектори простора R^3 и $\theta = \measuredangle(A, B)$. Тада је $\theta = 0$ ако и само ако је $A = rB$ за неко $r > 0$, и $\theta = \pi$ ако и само ако је $A = rB$ за неко $r < 0$.*

Условно, за произвољна два вектора $A, B \in R^3$ кажемо да су ортогонални уколико је $\langle A, B\rangle = 0$. Дакле дозвољавамо и да неки од вектора A, B буде и једнак нули. Раније смо видели да је $\langle O, A\rangle = 0$ за произвољан вектор $A \in R^3$, па је нула вектор ортогоналан на свим векторима простора R^3.

СТАВ 6. *Вектор A простора R^3 је ортогоналан на свим векторима тог простора ако и само ако је $A = O$.*

Доказ. Вектор 0 простора R^3 ортогоналан на свим векторима тог простора, јер је $\langle O, A\rangle = 0$ $(A \in R^3)$.

Обрнуто, претпоставимо да је $\langle A, B\rangle = 0$ за произвољан вектор $B \in R^3$. Тада посебно можемо узети да је $B = A$, па је $\langle A, A\rangle = 0$. То значи да је $|A| = 0$, тј. $A = O$. $\square$

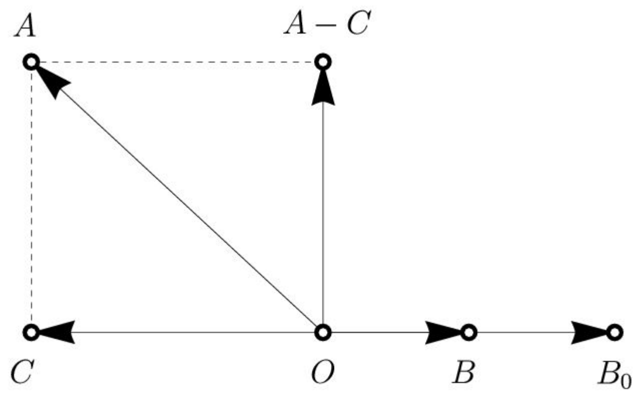
Уочимо даље два произвољна вектора $A \neq 0$ и $B \neq 0$ простора R^3. Показаћемо да увек постоји вектор C колинеаран са вектором B такав да је вектор $A - C$ ортогоналан на вектору B. Тада се вектор C назива *пројекцијом вектора A на вектор B* и означава са $\mathrm{pr}\,(A)\Big|_B$ (слика 3.5).

Како је вектор C на основу претпоставке колинеаран са вектором B, тражимо га у облику $C = \lambda B$ за неко реално λ. Из услова ортогоналности вектора $A - C$ и B, добијамо да је

$$\langle A - C, B\rangle = \langle A - \lambda B, B\rangle = \langle A, B\rangle - \lambda |B|^2 = 0.$$

Одавде непосредно добијамо да је $\lambda = (\langle A, B\rangle)/|B|^2$, па је

$$C = \mathrm{pr}\,(A)\Big|_B = \frac{\langle A, B\rangle}{|B|^2}\,B.$$



Слика 3.5

Осим тога, очигледно се овај вектор може написати у облику

$$C = \langle A, B_0\rangle\, B_0,$$

при чему је $B_0 = B/|B|$ одговарајући јединични вектор вектора B.

Ако је посебно вектор A ортогоналан на вектору B, тада је $\langle A, B\rangle = 0$, па се одговарајући вектор ортогоналне пројекције вектора A на вектор B своди на нула вектор.

Даље уочимо произвољан вектор $A = (a_1, a_2, a_3)$ простора R^3 и векторе стандардне базе $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$. Ако са A_x, A_y, A_z означимо редом пројекције вектора A на векторе $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, тада непосредно добијамо да је

$$A_x = \langle A, \overrightarrow{i}\rangle\,\overrightarrow{i} = x\,\overrightarrow{i}, \quad A_y = y\,\overrightarrow{j}, \quad A_z = z\,\overrightarrow{k},$$

одакле је

$$A = \langle A, \overrightarrow{i}\rangle\,\overrightarrow{i} + \langle A, \overrightarrow{j}\rangle\,\overrightarrow{j} + \langle A, \overrightarrow{k}\rangle\,\overrightarrow{k} = A_x + A_y + A_k.$$

3. Векторски производ вектора

Уочимо Еуклидски простор R^3 и стандардну базу $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ тог простора. Ако су $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$ два произвољна вектора простора R^3, тада се вектор

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k} \tag{7}$$

назива *векторски производом* вектора A и B. Овај вектор очигледно се може представити у облику симболичке детерминанте

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k},$$

при чему се подразумава да се она развија по елементима прве врсте, односно по векторима $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$.

Наведимо неке од основних особина векторског производа, које се непосредно могу доказати полазећи од његове дефиниције.

СТАВ 7. (а) *За произвољан вектор A важе једнакости*

$$0 \times A = A \times 0 = 0, \quad A \times A = 0.$$

(б) *За произвољна два вектора A и B важи*

$$A \times B = -B \times A.$$

(ц) *Ако су A и B колинеарни вектори простора R^3, тада је $A \times B = 0$.*

(д) *Вектор $A \times B$ је ортогоналан на оба вектора A и B.*

(е) *Векторски производ $A \times B$ је једнак нули ако и само ако су вектори A и B линеарно зависни, тј. један од њих је једнак нули, или су они колинеарни.*

Из особине (а) непосредно следи да за векторе стандардне базе $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ важи $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = 0$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = 0$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = 0$. Осим тога, на основу дефиниције, непосредно се доказује да важи $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$, затим $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}$ итд.

Осим тога, лако се може доказати да за произвољне векторе A, B, C простора R^3 и произвољне реалне бројеве α, β важи:

$$(\alpha A + \beta B) \times C = \alpha(A \times C) + \beta(B \times C);$$
$$A \times (\alpha B + \beta C) = \alpha(A \times B) + \beta(A \times C).$$

СТАВ 8. *Ако су $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$ произвољни вектори простора R^3 и θ угао између тих вектора, тада важи једнакост*

$$|A \times B| = |A|\,|B|\,\sin\theta\,. \tag{8}$$

Доказ. На основу дефиниције имаћемо да је

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\overrightarrow{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\overrightarrow{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\overrightarrow{k}\,,$$

одакле је

$$|A \times B|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2\,.$$

Сада приметимо да израз на десној страни можемо да напишемо у облику

$$S = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^2 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2\,.$$

Одавде је очигледно

$$S = |A|^2\,|B|^2 - \langle A, B\rangle^2\,,$$

па важи једнакост

$$|A \times B|^2 = |A|^2\,|B|^2 - \langle A, B\rangle^2\,.$$

С друге стране, знамо да је на основу дефиниције угла θ испуњено

$$\langle A, B\rangle = |A|\,|B|\,\cos\theta\,.$$

Одавде је

$$\begin{aligned} |A \times B|^2 &= |A|^2\,|B|^2 - |A|^2\,|B|^2\cos^2\theta = |A|^2\,|B|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= |A|^2\,|B|^2\sin^2\theta\,. \end{aligned}$$

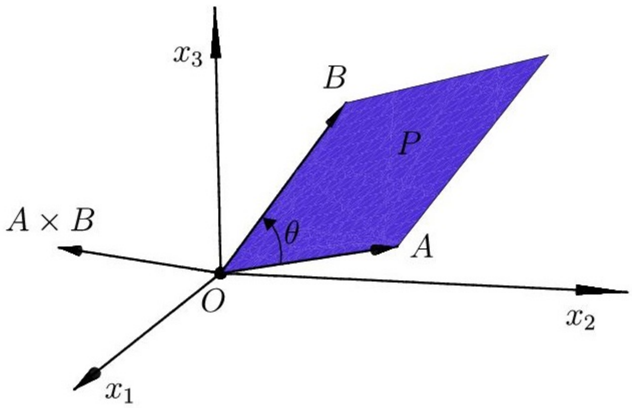
Како угао $\theta \in [0, \pi]$, имаћемо да је $\sin\theta \geq 0$, па из последње релације непосредно следи да је

$$|A \times B| = |A|\,|B| \sin\theta\,.$$

Тиме је тврђење доказано. $\square$

Напоменимо да за два произвољна вектора A, B простора R^3, израз $|A|\,|B|\sin\theta$ представља површину паралелограма конструисаног над тим векторима. Овај паралелограм дефинисан је као скуп свих тачака простора R^3 облика

$$P = \{\alpha A + \beta B : 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\}\,.$$



Слика 3.6

На основу претходног става може се рећи да је интензитет $|A \times B|$ вектора $A \times B$ једнак површини паралелограма конструисаног над векторима A и B. Ова особина онда непосредно објашњава и особине (а), (ц) и (е) векторског производа.

4. Мешовити производ вектора

Нека су $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ произвољни вектори простора R^3. Под *мешовитим производом вектора* A, B, C подразумевамо реалан број

$$[A, B, C] = \langle A \times B, C \rangle.$$

Како је

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k},$$

непосредно следи да је

$$[A, B, C] = \langle A \times B, C \rangle = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3,$$

односно

$$[A, B, C] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad .$$

Број $[A, B, C]$ у општем случају може бити позитиван, негативан, или једнак нули.

На пример, ако је $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ стандардна база простора R^3, тада је

$$[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако је неки од вектора A, B, C једнак нули, тада је мешовити производ $[A, B, C] = 0$. Ово непосредно следи из тога што је тада одговарајућа врста детерминанте којом се изражава овај мешовити производ једнака нули. Уопште, имамо следећи став.

СТАВ 9. *Мешовити производ $[A, B, C]$ вектора A, B, C једнак је нули ако и само ако су ти вектори линеарно зависни.*

Доказ непосредно следи из познате особине детерминанти према којој је детерминанта једнака нули ако и само ако су њене врсте линеарно зависне. На основу овог става следи да вектори A, B, C образују базу простора R^3 ако и само ако је њихов мешовити производ различит од нуле.

Поред тога, применом познатих особина детерминанти, непосредно добијамо следећи став.

СТАВ 10. *За произвољна три вектора A, B, C простора R^3 важе једнакости:*

(a) $[A, B, C] = [B, C, A] = [C, A, B]$.

(б) $[A, C, B] = [C, A, B] = [B, A, C] = -[A, B, C]$.

Напоменимо да се применом мешовитог производа може увести појам оријентације произвољне базе простора R^3. Ако су A, B, C три произвољна линеарно независна вектора A, B, C простора R^3, тада они представљају базу простора R^3. На основу једне од наведених особина мешовитог производа испуњено је $[A, B, C] \neq 0$. Ако је притом $[A, B, C] > 0$ кажемо да је база A, B, C *десне оријентације*, а ако је $[A, B, C] < 0$, кажемо да је она *леве оријентације*.

Тако је на основу дефиниције стандардна база $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ простора R^3 десне оријентације, а база $\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\}$ леве оријентације.

Посебно важна особина је да ако су A и B произвољни линеарно независни вектори простора R^3, тада вектори A, B, $A \times B$ образују систем десне оријентације. Заиста, тада је

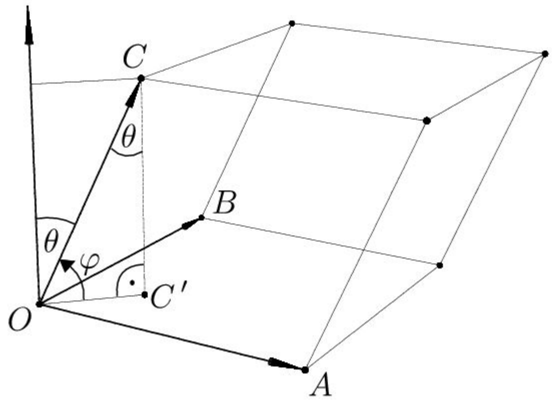
$$[A, B, A \times B] = \langle A \times B, A \times B \rangle = |A \times B|^2 \geq 0,$$

и како су вектори A и B линеарно независни, следи да је $A \times B \neq 0$. Одавде следи да је $[A, B, A \times B] > 0$, па наведени вектори заиста образују систем десне оријентације.

Осим тога, напоменимо да се детерминанта чије су врсте састављене од координата вектора A, B, C простора R^3 може схватити и као оријентисана мера запремине паралелопипеда генерисаног векторима A, B, C у простору R^3, тј. као оријентисана мера скупа

$$\Gamma(A, B, C) = \{\alpha A + \beta B + \gamma C : 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1\}.$$

На основу тога може се рећи да мешовити производ $[A, B, C]$ вектора A, B, C простора R^3, представља меру запремине паралелепипеда генерисаног векторима A, B, C. Посебно одавде добијамо и геометријску интерпретацију случаја када је $[A, B, C] = 0$. Тај случај наступа ако и само ако је тај паралелепипед дегенеративан, тј. вектори A, B, C су линеарно зависни, односно компланарни.



Slika 3.7

Поглавље 4

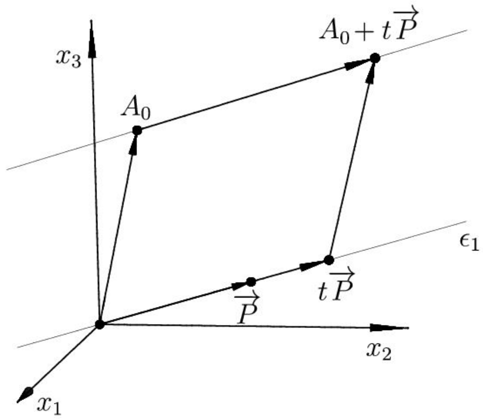
ПРАВЕ, РАВНИ И СФЕРЕ

1. Праве у простору R^3

1. **Једначина праве.** Уочимо најпре произвољну фиксирану тачку $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ простора R^3, и фиксирани вектор $\overrightarrow{P} = (p_1, p_2, p_3) \neq 0$ тог простора. Тада се скуп ℓ свих тачака $X = (x, y, z) \in R^3$ облика

$$X = A_0 + \mathcal{E}_1 = A_0 + \{t\overrightarrow{P} : t \in R\} \tag{1}$$

назива *правом у простору* R^3. Он се често симболично означава са $\ell = (A_0, \overrightarrow{P})$. Тачка A_0 очигледно припада посматраној правој јер се за $t = 0$ добија да је $X = A_0$. Вектор $\overrightarrow{P}$ назива се *вектором праве* ℓ, и он није једнозначно одређен самом правом, јер се уместо полазног вектора за вектор праве ℓ може узети и било који други вектор $\overrightarrow{P}_1 = \lambda\overrightarrow{P}$ $(\lambda \neq 0)$.



Слика 4.1

Како је $\mathcal{E}_1 = \{t\overrightarrow{P} : t \in R\}$, тада је очигледно $\mathcal{E}_1$ 1–димензионални потпростор простора R^3. Овај потпростор назива се *правцем* праве ℓ. Једначина праве се тада може написати и у облику:

$$\ell = A_0 + \mathcal{E}_1 = \{A_0 + Y : Y \in \mathcal{E}_1\}.$$

У координатном облику једначина праве гласи:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(p_1, p_2, p_3) \qquad (t \in R),$$

или

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tp_1, tp_2, tp_3),$$

односно:

$$x - x_0 = tp_1, \quad y - y_0 = tp_2, \quad z - z_0 = tp_3 \qquad (t \in R). \tag{2}$$

Једначине (2) називају се *параметарским једначинама праве.*

Једначине (2) се такође могу написати у тзв. *каноничком облику*

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}. \tag{3}$$

Овде треба напоменути да ако је неки од именилаца ових разломака једнак 0, тада је и одговарајући бројилац такође једнак нули.

2. **Угао између правих.** Уочимо даље две произвољне праве $\ell_1 = (A_1, \overrightarrow{P})$, $\ell_2 = (A_2, \overrightarrow{Q})$. Тада се угао између тих правих дефинише као оштар угао θ одређен формулом

$$\cos\theta = \frac{|\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q} \rangle|}{|\overrightarrow{P}|\,|\overrightarrow{Q}|}.$$

Лако се показује да овај угао не зависи од избора вектора праваца $\overrightarrow{P}$ и $\overrightarrow{Q}$ ових правих, односно да он остаје исти и ако уместо вектора $\overrightarrow{P}$ узмемо и било који други вектор облика $r\overrightarrow{P}$ $(r \neq 0)$, а уместо вектора $\overrightarrow{Q}$ било који други вектор облика $s\overrightarrow{Q}$ $(s \neq 0)$.

Како је на основу дефиниције $\cos\theta \geq 0$, следи да је угао $\theta \in [0, \pi/2]$, дакле овај угао је увек оштар.

Праве ℓ_1, ℓ_2 називају се *паралелним* ако су одговарајући вектори ℓ_1, ℓ_2 ових правих колинеарни, али је $\ell_1 \neq \ell_2$. Тада се показује да је угао између њих једнак 0, и да оне немају ни једну заједничку тачку.

У општем случају, праве ℓ_1, ℓ_2 могу да леже у истој равни или да се мимоилазе у простору. Може се лако видети да оне леже у једној равни (и тада се секу, паралелне су или се поклапају) ако и само ако су вектори $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}$ компланарни. Коришћењем мешовитог производа, овај услов се непосредно изражава са

$$D = [\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}] = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Ако се праве ℓ_1 и ℓ_2 мимоилазе, тада је израз $D = [\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}] \neq 0$. Ако тада са $d = d(\ell_1, \ell_2)$ означимо растојање између тих правих, тј. минималну вредност дужи AB при чему тачка $A \in \ell_1$ и тачка $B \in \ell_2$, тада није тешко доказати да је ово растојање дато формулом

$$d(\ell_1, \ell_2) = |D|/|\overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}|. \tag{5}$$

2. Равни у простору R^3

3. **Дефиниција равни.** Уочимо даље произвољан 2–димензионалан потпростор $\mathcal{E}_2$ у простору R^2 и тачку $A_0 \in R^3$. Тада се скуп

$$A_0 + \mathcal{E}_2 = \{A_0 + M : M \in \mathcal{E}_2\} \tag{6}$$

назива *2–димензионалном равни* или кратко *равни* у простору R^3. Он се понекад означава са $\mathcal{H} = (A_0, \mathcal{E}_2)$. Тачка A_0 очигледно припада овој равни. Потпростор $\mathcal{E}_2$ назива се кратко *правцем* или *директрисом* ове равни.

Ако је даље $\{U, V\}$ произвољна фиксирана база потпростора $\mathcal{E}_2$, тада је $\mathcal{E}_2 = \{\alpha U + \beta V : \alpha, \beta \in R\}$, одакле је

$$\mathcal{H} = \{A_0 + \alpha U + \beta V : \alpha, \beta \in R\}.$$

Ако је даље $A = (x_0, y_0, z_0)$, $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$, тада промењљиву тачку $X = (x, y, z)$ можемо представити у облику $X = A_0 + \alpha U + \beta V$, односно:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) = \\ &= (x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1, y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2, z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3) \qquad (\alpha, \beta \in R),\end{aligned}$$

односно:

$$x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1, \quad y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2, \quad z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \qquad (\alpha, \beta \in R). \tag{7}$$

Једначине (7) представљају *параметарске једначине равни* у простору R^3.

4. **Нормалан облик једначине равни.** Уочимо даље произвољну раван $\mathcal{H} = (A_0, \mathcal{E}_2)$ и вектор $N \neq 0$ који је ортогоналан на векторима U и

V. На пример, можемо да узмемо да је $N = U \times V$. Како су вектори U и V линеарно независни следи да је $N \neq 0$.

СТАВ 1. *Важи једнакост*

$$\mathcal{H} = \{X : \langle X - A_0, N \rangle = 0\}. \tag{8}$$

Доказ. Узмимо најпре било коју тачку $X \in \mathcal{H}$. Тада је $X = A_0 + \alpha U + \beta V$, одакле је

$$\langle X - A_0, N \rangle = \langle \alpha U + \beta V, N \rangle = \alpha \langle U, N \rangle + \beta \langle V, N \rangle = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Обрнуто, претпоставимо да је $\langle X - A_0, N \rangle = 0$. Како су вектори $U, V, N = U \times V$ линеарно независни, они образују базу простора R^3, па постоје скалари $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ такви да је

$$X - A_0 = \alpha_0 U + \beta_0 V + \gamma_0 N.$$

Одавде је

$$\begin{aligned} \langle X - A_0, N \rangle &= \langle \alpha_0 U + \beta_0 V + \gamma_0 N, N \rangle = \\ &= \alpha_0 \langle U, N \rangle + \beta_0 \langle V, N \rangle + \gamma_0 |N|^2 = \\ &= \alpha_0 \cdot 0 + \beta_0 \cdot 0 + \gamma_0 |N|^2 = 0. \end{aligned}$$

Како је $|N|^2 \neq 0$, одавде добијамо да је $\gamma_0 = 0$, па је $X - A_0 = \alpha_0 U + \beta_0 V$, дакле $X = A_0 + \alpha_0 U + \beta_0 V$. Стога тачка $X \in \mathcal{H}$. $\square$

На основу претходног става, за сваку раван $\mathcal{H}$ постоји известан вектор $N \neq 0$ такав да се једначина равни може написати у облику

$$\langle X - A_0, N \rangle = 0. \tag{9}$$

Вектор N назива се *вектором нормале* равни $\mathcal{H}$. Он није једнозначно одређен са равни $\mathcal{H}$ јер се уместо вектора N за вектор нормале може узети и било који други вектор rN $(r \neq 0)$. Ако је $N = (a, b, c)$ фиксирани вектор нормале равни $\mathcal{H}$, тада се једначина (9) те равни очигледно може написати у облику:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

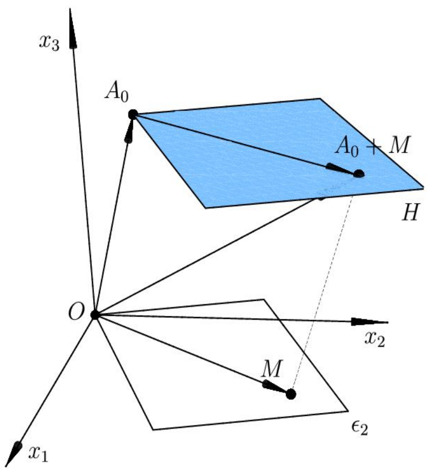
односно у облику:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0. \tag{10}$$

Дакле, ако знамо вектор нормале $N = (a, b, c)$ равни $\mathcal{H}$ и бар једну тачку $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ те равни, тада помоћу формуле (10) непосредно можемо да напишемо једначину те равни.

Осим тога, ако у једначини (10) ставимо $d = ax_0 + by_0 + cz_0$, тада ову једначину очигледно можемо да напишемо у облику

$$ax + by + cz = d. \tag{11}$$



Слика 4.2

Притом је очигледно $d = 0$ ако и само ако раван $\mathcal{H}$ пролази кроз координатни почетак, тј. тачку $O(0, 0, 0)$. Једначина (11) назива се *нормалним обликом* једначине равни.

Ако раван $\mathcal{H}$ пролази кроз координатни почетак, онда су очигледно њени одсечци на координатним осама једнаки 0. Напоменимо да се на пример одсечак на оси Ox добија тако што се у једначини (11) стави $y = z = 0$.

Ако раван $\mathcal{H}$ не пролази кроз координатни почетак, тада је $d \neq 0$, и лако се доказује да је одсечак на оси Ox једнак d/a ако је $a \neq 0$, и представља целу осу Ox ако је $a = 0$. Слично важи и за њене одсечке на координатним осама Oy и Oz.

3. Међусобни однос правих и равни

5. **Угао између праве и равни.** Уочимо даље произвољну праву $\ell = (A_0, \overrightarrow{P})$ и раван $\mathcal{H} = (B_0, \overrightarrow{N})$ у простору R^3. Тада се угао између праве ℓ и равни $\mathcal{H}$ дефинише са

$$\measuredangle(\ell, \mathcal{H}) = \omega = \pi/2 - \phi,$$

при чему је $\phi \in [0, \pi/2]$ угао између правих $\mathcal{L}\{\overrightarrow{P}\}$ и $\mathcal{L}\{\overrightarrow{N}\}$. Дакле, угао ϕ дефинисан је са

$$\cos\phi = \frac{|\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{N} \rangle|}{|\overrightarrow{P}|\,|\overrightarrow{N}|},$$

а угао ω са $\omega = \pi/2 - \phi$.

Ако је угао $\omega = 0$, тј. $\phi = \pi/2$, односно $\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{N} \rangle = 0$, тада права ℓ лежи у равни $\mathcal{H}$ или са њом нема ниједну заједничку тачку. У последњем случају, она се назива *паралелном* са равни $\mathcal{H}$.

Ако је угао $\omega > 0$, тада права ℓ сече раван $\mathcal{H}$ тачно у једној тачки. Посебно, ако је $\omega = \pi/2$, тј. $\phi = 0$, тада је права ℓ ортогонална на равни $\mathcal{H}$, и продире је тачно у једној тачки.

Стога у вези узајамног положаја праве ℓ и равни $\mathcal{H}$ могу да наступе следећи случајеви:

1. Права ℓ лежи у равни $\mathcal{H}$;
2. Права ℓ паралелна је са равни $\mathcal{H}$;
3. Права ℓ продире раван $\mathcal{H}$ у тачно једној тачки.

Практично одређивање *тачке продора* дате праве и дате равни врши се најчешће тако што се дата права напише у параметарском облику, и затим се њене координате изражене преко параметра $t \in R$ убаце у једначину равни. Ако се добија контрадикција по t, закључујемо да су дата права и дата раван паралелне, па немају заједничких тачака. Ако се добија идентичност по t, закључујемо да дата права лежи у посматраној равни. Ако се добије једна одређена вредност по t, закључујемо да дата права сече дату раван у тачно једној тачки.

6. **Угао између две равни.** Уочимо даље две произвољне равни $\mathcal{H}_1 = (A_1, \overrightarrow{N}_1)$, $\mathcal{H}_2 = (A_2, \overrightarrow{N}_2)$. Тада се угао између ових равни дефинише као угао између правих $\mathcal{L}\{\overrightarrow{N}_1\}$ и $\mathcal{L}\{\overrightarrow{N}_2\}$, дакле као угао ϕ одређен једнакошћу:

$$\cos\phi = \frac{|\langle \overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2 \rangle|}{|\overrightarrow{N}_1|\,|\overrightarrow{N}_2|}.$$

Како је $\cos\phi \geq 0$, следи да је овај угао увек оштар, односно да $\phi \in [0, \pi/2]$.

Ако је угао $\phi = 0$, тада се ове равни поклапају, или пак немају ниједну заједничку тачку. У последњем случају оне се називају *паралелним*.

Ако је угао $\phi > 0$, тада се ове равни увек секу по некој правој.

Ако је $\phi = \pi_2$, тада су ове две павни *ортогоналне*.

7. **Растојање тачке од дате равни.** Уочимо произвољну фиксирану тачку $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ простора R^3 и раван $\mathcal{H}$ чија је једначина:

$$ax + by + cz = d. \tag{12}$$

Желимо да одредимо растојање $d(A_0, \mathcal{H})$ тачке A_0 до равни $\mathcal{H}$ у општем случају, без обзира на то да ли тачка A_0 лежи у равни $\mathcal{H}$ или не. Показује се да је ово *одстојање једнако одстојању тачке A_0 до ортогоналне пројекције A' тачке A_0 на раван $\mathcal{H}$.* Стога ћемо најпре наћи координате тачке A'. Тачка A' добија се као пресек равни $\mathcal{H}$ и праве која је у тачки A_0 ортогонална на раван $\mathcal{H}$. Како се за вектор правца ове нормале може узети вектор нормале $\overrightarrow{N} = (a, b, c)$ равни $\mathcal{H}$, параметарске једначине ове праве биће:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t \qquad (t \in R),$$

односно:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct.$$

Заменом ових вредности у једначину равни добијамо једначину

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) = d,$$

одакле је:

$$t = \frac{d - ax_0 - by_0 - cz_0}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Стога тачка A' има координате $A' = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$. Одавде следи да је растојање $d(A_0, \mathcal{H}) = A_0A'$ дато са:

$$\begin{aligned} d(A_0, \mathcal{H}) = |A' - A_0| &= |(at, bt, ct)| = \\ &= |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Дакле, растојање тачке $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ до равни $\mathcal{H}$ дато је са

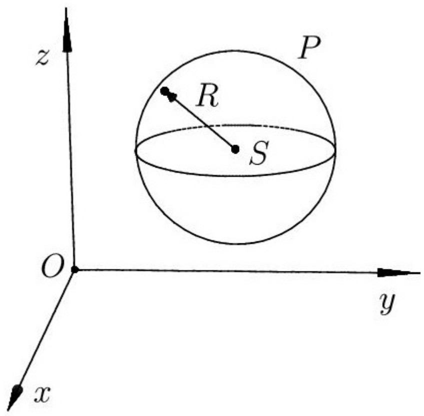
$$d(A_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{13}$$

Из једначине (13) посебно следи да тачка $A_0 \in \mathcal{H}$ ако и само ако важи $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$.

4. Једначина сфере у простору R^3

8. **Једначина сфере.** Сфера σ у простору R^3 дефинише се као скуп тачака $P \in R^3$ које имају исто удаљење $R > 0$ од неке фиксиране тачке $S(x_0, y_0, z_0) \in R^3$. Ако је $P = (x, y, z)$ променљива тачка сфере, онда је њена једначина очигледно $|\overrightarrow{PS}| = d(P, S) = R$, тј. $|\overrightarrow{PS}|^2 = R^2$, односно

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{14}$$



Слика 4.3

Очигледно се једначина сфере (14) може написати у облику

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z = R^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2.$$

Напоменимо, осим тога, да свака једначина облика

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = d \qquad (a, b, c, d \in R)$$

представља сферу у простору R^3, или само једну тачку простора R^3, или евентуално празан скуп тачака. Наиме, она се очигледно може написати у облику:

$$(x + a/2)^2 + (y + b/2)^2 + (z + c/2)^2 = d + a^2/4 + b^2/4 + c^2/4.$$

Ако је сада $\Delta = d + a^2/4 + b^2/4 + c^2/4 > 0$, ова једначина очигледно представља сферу са центром у тачки $S(-a/2, -b/2, -c/2)$ чији је полупречник $R = \sqrt{\Delta}$. Ако је $\Delta = 0$, ова једначина представља само једну тачку простора, тачку $S(-a/2, -b/2, -c/2)$. Најзад, ако је $\Delta < 0$, не постоји ниједна тачка простора која задовољава наведену једначину, па је скуп решења ове једначине празан скуп.

9. **Међусобни однос сфере и праве.** Нека је даље, осим сфере σ чија је једначина (14), дата и права

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = t \qquad (t \in R). \tag{15}$$

Желимо да одредимо *пресечну тачку* сфере σ и ове праве, ако та тачка постоји. Ова пресечна тачка може се добити тако што се параметарске једначине праве, тј. једначине (15) замене у једначини сфере (14), чиме се добија извесна квадратна једначина по t. Ако ова једначина нема реалних решења по t, дата права и дата сфера немају заједничких тачака. Ако та једначина има једно јединствено решење по t, права додирује сферу, и координате тачке додира добијају се тако што се добијена вредност за параметар t замени у једначини праве. Најзад, ако добијена квадратна једначина по t има два реална различита решења, права сече сферу у двема различитим тачкама, и координате тих тачака добијају се заменом ових вредности параметра t у једначини праве (15).

10. **Међусобни однос равни и сфере.** Претпоставимо да је дата сфера чија је једначина

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \tag{16}$$

и раван чија је једначина

$$ax + by + cz = d. \tag{17}$$

У вези међусобног положаја дате сфере и дате равни могу да наступе следећи случајеви.

1. Раван и сфера немају заједничких тачака.

2. Раван и сфера имају тачно једну заједничку тачку, па се додирују у тој тачки.

3. Раван и сфера се секу по неком кругу. Ако центар сфере припада датој равни, онда је пресечни круг велики круг ове сфере.

Означимо даље са d одстојање тачке $S(x_0, y_0, z_0)$, центра сфере, од дате равни. Тада је, као што је познато,

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Тада није тешко доказати да случај 1 наступа ако и само ако је растојање $d > R$, случај 2 ако и само ако је $d = R$ и случај 3 ако и само ако је $d < R$. Случај 3 посебно наступа ако је $d = 0$, тј. центар сфере тачка S припада посматраној равни.

11. **Међусобни однос две сфере.** Најзад претпоставимо да су дате две сфере σ_1, σ_2 простора R^3 чије су једначине редом

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2, \tag{18}$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = R_2^2, \tag{19}$$

Сфера σ_1 има центар у тачки $S_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и полупречник R_1, а сфера σ_2 центар у тачки $S_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и полупречник R_2.

У вези међусобног положаја ових сфера могу да наступе следећи случајеви.

1. Сфере σ_1, σ_2 немају заједничких тачака и леже једна изван друге.

2. Сфере σ_1, σ_2 се додирују споља.

3. Сфере σ_1, σ_2 се секу по неком кругу.

4. Сфере σ_1, σ_2 се додирују изнутра, при чему се једна од њих налази унутар друге.

5. Сфере σ_1, σ_2 немају заједничких тачака, при чему се једна од њих налази унутар друге.

Показује се да случај 1 наступа ако и само ако је растојање $d = S_1S_2 > R_1 + R_2$.

Случај 2 наступа ако и само ако је $d = R_1 + R_2$.

Случај 3 наступа ако и само ако је $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$.

Случај 4 наступа ако и само ако је $d = |R_1 - R_2|$.

Случај 5 наступа ако и само ако је $d < |R_1 - R_2|$.

Посебно, ако је $d = 0$, сфере σ_1 и σ_2 су *концентричне.* Притом за $R_1 \neq R_2$ оне немају заједничких тачака (случај 5), а за $R_1 = R_2$, оне се поклапају (случај 4).

Задржаћемо се кратко на случају 3 када се сфере σ_1 и σ_2 секу. *Пресечни круг* се тада обично изражава преко једне од једначина (18), (19), и преко једначине равни у којој се тај круг налази. Ова последња једначина добија се врло једноставно, одузимањем једначина (18) и (19), чиме се сви квадратни чланови x^2, y^2, z^2 пониште. Заиста, одузимањем једначина (18) и (19), добијамо једначину:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z = R_1^2 - R_2^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2,$$

односно:

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z = d, \tag{20}$$

при чему је

$$d = \frac{1}{2}[R_1^2 - R_2^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2].$$

Стога се *пресечни круг* описује системом једначина (18), (20), који се даље не решава.

Поглавље 5

ЦИЛИНДРИЧНЕ И КОНУСНЕ ПОВРШИ

1. Цилиндричне површи

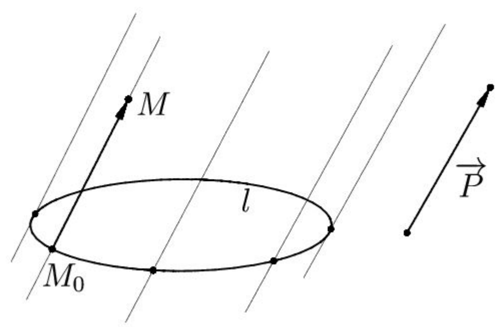
Претпоставимо да је у простору R^3 дата линија ℓ као пресек две површи чије су једначине

(1) $F_1(x, y, z) = 0$; (2) $F_2(x, y, z) = 0$,

и вектор $\overrightarrow{P} = (a, b, c) \neq 0$.

Скуп тачака свих правих у простору R^3 које пролазе кроз тачке линије ℓ и паралелне су са вектором $\overrightarrow{P}$ назива се *цилиндричном површи.*

Линија ℓ назива се *директрисом*, а вектор $\overrightarrow{P}$ *генератрисом* цилиндричне површи.



Slika 5.1

Сада ћемо укратко описати метод формирања одговарајуће једначине цилиндричне површи.

Нека је $M(x,y,z)$ произвољна тачка цилиндричне површи, и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ тачка у којој одговарајућа генератриса сече линију ℓ. Параметарске једначине праве MM_0 гласе:

(3) $\quad x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \qquad (t \in R).$

Како тачка M_0 припада линији ℓ, координате те тачке задовољаваће једначине (1) и (2), тј. важиће:

(4) $\quad F_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad$ (5) $\quad F_2(x_0, y_0, z_0) = 0.$

Како у систему једначина (3), (4), (5) имамо 5 једначина и 4 параметра x_0, y_0, z_0, t, елиминисањем тих параметара из ових једначина добијамо једначину облика

$$F(x,y,z) = 0. \tag{6}$$

Добијена једначина (6) представља једначину тражене цилиндричне површи.

Пример. *Написаћемо једначину цилиндричне површи чија је директриса круг* $x^2+y^2+z^2 = 4, \quad y = x$*, а генератрисе су паралелне са вектором* $\overrightarrow{P} = (2,1,1)$.

Параметарске једначине генератриса гласиће:

(1) $\quad x = x_0 + 2t, \quad y = y_0 + t, \quad z = z_0 + t \qquad (t \in R),$

одакле је $x_0 = x - 2t, \quad y_0 = y - t, \quad z_0 = z - t.$

Заменом ових вредности у једначину $y_0 = x_0$ добијамо да је $t = x - y$, одакле налазимо да је

$$x_0 = x - 2(x-y) = -x + 2y, \quad y_0 = -x + 2y, \quad z_0 = -x + y + z.$$

Најзад, заменом добијених вредности у једначину $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 4$, добијамо једначину

$$(-x+2y)^2 + (-x+2y)^2 + (-x+y+z)^2 = 4,$$

односно

$$2(x-2y)^2 + (x-y-z)^2 = 4.$$

Последња једначина представља тражену једначину цилиндричне површи.

2. Конусне површи

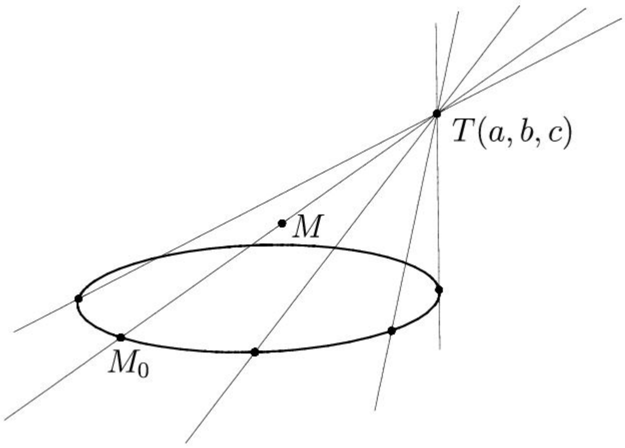
Претпоставимо да је у простору R^3 дата линија ℓ као пресек две површи чије су једначине

(7) $\quad F_1(x, y, z) = 0;\qquad$ (8) $\quad F_2(x, y, z) = 0,$

и фиксирана тачка $T(a, b, c)$ која не припада линији ℓ.

Скуп тачака свих правих у простору R^3 које пролазе кроз тачку T и променљиву тачку линије ℓ назива се *конусном површи.*

Линија ℓ назива се *директрисом*, а тачка T *теменом* те конусне површи.



Слика 5.2

Сада ћемо укратко описати метод формирања одговарајуће једначине конусне површи.

Уочимо произвољну променљиву тачку $M(x, y, z)$ конусне површи. Ако са $M_0(x_0, y_0, z_0)$ означимо променљиву тачку директрисе ℓ, тада су параметарске једначине генератрисе

$$\frac{x-a}{x_0-a} = \frac{y-b}{y_0-b} = \frac{z-c}{z_0-c} = \frac{1}{t},$$

одакле је:

(9) $\quad x_0 = a + t(x-a), \quad y_0 = b + t(y-b), \quad z_0 = c + t(z-c).$

Како тачка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell$ важе једначине:

(10) $\quad F_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad$ (11) $\quad F_2(x_0, y_0, z_0) = 0.$

Елиминисањем параметара x_0, y_0, z_0, t из једначина (9), (10), (11), добијамо једначину конуса у облику:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{12}$$

Пример. *Наћи ћемо једначину конуса чије је теме тачка* $T(0,0,0)$*, а директриса је круг* $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1.$

Једначине генератриса MM_0 гласиће:

$$x_0 = tx, \quad y_0 = ty, \quad z_0 = tz,$$

а једначина директрисе: $x_0^2 + y_0^2 = 1, \quad z_0 = 1.$

Из услова $z_0 = 1$ налазимо да је $tz = 1$, доносно $t = 1/z$. Одавде добијамо да је $x_0 = tx = x/z$, $y_0 = ty = y/z$. Најзад, запеном ових вредности у једначини $x_0^2 + y_0^2 = 1$, добијамо једначину конуса $(x/z)^2 + (y/z)^2 = 1$, односно $z^2 = x^2 + y^2$. Ову једначину очигледно можемо да напишемо у облику

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поглавље 6

ЛИНЕАРНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

1. Основне дефиниције

Дефиниција 1. *Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ (реални) векторски простори. Пресликавање $T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ назива се линеарним, ако је оно адитивно и хомогено, тј. има особине*

$$T(V+W) = T(V) + T(W), \tag{1}$$

$$T(rV) = rT(V), \tag{2}$$

за произвољне векторе $V, W \in \mathcal{X}$ и скалар $r \in R$.

Посебно, ако је $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, говоримо о линеарном пресликавању у векторском простору $\mathcal{X}$ (тј. о линеарној трансформацији).

Примери. Сваки *изоморфизам* једног векторског простора на други векторски простор је једна линеарна трансформација. Посебно, за сваки векторски простор $\mathcal{X}$, идентично пресликавање $I\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ је линеарно.

Нула пресликавање $O\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ дефинисано са $O(X) = O$ $(X \in \mathcal{X})$ је такође линеарно пресликавање.

Уочимо посебно простор $\mathcal{X} = R^2$ и следеће његове трансформације:

(a) Ротацију ρ_θ око координатног почетка O за фиксирани угао θ:

$$\rho_\theta(X) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

(б) Симетрију $\sigma_0 = -I$ у односу на координатни почетак O:

$$\sigma_0(X) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

(ц) Симетрију σ_b у односу на праву $y = x$:

$$\sigma_b(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Лако се проверава да су све ове трансформације простора R^2 линеарне. Штавише, ако је A произвољна квадратна матрица реда 2, и T трансформација у простору R^2 дефинисана са

(3) $$T(V) = AV \qquad \text{(матрично множење)},$$

где је $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2$, лако се види да је T линеарно пресликавање.

Уочимо даље произвољну реалну матрицу A типа $m \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Дефинишимо пресликавање $T\colon R^n \to R^n$ са $T(V) = AV$ (матрично множење), где је $V = [v_1, \ldots, v_n]^\top \in R^n$. Дакле

$$T(V) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}.$$

Тада се на основу дефиниције операција са матрицама лако проверава да је пресликавање T линеарно, тј. $T(\alpha V + \beta W) = \alpha T(V) + \beta T(W)$ $(V, W \in R^n;\ \alpha, \beta \in R)$.

Осим тога, непосредно се види да је

$$T(E_1) = [a_{11}, \ldots, a_{m1}]^\top, \ldots, T(E_n) = [a_{1n}, \ldots, a_{mn}]^\top,$$

дакле вектори $T(E_1), \ldots, T(E_n)$ одговарају колонама матрице A.

СТАВ 1. *Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ произвољни (реални) векторски простори и $T{:}\,\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ је линеарно пресликавање. Тада је*

(а) $T(O)=O$.

(б) *За произвољне векторе $V_1,\dots,V_n\in\mathcal{X}$ и скаларе $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in R$, важи*

$$T(\lambda_1V_1+\cdots+\lambda_nV_n)=\lambda_1T(V_1)+\cdots+\lambda_nT(V_n)\,.$$

(ц) *Језгро $\mathcal{K}(T)=\{V\in\mathcal{X}\,\big|\,T(V)=O\}$ пресликавања T је потпростор простора $\mathcal{X}$.*

(д) *За произвољан потпростор $\mathcal{E}\subset\mathcal{X}$ је $T(\mathcal{E})$ потпростор простора $\mathcal{Y}$. Посебно је $\mathcal{R}(T)=\{T(V)\,\big|\,V\in\mathcal{X}\,\}$ потпростор простора $\mathcal{Y}$.*

Доказ. (а) Имамо да је $T(O)=T(O+O)=T(O)+T(O)$, одакле је $T(O)=O$.

(б) Доказ се изводи непосредно индукцијом по $n\in N$.

(ц) Ако вектори $V,W\in\mathcal{K}(T)$, тада је $T(V)=T(W)=O$. Одавде је за произвољне скаларе $a,b\in R$ испуњено $T(aV+bW)=aT(V)+bT(W)=O$, дакле $aV+bW\in\mathcal{K}(T)$. Стога је језгро $\mathcal{K}(T)$ пресликавања T потпростор простора $\mathcal{X}$.

(д) Ако вектори $V,W\in T(\mathcal{E})$, тада је $V=T(A)$ и $W=T(B)$ за извесне векторе $A,B\in\mathcal{E}$. Стога је за произвољне скаларе $\alpha,\beta\in R$ испуњено $\alpha V+\beta W=\alpha T(A)+\beta T(B)=T(\alpha A+\beta B)$, и како $\alpha A+\beta B\in\mathcal{E}$, очигледно $\alpha V+\beta W\in T(\mathcal{E})$. Стога је $T(\mathcal{E})$ потпростор простора $\mathcal{Y}$. $\square$

СТАВ 2. *Нека је $\mathcal{X}$ коначно димензионални простор и $T{:}\,\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ произвољно линеарно пресликавање. Тада важи:*

$$\dim\mathcal{K}(T)+\dim T(\mathcal{X})=\dim(\mathcal{X}). \tag{4}$$

Доказ. Претпоставићемо да је $\dim(\mathcal{X})=n$. У тривијалном случају $n=0$, тј. $\mathcal{X}=\{O\}$ тврђење је очигледно тачно, јер је $\mathcal{K}(T)=\{O\}$ и $T(\mathcal{X})=O$. Стога можемо да претпоставимо да је $n\ge 1$. Нека је $\dim\mathcal{K}(T)=m$, $(m\le n)$ и нека је $\{V_1,\dots,V_m\}$ произвољна база потпростора $\mathcal{K}(T)$. Нека је даље $\{V_1,\dots,V_m,V_{m+1},\dots,V_n\}$ произвољна база простора $\mathcal{X}$. Оваква база увек постоји на основу Става I. 30. Докажимо да је $\{T(V_{m+1}), \dots, T(V_n)\}$ база потпростора $T(\mathcal{X})$. Очигледно вектори $T(V_{m+1}), \dots, T(V_n) \in T(\mathcal{X})$. Ако претпоставимо да је

$$\lambda_{m+1} T(V_{m+1}) + \cdots + \lambda_n T(V_n) = O,$$

за реалне бројеве $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n \in R$, тада је $T(\lambda_{m+1} V_{m+1} + \cdots + \lambda_n V_n) = O$. Стога вектор $\lambda_{m+1} V_{m+1} + \cdots + \lambda_n V_n \in \mathcal{K}(T)$, па је

$$\lambda_{m+1} V_{m+1} + \cdots + \lambda_n V_n = \lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_m V_m,$$

за извесне скаларе $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in R$. Одавде је због линеарне независности вектора $V_1, \dots, V_m, V_{m+1}, \dots, V_n$ испуњено $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. Стога су вектори $\{V_{m+1}, \dots, V_n\}$ линеарно независни. Даље уочимо било који вектор $W \in T(\mathcal{X})$. Тада је $W = T(V)$ за неки вектор $V \in \mathcal{X}$. Сада је $V = \lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_n V_n$ за извесне скаларе $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$, па је

$$\begin{aligned} W = T(\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_n V_n) &= [\lambda_1 T(V_1) + \cdots + \lambda_m T(V_m)] + \\ &+ [\lambda_{m+1} T(V_{m+1}) + \cdots + \lambda_n T(V_n)] = \\ &= \lambda_{m+1} T(V_{m+1}) + \cdots + \lambda_n T(V_n), \end{aligned}$$

јер је $T(V_1) = \cdots = T(V_n) = O$.

Стога је $\{T(V_{m+1}), \dots, T(V_n)\}$ база потпростора $T(\mathcal{X})$ простора $\mathcal{Y}$. Одавде је очигледно

$$\dim \mathcal{K}(T) + \dim T(\mathcal{X}) = m + (n - m) = n = \dim(\mathcal{X}),$$

тј. важи релација (4). $\square$

Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ произвољни реални векторски простори. Тада ћемо са $\mathcal{L}(X, Y)$ означити скуп свих линеарних пресликавања $T \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

За произвољна линеарна пресликавања $R, S \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ дефинисаћемо векторске операције на следећи начин:

$$\begin{aligned} (R + S)(V) &= R(V) + S(V), \\ (\lambda R)(V) &= \lambda R(V), \end{aligned}$$

за произвољан вектор $V \in \mathcal{X}$ и скалар $\lambda \in R$.

СТАВ 3. *Скуп $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ је векторски простор над пољем R са векторским операцијама уведеним на претходни начин.*

Доказ. Доказ је рутински. Основна идеја доказа је да ако $R, S \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ и $\alpha, \beta \in R$, тада и пресликавање $\alpha R + \beta S \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Напоменимо још да је у поменутом векторском простору $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, нула вектор тривијално пресликавање O дефинисана са $O(V) = O$ $(V \in \mathcal{X})$, а супротни вектор пресликавања $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ пресликавање $-T$ дефинисано са $(-T)(V) = -T(V)$ $(V \in \mathcal{X})$.

Такође напоменимо да је посебно за $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \mathcal{L}(\mathcal{X})$ скуп свих линеарних трансформација у простору $\mathcal{X}$. У овом случају може се дефинисати производ произвољних двеју линеарних трансформација $R, S \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ са $(RS)(V) = R(S(V))$ $(V \in \mathcal{X})$. Како је композиција линеарних пресликавања такође линеарно пресликавање, следи да и трансформација $RS \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Тиме скуп $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ постаје једна алгебра. Ова алгебра има и јединицу I, наиме идентичну трансформацију $I \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. $\square$

2. Матрични приказ линеарног пресликавања

Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ векторски простори, $\dim(\mathcal{X}) = n$, $\dim(\mathcal{Y}) = m$ и пресликавање $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Нека је даље $\{V_1, \dots, V_n\}$ произвољна база простора $\mathcal{X}$ и $\{V'_1, \dots, V'_m\}$ произвољна база простора $\mathcal{Y}$. Нека је даље

$$T(V_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} {V'}_i \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n), \tag{5}$$

где су a_{ij} $(i \le m;\ j \le n)$ потпуно одређени реални бројеви, који зависе од пресликавања T и изабраних база потпростора $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Тада се матрица

$$A = [T] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

назива *матричним приказом* линеарног пресликавања T у поменутим базама. Дакле коефицијенти $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ разлагања вектора $T(V_j)$ одговарају елементима j–те колоне матрице $A = [T]$.

Напоменимо још, да иако тип матрице A остаје непромењен, сама матрица A се мења у зависности од избора поменутих база простора $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Посебно, нека је $\{E_1, \dots, E_n\}$ стандардна база простора R^n,

$\{E_1', \ldots, E_m'\}$ стандардна база простора R^m, и пресликавање $T \in \mathcal{L}(R^n, R^m)$. Тада је

$$T(E_j) = a_{1j}E'_1 + \cdots + a_{mj}E'_m = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

$(j = 1, \ldots, n)$, па је матрични приказ

$$[T] = A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

или симболично $[T] = [T(E_1) \cdots T(E_n)]$.

Посебно, ако је $T = I$ идентична трансформација простора R^n, и $\{V_1, \ldots, V_n\}$ произвољна база овог простора, тада $I \in \mathcal{L}(R^n, R^n)$ и одговарајући матрични приказ трансформације I у овој бази гласи

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}].$$

Ако је $T = O$ трансформација из простора R^n у простор R^m, тада је у произвољним базама ових простора

$$[O] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

одговарајућа O–матрица типа $m \times n$.

Уочимо сада произвољан вектор $V \in R^n$ који ћемо написати у погодном облику колона–вектора :

$$V = [v_1, \ldots, v_n]^\top = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Тада је $V = \sum_{j=1}^{n} v_j E_j$, па одавде добијамо

$$T(V) = T(\sum_{j=1}^{n} v_j E_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j T(E_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} E'_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j) E'_i,$$

односно

$$T(V) = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 & + & \cdots & + & a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 & + & \cdots & + & a_{2n}v_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}v_1 & + & \cdots & + & a_{mn}v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Према томе можемо да напишемо да је $T(V) = AV$, односно

(6) $$T(V) = [T]\,V \qquad (V \in R^n)\,,$$

где је $[T]$ матрични приказ линеарне трансформације $T \in \mathcal{L}\,(R^n, R^n)$.

Наводимо без доказа још један важан став који се односи на линеарне трансформације.

СТАВ 4. *Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ коначно димензионални векторски простори и пресликавање $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Тада је*

(7) $$\dim T(\mathcal{X}) = \operatorname{rang}\,[T],$$

где је $[T]$ матрични приказ пресликавања T у произвољним базама простора $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$.

Из горњег става и Става 2 добијамо једнакост

(8) $$\dim \mathcal{K}(T) = \dim\,(\mathcal{X}) - \operatorname{rang}\,[T],$$

под претпоставкама из Става 4.

3. Ортогоналне линеарне трансформације

Ортогоналне линеарне трансформације представљају једну важну поткласу линеарних трансформација простора R^n. Овде ћемо их дефинисати само за случај када је $n = 3$, али треба напоменути да се све одговарајуће дефиниције и особине лако могу пренети и на општи Еуклидски простор R^n.

Дефиниција 2. *Линеарна трансформација* $T\colon R^3 \to R^3$ *назива се ортогоналном, ако чува скаларни производ вектора, тј. ако је*

$$\langle T(V), T(W)\rangle = \langle V, W\rangle, \tag{9}$$

за произвољне векторе $V, W \in R^3$.

Један од основних примера ортогоналних линеарних трансформација је идентично пресликавање I простора R^3 дефинисано са $I(X) = X$. Пресликавање $-I$ је такође ортогонално линеарно пресликавање, и представља *симетрију* у односу на координатни почетак O.

Ако је T ортогонална линеарна трансформација у простору R^3, тада узимајући у релацији (9) да је $W = V$ непосредно следи $|T(V)|^2 = |V|^2$, тј. $|T(V)| = |V|$ $(V \in R^3)$.

Стога је $T(V) = O$ ако и само ако је $V = O$, што значи да је $\mathcal{K}(T) = O$. То значи да је T један–један пресликавање простора R^3. Како је, осим тога, на основу Става 2 испуњено

$$\dim \mathcal{K}(T) + \dim \mathcal{R}(T) = 3,$$

добијамо да је $\dim \mathcal{R}(T) = 3$, тј. $\mathcal{R}(T) = R^3$. Стога је такво пресликавање и "на". Одавде непосредно добијамо следећи став:

СТАВ 5. *Свака ортогонална линеарна трансформација* T *у простору* R^3 *представља један линеарни изоморфизам простора* R^3.

Осим тога, важи и следећи став.

СТАВ 6. *Скуп* $\mathcal{O}(R^3)$ *свих ортогоналних линеарних трансформација простора* R^3 *представља групу с обзиром на операцију компоновања пресликавања.*

Доказ. Неутрални елемент те групе је очигледно идентично пресликавање I.

Нека су даље T и S произвољне ортогоналне линеарне трансформације у простору R^3. Тада је TS такође линеарно пресликавање, и за произвољне векторе $V, W \in R^3$ важи:

$$\langle (TS)(V), (TS)(W)\rangle = \langle T(S(V)), T(S(W))\rangle = \langle S(V), S(W)\rangle = \langle V, W\rangle,$$

одакле следи да пресликавање $TS \in \mathcal{O}(R^3)$.

Даље, ако је T произвољно ортогонално линеарно пресликавање, тада је T линеарни изоморфизам простора R^3, па инверзно пресликавање T^{-1} постоји и представља такође линеарно пресликавање у простору R^3. Уочимо даље било која два вектора $V, W \in R^3$. Тада је $V = T(X)$ и $W = T(Y)$ за извесне векторе $X, Y \in R^3$, и очигледно је $X = T^{-1}(V)$ и $Y = T^{-1}(W)$. Сада имамо да је

$$\langle T^{-1}(V), T^{-1}(W)\rangle = \langle X, Y\rangle = \langle T(X), T(Y)\rangle = \langle V, W\rangle.$$

Стога је T^{-1} такође ортогонално линеарно пресликавање, тј. $T^{-1} \in \mathcal{O}(R^3)$. Како је, осим тога, асоцијативност увек испуњена код компоновања пресликавања, непосредно следи да је скуп $\mathcal{O}(R^3)$ група. □

Група $\mathcal{O}(R^3)$ очигледно има и ту особину да ако $T \in \mathcal{O}(R^3)$, тада и $-T \in \mathcal{O}(R^3)$.

СТАВ 7. *Ако је T ортогонално линеарно пресликавање у простору R^3, тада за било која два вектора $V, W \in R^3$ важи следеће:*

(а) $|T(V) - T(W)| = |V - W|$;

(б) $\measuredangle(T(V), T(W)) = \measuredangle(V, W)$;

(ц) $V \perp W \Leftrightarrow T(V) \perp T(W)$.

Последње две особине важе ако је $V, W \neq O$.

Доказ. (а) За произвољне векторе $V, W \in R^3$ биће испуњено

$$|T(V) - T(W)| = |T(V - W)| = |V - W|.$$

(б) Ако са θ означимо угао између вектора $V, W \in R^3$ $(V, W \neq O)$, и са ϕ угао између вектора $T(V)$ и $T(W)$, тада је

$$\cos\phi = \frac{\langle T(V), T(W)\rangle}{|T(V)|\,|T(W)|} = \frac{\langle V, W\rangle}{|V|\,|W|} = \cos\theta,$$

одакле је $\phi = \theta$. Притом је очигледно $T(V), T(W) \neq O$, јер је $V, W \neq O$.

(ц) Ова релација следи непосредно из релације (б), јер је за векторе $V, W \neq O$ испуњено $V \perp W$ ако и само ако је $\langle V, W\rangle = 0$, тј. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. $\square$

Особина (а) у претходном ставу значи да ортогонално линеарно пресликавање увек чува растојање између вектора тог простора. Особина (б) значи да то пресликавање увек чува углове између вектора тог простора.

СТАВ 8. *Линеарно пресликавање T у простору R^3 је ортогонално ако и само ако је за сваки вектор $V \in R^3$ испуњена релација:*

$$|T(V)| = |V|, \tag{10}$$

тј. T чува дужине вектора из R^3.

Доказ. Услов (10) је очигледно неопходан.

Обратно, претпоставимо да линеарна трансформација T задовољава услов (10). Уочимо произвољне векторе $V, W \in R^3$. Тада је на основу релације (10) испуњено

$$|T(V - W)| = |V - W|,$$

односно

$$|T(V) - T(W)| = |V - W|,$$

одакле је квадрирањем

$$\langle T(V) - T(W), T(V) - T(W)\rangle = \langle V - W, V - W\rangle.$$

Одавде развијањем следи једнакост

$$|T(V)|^2 + |T(W)|^2 - 2\langle T(V), T(W)\rangle = |V|^2 + |W|^2 - 2\langle V, W\rangle.$$

Поновном применом релације (10) на векторе V и W, одавде непосредно следи

$$\langle T(V), T(W)\rangle = \langle V, W\rangle \qquad (V, W \in R^3).$$

Стога је заиста T ортогонална линеарна трансформација. $\square$

Треба још напоменути да постоје пресликавања простора R^3 која чувају углове, али нису ортогонална. Уочимо на пример пресликавање T дефинисано са $T(V) = 2V$. Оно чува углове, јер је за $V, W \neq O$ испуњено

$$\frac{\langle T(V), T(W)\rangle}{|T(V)|\,|T(W)|} = \frac{\langle 2V, 2W\rangle}{4|V|\,|W|} = \frac{\langle V, W\rangle}{|V|\,|W|},$$

али је $|T(V)| = 2|V| \neq |V|$ $(V \neq O)$. Стога оно није ортогонално пресликавање.

На основу претходног става се ортогонална линеарна пресликавања у простору R^3 називају још и *изометријама* у том простору.

СТАВ 9. *Линеарно пресликавање* $T\colon R^3 \to R^3$ *је ортогонално ако и само ако пресликава сваку ортонормирану базу простора* R^3 *такође на ортонормирану базу истог простора.*

Доказ. Нека је T ортогонално линеарно пресликавање простора R^3, и нека је $\{V_1, V_2, V_3\}$ било која ортонормирана база простора R^3. Тада је

$$\langle T(V_i), T(V_j)\rangle = \langle V_i, V_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

одакле је $|T(V_i)| = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ и $\langle T(V_i), T(V_j)\rangle = 0$ $(i \neq j)$. Стога је $\{T(V_1), T(V_2), T(V_3)\}$ ортонормирани систем вектора у простору R^n.

Даље знамо да је сваки такав систем од k вектора простора R^3 $(k \leq 3)$ линеарно независан, па вектори $\{T(V_1), T(V_2), T(V_3)\}$ очигледно представљају ортонормирану базу простора R^3.

Обратно, уочимо било које линеарно пресликавање T у простору R^3 које пресликава произвољну ортонормирану базу простора R^3 такође у ортонормирану базу истог простора. Уочимо сада стандардну ортонормирану базу $\{E_1, E_2, E_3\}$ простора R^3. Тада је $\{T(E_1), T(E_2), T(E_3)\}$ такође ортонормирана база у простору R^3. Уочимо произвољне векторе $V, W \in R^3$. Тада је $V = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$, $W = b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3$ за извесне реалне бројеве $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$. Одавде непосредно добијамо да је

$$\langle V, W\rangle = \langle a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3, b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Даље је

$$\begin{aligned} T(V) &= a_1T(E_1) + a_2T(E_2) + a_3T(E_3), \\ T(W) &= b_1T(E_1) + b_2T(E_2) + b_3T(E_3). \end{aligned}$$

Због претпоставке да је скуп вектора $\{T(E_1), T(E_2), T(E_3)\}$ ортонормиран, одавде такође непосредно добијамо да је

$$\langle T(V), T(W)\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

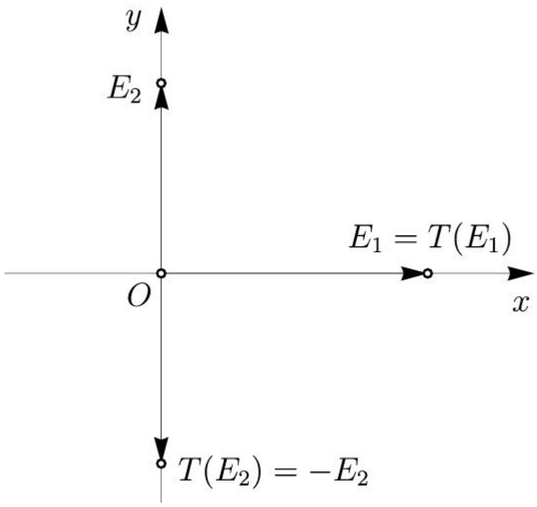
према томе $\langle T(V), T(W)\rangle = \langle V, W\rangle$. Стога је пресликавање T ортогонално, чиме је доказ завршен. $\square$

Сада наводимо неколико примера ортогоналних линеарних пресликавања.

Пример 1. Пресликавање T простора R^2 дефинисано са

$$T(V) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} V \qquad (V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})$$

је ортогонално. Оно пресликава ортонормирану базу $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, на ортонормирану базу $T(E_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(E_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.



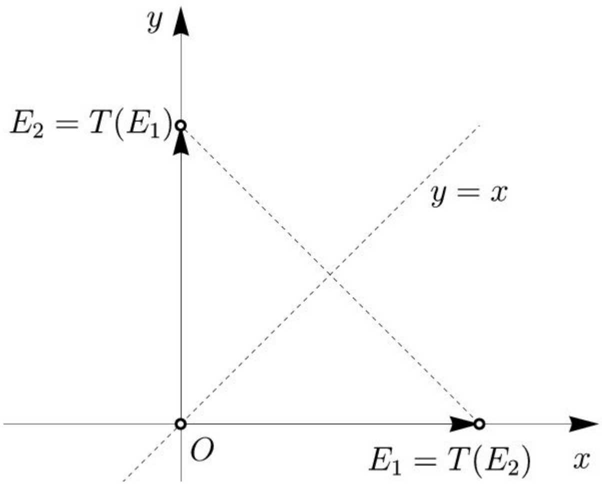
Слика 6.1

Ова трансформација представља *симетрију* у односу на осу Ox.

Пример 2. Линеарна трансформација T простора R^2 дефинисана са

$$T(V) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} V \qquad (V \in R^2)$$

је такође ортогонална, јер пресликава ортонормирану базу $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, на ортонормирану базу $T(E_1) = E_2$, $T(E_2) = E_1$.



Слика 6.2

Ова трансформација геометријски представља *симетрију* у односу на праву $y = x$.

Пример 3. За произвољан фиксирани угао $\theta \in [0, 2\pi]$, линеарна трансформација T простора R^2 дефинисана са

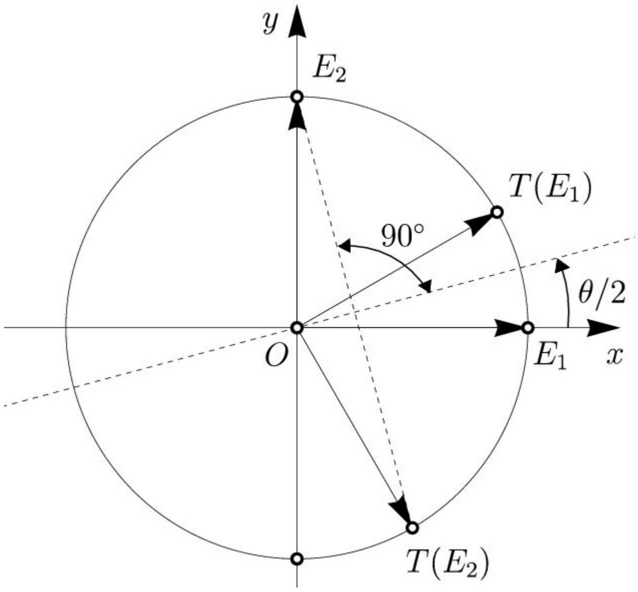
$$T(V) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} V \qquad (V \in R^2)$$

је ортогонална, јер пресликава ортонормирану базу $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, на ортонормирану базу $T(E_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$, $T(E_2) = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix}$.

Ова трансформација геометријски представља *симетрију* у односу на праву која пролази кроз координатни почетак O, и гради угао од $\dfrac{\theta}{2}$ са осом Ox.

Посебно за $\theta = 0$ и $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ добијамо као специјалне случајеве Примере 1 и 2.

Следећа особина даје матричну карактеризацију произвољне ортогоналне линеарне трансформације.



Слика 6.3

СТАВ 10. *Линеарна трансформација* $T\colon R^3 \to R^3$ *је ортогонална ако и само ако је њен матрични приказ* $A = [T]$ *у произвољној ортонормираној бази* $\{B_1, B_2, B_3\}$ *ортогонална матрица.*

Доказ. Нека је $\{B_1, B_2, B_3\}$ произвољна фиксирана ортонормирана база простора R^3. Претпоставимо да је T ортогонална линеарна трансформација и $A = [a_{ij}]$ је њен матрични приказ у бази $\{B_1, B_2, B_3\}$. Тада је $T(B_i) = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$ $(i = 1, 2, 3)$. Поред тога, на основу Става 9 следи да је $\{T(B_1), T(B_2), T(B_3)\}$ такође ортонормирана база простора R^3. Одавде добијамо да је за произвољне индексе $i, j = 1, 2, 3$ испуњено:

$$(A^\top A)_{ij} = \langle (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}), (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}) \rangle = \langle T(B_i), T(B_j) \rangle = \langle B_i, B_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Према томе добијамо да је

$$A^\top A = I. \tag{11}$$

Из ове релације следи да је $\det(A^\top)\det(A) = \det^2(A) = 1$, одакле је $\det(A) \neq 0$, тј. A је регуларна матрица. Множењем релације (11) са десне стране са матрицом A^{-1} добијамо да је $A^\top = A^{-1}$. Стога је

$$AA^\top = AA^{-1} = I.$$

Према томе матрица A задовољава услов

$$AA^\top = A^\top A = I, \tag{12}$$

тј. A је ортогонална матрица.

Обратно, претпоставимо да је матрица $A = [T]$ пресликавања T у ортонормираној бази $\{B_1, B_2, B_3\}$ ортогонална. Тада важи релација (11), тј. $A^\top A = I$. Одавде непосредно добијамо да је $(A^\top A)_{ij} = \delta_{ij}$, одакле је

$$\langle T(B_i), T(B_j)\rangle = \langle (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}), (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})\rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Према томе, $\{T(B_1), T(B_2), T(B_3)\}$ је такође ортонормирана база простора R^3, и на основу Става 9, T је ортогонална линеарна трансформација простора R^3. $\square$

Пример 4. Дата је линеарна трансформација $T\colon R^2 \to R^2$ дефинисана са

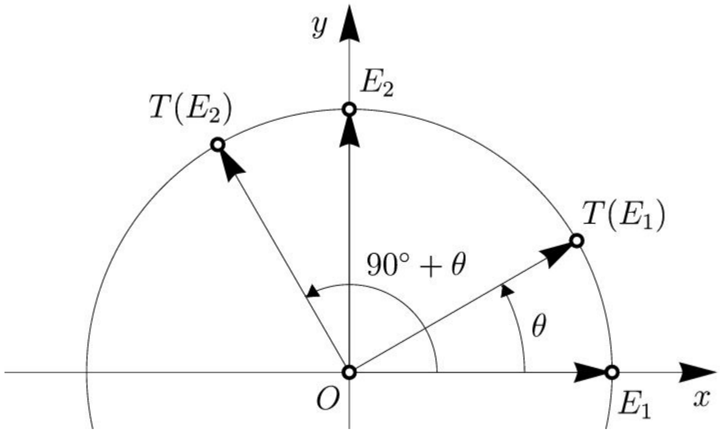
$$T(V) = AV = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} V \qquad (V \in R^2)\,.$$

Тада је $A = [T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ матрични приказ ове трансформације у бази $\{E_1, E_2\}$. Лако се проверава да је тада $A^\top A = AA^\top = I$, па је матрица A, а према томе и трансформација T ортогонална.

Тада је

$$T(E_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad T(E_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

одакле следи да ова трансформација представља *ротацију* за угао $\theta \in [0, 2\pi]$ са центром у координатном почетку, и у смеру супротном од кретања сказаљке на часовнику.



Слика 6.4

У следећем ставу дата је класификација свих ортогоналних матрица реда 2.

СТАВ 11. *Свака ортогонална матрица реда* 2 *има један од следећих облика:*

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

за известан угао $\theta \in [0, 2\pi]$.

Доказ. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ортогонална матрица. Тада је

$$A^\top = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad , \tag{13}$$

и $\det(A) = \pm 1$.

Разликоваћемо два случаја у зависности од тога да ли је $\det(A) = +1$ или $\det(A) = -1$.

(i) $\det(A) = +1$. Тада релација (13) значи да је $a = d, b = -c$, одакле је

$$A = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Одавде је $\det(A) = a^2 + c^2 = 1$. Дакле, постоји известан угао $\theta \in [0, 2\pi]$ такав да је $a = \cos\theta, c = \sin\theta$, па је

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(ii) $\det(A) = -1$. Тада релација (13) значи да је $a = -d, b = c$, одакле је

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

Из услова $\det(A) = -a^2 - c^2 = -1$, тј. $a^2 + c^2 = 1$, следи да постоји угао $\theta \in [0, 2\pi]$ такав да је $a = \cos\theta, c = \sin\theta$. Стога је

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}. \quad \square$$

Претходни став може се интерпретирати *геометријски* на следећи начин. Нека је A ортогонална матрица реда 2, $T(V) = AV$ $(V \in R^2)$

одговарајућа ортогонална линеарна трансформација, и $\{E_1, E_2\}$ одговарајућа стандардна база. Тада је $||T(E_1)|| = ||T(E_2)|| = 1$, па вектори $T(E_1)$ и $T(E_2)$ леже на јединичном кругу. Поред тога је $T(E_2) \perp T(E_1)$. Према томе, ако фиксирамо вектор $T(E_1)$, преостају само две могућности за $T(E_2)$: он се добија од вектора $T(E_1)$ ротацијом за угао $+90^0$ (и имамо *ротацију*), или ротацијом за угао -90^0 (и имамо *симетрију*).

Поглавље 7

ИЗОМЕТРИЈЕ У ПРОСТОРУ $\mathbf{R}^3$

У целом овом поглављу посматраћемо само Еуклидски простор R^3. Међутим, напомињемо да се практично све дефиниције и резултати могу лако преформулисати и за општи Еуклидски простор R^n $(n \in N)$.

Дефиниција 1. Под *изометријом* (или крутим кретањем) у простору R^3 подразумевамо произвољно пресликавање $F\colon R^3 \to R^3$ које чува Еуклидско растојање, тј. има особину

$$(1) \qquad d(P,Q) = d(F(P),F(Q))\,,$$

односно

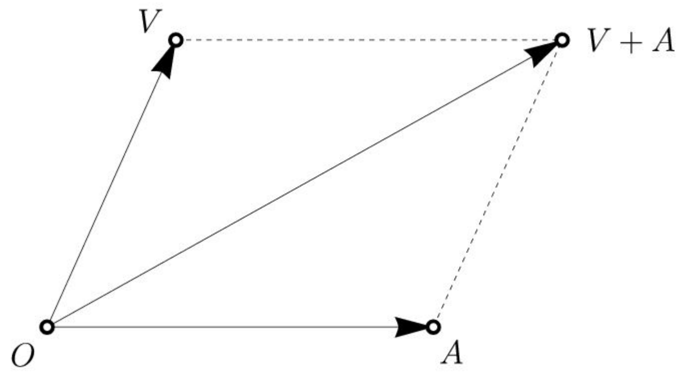
$$(2) \qquad |P-Q| = |F(P)-F(Q)| \qquad (P,Q \in R^3).$$

Није тешко видети да је композиција $\circ$ било које две изометрије у простору R^3 такође једна изометрија, и да је скуп $\mathcal{E}(3)$ свих изометрија простора R^n с обзиром на операцију $\circ$ једна група. Одговарајући неутрални елемент ове групе је идентично песликавање I.

Још напоменимо да је у познатом Ерлангенском програму Ф. Клајна, *Еуклидска геометрија* представљена као студија појмова и особина које су инваријантне за групу $\mathcal{E}(3)$.

Напомена. На основу резултата из претходног параграфа следи да све ортогоналне линеарне трансформације простора R^3 представљају изометрије. Међутим, постоје изометрије простора R^3 које нису линеарне, па према томе ни ортогоналне линеарне трансформације.

Дефиниција 2. Под *транслацијом* за вектор $A \in R^3$ у простору R^3 подразумевамо пресликавање $T_A\colon R^3 \to R^3$ дефинисано са $T_A(V) = A + V$ $(V \in R^3)$.



Слика 7.1

СТАВ 1. *Свака транслација T_A $(A \in R^3)$ је једна изометрија простора R^3.*

Доказ. Ако су P и Q две произвољне тачке простора R^3, тада је

$$T_A(P) = A + P \quad , \quad T_A(Q) = A + Q\,,$$

одакле је

$$d(T_A(P), T_A(Q)) = |T_A(P) - T_A(Q)| = |(A + P) - (A + Q)| = \\ = |P - Q| = d(P, Q)\,. \quad \square$$

Очигледно је да је идентична трансформација I простора R^3 транслација за вектор $A = 0$. Поред тога, транслације T_A је веома ретко једно линеарно пресликавање. Она је линеарно пресликавање ако и само ако је вектор $A = 0$. Заиста, пресликавање $I = T_0$ је линеарно, а из линеарности пресликавања T_A имамо да је

$$T(\alpha V) = A + \alpha V = \alpha T(V) = \alpha A + \alpha V \qquad (\alpha \in R)\,,$$

одакле следи да је $A = \alpha A$ $(\alpha \in R)$, тј. $A = 0$.

Стога је транслација T_A ортогоналана линеарна трансформација ако и само ако је вектор $A = 0$.

СТАВ 2. *Свака ортогонална линеарна трансформација $C\colon R^3 \mapsto R^3$ је једна изометрија.*

Доказ. Пре свега, имамо да је

$$|C(P)|^2 = \langle C(P), C(P)\rangle = \langle P, P\rangle = |P|^2,$$

дакле $|C(P)| = |P|$ $(P \in R^3)$. Сада коришћењем линеарности пресликавања C добијамо да је

$$|C(P) - C(Q)| = |C(P - Q)| = |P - Q| \qquad (P, Q \in R^3). \quad \square$$

Сада ћемо доказати један помоћни став који се односи на једну посебну класу изометрија простора R^3.

СТАВ 3. *Ако изометрија F простора R^3 има особину $F(0) = 0$, тада она чува скаларни производ било која два вектора простора R^3.*

Доказ. На основу претпоставке, пресликавање F има особине:

$$|F(P) - F(Q)| = |P - Q| \qquad (P, Q \in R^3), \tag{3}$$

и

$$F(0) = 0\,. \tag{4}$$

Треба доказати да је за било која два вектора $P, Q \in R^3$ испуњено

$$\langle F(P), F(Q)\rangle = \langle P, Q\rangle\,. \tag{5}$$

Имамо да је за било који вектор $P \in R^n$ испуњено

$$|F(P)| = d(0, F(P)) = d(F(0), F(P)) = d(0, P) = |P|\,, \tag{6}$$

дакле $|F(P)| = |P|$. Из релације (3) следи да је за произвољне векторе $P, Q \in R^3$ испуњено

$$\langle F(P) - F(Q), (F(P) - F(Q)\rangle = \langle P - Q, P - Q\rangle,$$

или у развијеном облику

$$|F(P)|^2 + |F(Q)|^2 - 2\langle F(P), F(Q)\rangle = |P|^2 + |Q|^2 - 2\langle P, Q\rangle. \tag{7}$$

Како је $|F(P)| = |P|$ и $|F(Q)| = |Q|$, одавде добијамо да је

$$(8) \qquad \langle F(P), F(Q)\rangle = \langle P, Q\rangle \qquad (P, Q \in R^3).$$

Докажимо још линеарност пресликавања F.

Нека је $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0), E_3 = (0,0,1)$. Како F чува скаларни производ вектора, то ће и вектори $\{F(E_1), F(E_2), F(E_3)\}$ образовати ортонормирани систем вектора. На основу познате особине о Еуклидском разлагању вектора простора R^3 у односу на ортонормирану базу тог простора, тада је за сваки вектор $P = (p_1, p_2, p_3)$ испуњено:

$$F(P) = \sum_{i=1}^{3} \langle F(P), F(E_i)\rangle F(E_i)$$

и

$$\langle F(P), F(E_i)\rangle = \langle P, E_i\rangle = p_i \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Одавде следи да је

$$(9) \qquad F(P) = \sum_{i=1}^{3} p_i\, F(E_i)\,.$$

Из релације (9) непосредно следи линеарност пресликавања F, тј. особина

$$F(aP + bQ) = aF(P) + bF(Q) \qquad (P, Q \in R^3;\ a, b \in R)\,.$$

Стога је F ортогонална линеарна трансформација у простору R^3. □

Напомена. Ако је F произвољна линеарна трансформација , тада је због линеарности F очигледно $F(0) = 0$. Стога се ортогоналне линеарне трансформације издвајају из изометрија управо условом $F(0) = 0$.

Следећа теорема је једна од најважнијих теорема које се односе на изометрије.

ТЕОРЕМА 1. (a) *Ако је T било која транслација и C било која ортогонална линеарна трансформација у простору R^3, тада је $F = T \circ C$ изометрија простора R^3.*

(б) *Ако је F произвољна изометрија простора R^3, тада постоји једна и само једна транслација T и једна и само једна ортогонална линеарна трансформација C, тако да је $F = T \circ C$.*

Доказ. (а) Нека је вектор транслације T једнак A, тј. $T(P) = A + P$ $(P \in R^3)$. Тада је

$$F(P) = (T \circ C)(P) = T(C(P)) = A + C(P).$$

Одавде је за произвољне векторе $P, Q \in R^3$ испуњено

$$\begin{aligned} |F(P) - F(Q)| &= |\,[A + C(P)] - [A + C(Q)]\,| = |C(P) - C(Q)| = \\ &= |C(P - Q)| = |P - Q|\,, \end{aligned}$$

па је F изометрија простора R^3.

(б) Нека је F произвољна изометрија простора R^3 и $C(P) = F(P) - F(0)$ $(P \in R^3)$. Тада је $C(P)$ изометрија простора R^3 и $C(0) = 0$. Према томе, на основу Става 3, C је ортогонална линеарна трансформација. Ако са T означимо транслацију у простору R^3 за вектор $F(0)$, непосредно добијамо да је

$$F(P) = F(0) + [F(P) - F(0)] = F(0) + C(P) = (T \circ C)(P).$$

Докажимо још јединственост транслације T и ортогоналне линеарне трансформације C у композицији $F = T \circ C$. У том циљу, претпоставимо да за извесну транслацију $\tilde{T}$ (за вектор $B \in R^3$) и ортогоналну трансформацију $\tilde{C}$ важи $F = \tilde{T} \circ \tilde{C}$, тј.

$$F(P) = B + \tilde{C}(P) \qquad (P \in R^3).$$

Тада је због линеарности пресликавања $\tilde{C}$ испуњено $\tilde{C}(0) = 0$, па је $F(0) = B + \tilde{C}(0) = B$, тј. $B = F(0)$. То значи да је тада $\tilde{T} = T$. Сада је $\tilde{C}(P) = F(P) - F(0) = C(P)$, тј. $\tilde{C} = C$, чиме је доказана јединственост пресликавања T и C. $\square$

Напомена. У приказу $F = T \circ C$ у општем случају је $T \circ C \neq C \circ T$. Поред тога, као што смо видели, из $F = T \circ C$ следи да је $T = T_{F(0)}$ и $C = (T_{F(0)})^{-1} \circ F = T_{-F(0)} \circ F$. Ове формуле служе за веома једноставно одређивање транслације T и ортогоналне трансформације C за коју је $F = T \circ C$.

Ако је F изометрија и $F = T \circ C$, тада се T зове *транслаторни део*, а C *ортогонални део* изометрије F. За произвољан вектор $P \in R^3$ тада је

$$F(P) = T_{F(0)} \circ C(P) = F(0) + C(P)\,. \tag{10}$$

СТАВ 4. *Изометрија F простора R^3 је линеарно пресликавање ако и само ако је $F(0) = 0$.*

Доказ. Ако је изометрија F линеарна, тада је на основу опште особине линеарних трансформација испуњено $F(0) = 0$.

Обратно, претпоставимо да је $F(0) = 0$. Тада из релације (10) налазимо да је

$$F(P) = C(P) \qquad (P \in R^3)\,,$$

а како је C линеарна трансформација, следи да је и изометрија F такође линеарна трансформација. $\square$

Поглавље 8

СПЕКТРАЛНА ТЕОРИЈА МАТРИЦА

1. Увод

У целом овом поглављу дискутоваћемо само спектралну теорију симетричних квадратних матрица малог реда, тј. реда 2 и реда 3.

Наводимо најпре основни став Алгебре.

СТАВ 1. *Сваки полином*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (a_0 \neq 0\,, n \in N)\,,$$

чији су коефицијенти реални или комплексни бројеви, поседује бар једну комплексну нулу, тј. постоји комплексан број λ *такав да је* $P(\lambda) = 0$.

Као последица овог става, доказује се да се сваки полином $P(x)$ $(x \in C)$ може факторизовати, тј. приказати у облику

$$P(x) = a_0(x - \lambda_1)\,(x - \lambda_2)\,\ldots\,(x - \lambda_n)\,,$$

при чему су $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нуле полинома $P(x)$ (необавезно различите).

Ако су даље $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \quad (r \leq n)$ све међусобно различите нуле полинома $P(x)$), и λ_k се у горњој факторизацији појављује тачно m_k пута $(k = 1, \ldots, r)$, тада је $m_1 + \cdots + m_r = n$ и

$$P(x) = a_0(x - \lambda_1)^{m_1}\,(x - \lambda_2)^{m_2}\,\ldots\,(x - \lambda_r)^{m_r}\,.$$

Бројеви $m_1\,, \ldots\,, m_r$ називају се *алгебарским вишеструкостима* нула $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ респективно.

2. Симетричне матрице реда 2

Нека је $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ произвољна *реална* квадратна матрица реда 2. Тада се развијањем детерминанте

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \qquad (\lambda \in C),$$

добија извесан полином другог степена:

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{1}$$

Одавде непосредно следи да су нуле овог полинома

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2}.$$

Како је израз $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2 \geq 0$, следи да овај полином увек има две реалне нуле. Оне су или различите или међусобно једнаке.

Напоменимо да је то испуњено за симетричне матрице, а да несиметричне матрице у општем случају не морају да имају реалне нуле.

Дефиниција 1. Полином (1) назива се *карактеристичним полиномом* матрице A, а његове нуле $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ *сопственим вредностима* те матрице. Једначина $P_2(\lambda) = 0$ назива се *карактеристичном једначином* матрице A.

Скуп свих сопствених вредности матрице A (укључујући и њихове вишеструкости), назива се *спектром* матрице A, и означава се са $\sigma(A)$. Дакле, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Пример. Ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, добијамо да је

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 7,$$

па су $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$ сопствене вредности матрице A.

У општем случају, имамо да је $\lambda_1 = \lambda_2$ ако и само ако је $a_{12} = 0$ и $a_{11} = a_{22}$, дакле ако и само ако матрица A има облик $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} =$

$a_{11}I_2$, при чему је $a_{11} \in R$ и I_2 је јединична матрица реда 2. Тада је $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11}$. У свим осталим случајевима је $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Нека је $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ симетрична матрица реда 2, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ њен спектар, и λ било која од њених сопствених вредности. Тада хомогени систем линеарних једначина по x_1, x_2

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

има детерминанту која је једнака нули, па увек поседује бар једно нетривијално решење x_1, x_2 ($x_1^2 + x_2^2 \neq 0$). Овај систем се очигледно може написати у матричном облику

$$AX = \lambda X,$$

при чему је $X = (x_1, x_2)^\top$.

Дефиниција 2. Сваки вектор $X = (x_1, x_2) \in R^2 \setminus \{0\}$ који задовољава систем (2) назива се *сопственим вектором који одговара сопственој вредности* λ. Скуп свих сопствених вектора који одговарају сопственој вредности λ (укључујући овде и 0), назива се *сопственим потпростором* матрице A који одговара сопственој вредности λ, и означава се са $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

Може се лако видети да је сопствени потпростор увек један потпростор простора R^2. Он је увек димензије 1 или димензије 2. Овај други случај наступа само ако је $\lambda_1 = \lambda_2$, и тада је $\mathcal{N}(A - \lambda I) = R^2$, тј. сваки вектор X простора R^2 ($X \neq 0$) је сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ.

Уведимо даље у простор R^2 скаларни производ са $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1 y_2)$,

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Тада из симетричности матрице A непосредно следи да за произвољне векторе $X, Y \in R^2$ важи једнакост

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle. \tag{3}$$

Обратно, ако за неку матрицу A реда 2 важи ова једнакост, тада није тешко видети да та матрица мора бити симетрична.

СТАВ 2. *Ако симетрична матрица A реда 2 има две различите сопствене вредности λ_1 и λ_2, и ако је X_1 било који сопствени вектор који одговара с.в. λ_1, а X_2 било који сопствени вектор који одговара с.в. λ_2, тада је $X_1 \perp X_2$.*

Доказ. Имамо да је на основу дефиниције $AX_1 = \lambda_1 X_1, AX_2 = \lambda_2 X_2$, па заменом у једнакости $\langle AX_1, X_2\rangle = \langle X_1, AX_2\rangle$, добијамо да је

$$\langle \lambda_1 X_1, X_2\rangle = \langle X_1, \lambda_2 X_2\rangle,$$

одакле је $\lambda_1\langle X_1, X_2\rangle = \lambda_2\langle X_1, X_2\rangle$. Како је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, одавде непосредно следи да је $\langle X_1, X_2\rangle = 0$, дакле $X_1 \perp X_2$. $\square$

Одавде следи да су једнодимензионални потпростори $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I)$ и $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I)$ међусобно ортогонални, па се то означава и са $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I) \perp \mathcal{N}(A - \lambda_2 I)$. Одавде такође непосредно следи и да је

$$\mathcal{N}(A - \lambda_1 I) \oplus \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = R^2.$$

Одавде непосредно добијамо следећи став.

СТАВ 3. *Ако је A произвољна реална симетрична матрица реда 2, тада постоји ортонормирана база простора R^2, чији су сви вектори сопствени вектори матрице A.*

Наиме, ако је $\lambda_1 = \lambda_2$, тада за векторе E_1, E_2 можемо да узмемо било која два јединична, међусобно ортогонална вектора простора R^2, а ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тада за вектор E_1 можемо да узмемо било који јединични вектор из сопственог потпростора $\mathcal{N}(A-\lambda_1 I)$, а за E_2 било који јединични вектор из сопственог потпростора $\mathcal{N}(A-\lambda_2 I)$. Тада је као што смо видели $E_1 \perp E_2$.

Напоменимо да се случај када је $\lambda_1 = \lambda_2$ обично сматра "неинтересантним", па се често искључује из разматрања. Став 3 се обично назива и Ставом о главним осама.

У вези Става 3, наводимо још један став који се назива *матричним обликом става о главним осама.*

СТАВ 4. *Ако је A реална симетрична матрица реда 2 чији је спектар $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, тада постоји бар једна ортогонална матрица P реда 2* *таква да је*

$$P^{-1}AP = P^{\top}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Доказ. На основу Става 3, постоји ортонормирана база $\{V_1, V_2\}$ простора R^2 образована од сопствених вектора матрице A који одговарају сопственим вредностима λ_1, λ_2. Дакле испуњено је

$$\langle V_i, AV_j\rangle = \langle V_i, \lambda_j V_j\rangle = \lambda_j \delta_{ij}\,, \tag{4}$$

за свако $i, j = 1, 2$.

Уочимо сада матрицу P чије су *колоне* вектори V_1, V_2, тј. ако је $V_j = (v_{1j}, v_{2j})$, тада је

$$P = [p_{ij}] = [v_{ij}] \qquad (i, j = 1, 2).$$

Ако ставимо $B = P^{\top}AP = [b_{ij}]$, тада се лако може видети да је

$$b_{ij} = \langle V_i, AV_j\rangle \qquad (i, j = 1, 2).$$

Применом релације (4) одавде следи да је

$$B = [b_{ij}] = [\lambda_j \delta_{ij}] = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Још треба доказати да је P ортогонална матрица. Имаћемо непосредно да је

$$(P^{\top}P)_{ij} = \langle V_i, V_j\rangle = \delta_{ij},$$

одакле је $P^{\top}P = I$. Као што је показано у Поглављу III, тада је и $PP^{\top} = I$, па је P ортогонална матрица. Тиме је тврђење доказано. □

Сада ћемо кратко поновити поступак налажења бар једне *ортонормиране базе* простора R^2 састављене од сопствених вектора реалне симетричне матрице реда 2.

Претпостављамо да је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тј. $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$.

Уочимо најпре сопствену вредност $\lambda = \lambda_1$. Тада одговарајући сопствени вектор $X_1 = (x_1, x_2)^{\top} \in R^2$ налазимо из хомогеног система линеарних једначина

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda_1)x_2 &= 0 \end{aligned}\,. \tag{5}$$

За вектор X_1 узећемо било које ненула решење система (5), а затим ћемо дефинисати вектор $V_1 = X_1/|X_1|$.

Решавањем сличног система линеарних једначина за сопствену вредност $\lambda = \lambda_2$, налазимо известан сопствени вектор $X_2 \neq 0$, који одговара сопственој вредности λ_2. После тога, узећемо $V_2 = X_2/|X_2|$. Тада је V_1 сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_1, V_2 сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_2, и вектори $\{V_1\,, V_2\}$ образују *ортонормирану базу* простора R^2.

3. Симетричне матрице реда 3

У овом поглављу ћемо укратко описати најважније особине спектралне теорије симетричних матрица реда 3. Напомињемо да несиметричне матрице у општем случају не поседују многе од тих особина.

Уочимо било коју реалну симетричну матрицу реда 3. Она је облика

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},$$

за извесне реалне бројеве $a_{11}\,, a_{12}\,, a_{13}\,, a_{22}\,, a_{23}\,, a_{33}$.

Тада се полином трећег степена по λ

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix},$$

назива *карактеристичним полиномом* матрице A.

Он, под претпоставком да је матрица A симетрична, има све нуле реалне, и одговарајућа једначина

$$P_3(\lambda) = 0$$

назива се *карактеристичном једначином* за матрицу A.

Нуле те карактеристичне једначине $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називају се *сопственим вредностима матрице* A, а низ $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ назива се *спектром те матрице*.

Ако је λ сопствена вредност симетричне матрице A, тада се било који вектор $X \neq 0$ такав да је $AX = \lambda X$ назива *сопственим вектором који одговара тој сопственој вредности*.

Показује се да за свако $\lambda \in \sigma(A)$ увек постоји бар један такав сопствени вектор.

Ако $\lambda \in \sigma(A)$, тада скуп свих сопствених вектора који одговарају сопственој вредности λ (укључујући овде и вектор 0) образује тзв. *сопствени потпростор који одговара тој сопственој вредности* и он се означава са $\mathcal{N}(A-\lambda I)$ $(I=I_3)$. Сваки такав сопствени потпростор је димензије 1, 2 или 3.

Пример 2. Уочимо симетричну матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Одговарајући карактеристични полином матрице A гласи:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -\lambda^3+11\lambda^2-36\lambda+36= \\ &= -(\lambda-2)\,(\lambda-3)\,(\lambda-6). \end{aligned}$$

Одавде је $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ и $\lambda_3=6$, а одговарајући сопствени вектори биће на пример

$$\begin{aligned} &V_1=(0\,,\sqrt{2}/2\,,-\sqrt{2}/2) \quad , \quad V_2=(\sqrt{3}/3\,,\sqrt{3}/3\,,\sqrt{3}/3)\,, \\ &V_3=(2\sqrt{6}/6\,,-\sqrt{6}/6\,,-\sqrt{6}/6). \end{aligned}$$

Слично као и код симетричних матрица реда 2, може се доказати да важи следећи општи став.

СТАВ 5. *Ако симетрична матрица A реда 3 има две различите сопствене вредности λ_1 и λ_2, и ако је X_1 било који сопствени вектор који одговара с.в. λ_1, а X_2 било који сопствени вектор који одговара с.в. λ_2, тада је $X_1 \perp X_2$.*

Другим речима, имамо да су сопствени потпростори $\mathcal{N}(A-\lambda_1 I)$ и $\mathcal{N}(A-\lambda_2 I)$ међусобно ортогонални, тј. важи $\mathcal{N}(A-\lambda_1 I)\perp\mathcal{N}(A-\lambda_2 I)$.

Из овог става, непосредно добијамо следећи *став о главним осама* за симетричне матрице реда 3.

СТАВ 6. *Ако је A произвољна реална симетрична матрица реда 3, тада постоји ортонормирана база простора R^3, чији су сви вектори сопствени вектори матрице A.*

Следећи став се назива *матричним обликом става о главним осама.*

СТАВ 7. *Ако је A реална симетрична матрица реда 3 чији је спектар $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, тада постоји бар једна ортогонална матрица P реда 3 таква да је*

$$P^{-1}AP = P^{\top}AP = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Слично као и за симетричне матрице реда 2, ортогоналну матрицу P одређујемо тако што за њене колоне узимамо компоненте сопствених вектора који одговарају њеним сопственим вредностима $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Поново ћемо укратко описати поступак налажења *ортонормиране базе* простора R^3 састављене од сопствених вектора матрице A.

Уочимо било коју симетричну матрицу A реда 3 и означимо њен спектар са $\sigma(A) = \{\lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3\}$. С обзиром на међусобни однос сопствених вредности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, разликоваћемо неколико случајева.

(а) Све сопствене вредности матрице A су међусобно једнаке;

(б) Све сопствене вредности матрице A су међусобно различите;

(ц) Спектар $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ има само две међусобно различите сопствене вредности.

По аналогији са симетричним матрицама реда 2, случај (а) сматрамо неинтересантним, јер за одговарајући ортонормирани систем састављен од сопствених вредности посматране матрице можемо узети било који скуп ортонормираних вектора простора R^3, на пример стандардну базу $\{E_1, E_2, E_3\}$.

Случај (б). Претпоставимо да је λ било која од сопствених вредности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Тада решавањем одговарајућег хомогеног система линеарних једначина

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

одређујемо било који одговарајући сопствени вектор $X \neq 0$. Нормирањем овако добијених вектора, добијамо једну тражену *ортонормирану базу*

$$V_1 = X_1/|X_1|\,,\; V_2 = X_2/|X_2|\,,\; V_3 = X_3/|X_3|$$

простора R^3.

Случај (ц). Нека је на пример $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Тада посматрамо најпре одговарајући хомогени систем (6) за вредност $\lambda = \lambda_1$, одређујемо било које његово решење $X_1 \neq 0$, и дефинишемо вектор $V_1 = X_1/|X_1|$.

Затим примењујемо сличан поступак за сопствену вредност $\lambda = \lambda_3$, чиме добијамо јединични вектор V_3. Тада је познато да је $V_2 = V_3 \times V_1$ један јединични вектор простора R^3, који одговара сопственој вредености λ_2. Тако добијени скуп вектора $\{V_1, V_2, V_3\}$ представља једну *ортонормирану базу* простора R^3, која одговара сопственим вредностима $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1$ и λ_3.

Поглавље 9

ПОВРШИ ДРУГОГ РЕДА

1. Неке површи другог реда

Под *површи другог реда* подразумевамо скуп свих тачака $M(x, y, z)$ у простору R^3 чије координате задовољавају неку једначину другог реда облика

$$(*) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

при чему су $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$ дати реални бројеви и бар један од бројева a_{11}, a_{22}, a_{33} је различит од нуле.

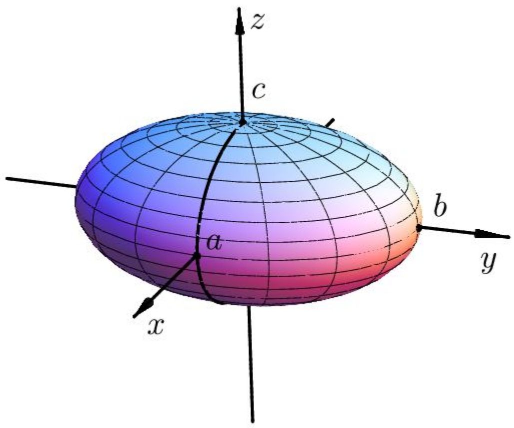
Најпре ћемо навести неке карактеристичне површи другог реда.

1. **Елипсоид.** Ако су a, b, c дати позитивни бројеви, тада се површ чија је једначина

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

назива *елипсоидом* у простору R^3. Бројеви a, b, c називају се полуосама елипсоида, и очигледно представљају одсечке које он одсеца на координатним равнима. Елипсоид је представљен на Слици 9.1.

Ако у једначини елипсоида ставимо да је $z = 0$, добијамо једначину $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Одавде закључујемо да је пресек елипсоида и координатне равни Oxy елипса чија је једначина $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

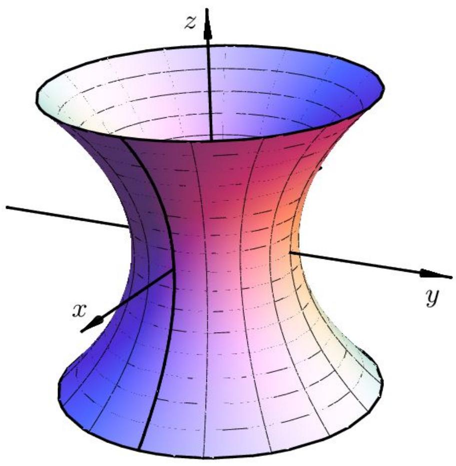


Слика 9.1

2. **Једнокрилни хиперболоид.** Ако су a, b, c дати позитивни бројеви, тада се површ чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2}$$

назива *једнокрилним хиперболоидом* у простору R^3. Ова површ представљена је на Слици 9.2.

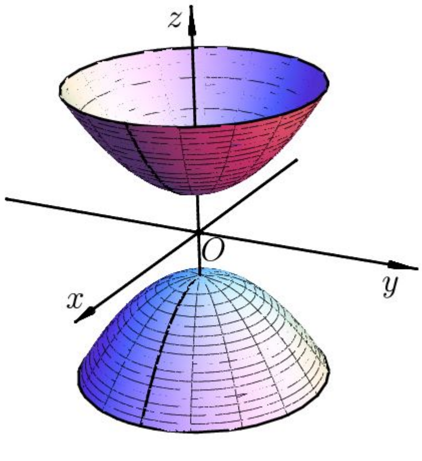


Слика 9.2

3. **Двокрилни хиперболоид.** Површ чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{3}$$

назива се *двокрилним хиперболоидом* у простору R^3. Ова површ представљена је на Слици 9.3.

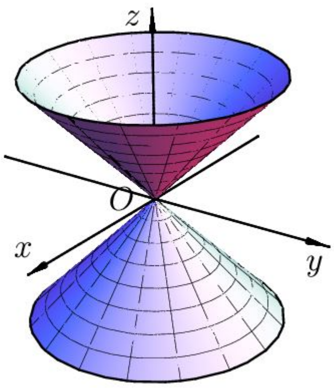


Слика 9.3

4. **Елиптички конус.** Површ чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \tag{4}$$

назива се *елиптичким конусом* у простору R^3. Ова површ представљена је на Слици 9.4.

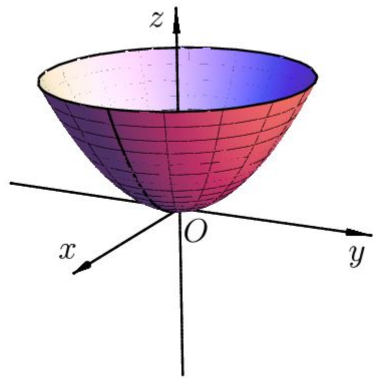


Слика 9.4

5. **Елиптички параболоид.** Ако су a, b, c дати позитивни бројеви, тада се површ чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz \tag{5}$$

назива *елиптичким параболоидом* у простору R^3. Он је представљен на Слици 9.5.

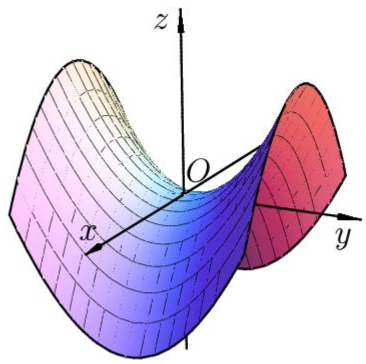


Слика 9.5

6. **Хиперболички параболоид.** Ако су a, b позитивни бројеви и $c \neq 0$, тада се површ чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2cz \tag{6}$$

назива *хиперболичким параболоидом* у простору R^3. Ова површ је за $c > 0$ представљена на Слици 9.6.

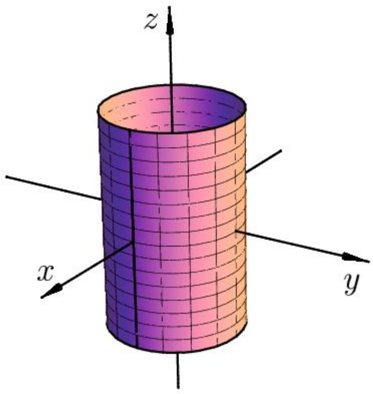


Слика 9.6

7. **Елиптички цилиндар.** Ако су a, b произвољни позитивни бројеви, тада се површ чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

назива *елиптичким цилиндром* у простору R^3. Ова површ представљена је на Слици 9.7.

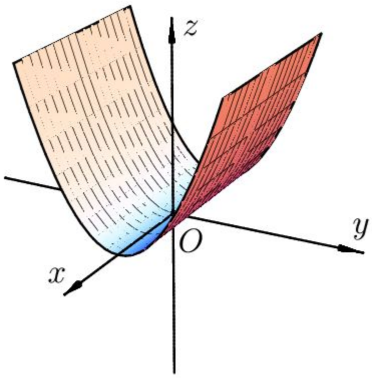


Слика 9.7

8. **Параболички цилиндар.** Ако је $a \neq 0$ произвољан број, тада се површ чија је једначина

$$z = ay^2 \tag{8}$$

назива *параболичким цилиндром* у простору R^3. Ова површ је за $c > 0$ представљена на Слици 9.8.

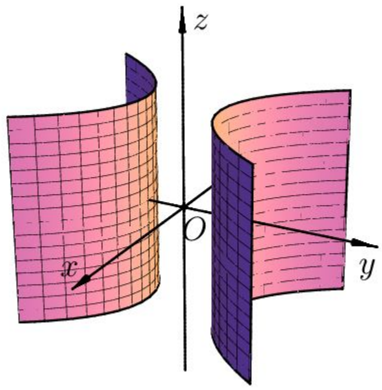


Слика 9.8

9. **Хиперболички цилиндар.** Ако су a, b позитивни бројеви, тада се површ чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

назива *хиперболичким цилиндром* у простору R^3. Ова површ представљена је на Слици 9.9.



Слика 9.9

Осим тога приметимо да једначина другог реда $(*)$ може да представља *две равни које се секу*, *две паралелне равни*, *две подударне равни*, *једну јединствену тачку*, или пак *празан скуп тачака*.

На пример, једначина $x^2-y^2=0$ очигледно је еквивалентна са условом $x=y$, и $x=-y$, па представља две равни које се секу.

Једначина $z^2=1$ очигледно је еквивалентна са условима $z=1$ и $z=-1$, па представља две паралелне равни.

Једначина $z^2=0$ еквивалентна је са условом $z=0$ (узетим двапут), па представља само једну равну $z=0$, односно пар подударних равни. Очигледно се те равни поклапају са координатном равни Oxy.

Једначина $x^2+y^2+z^2=0$ очигледно је еквивалентна са условом $x=y=z=0$, па одређује једну једину тачку простора $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Најзад, једначина $x^2+y^2+z^2=-1$ није задовољена ни за једну тачку $(x,y,z)\in R^3$, па се одговарајућа површ другог реда своди на празан скуп тачака.

10. **Класификација површи другог реда.** Сада ћемо навести једну општу теорему којом се класификују све могуће површи другог реда у простору R^3.

ТЕОРЕМА 1. *Произвољна површ другог реда чија је једначина* $(*)$, *у погодно изабраном координатном систему, представља један од следећих скупова тачака:*

(1^0) *Елипсоид*; (2^0) *Елиптички параболоид*;

(3^0) *Хиперболички параболоид*; (4^0) *Елиптички цилиндар;*

(5^0) *Параболички цилиндар*; (6^0) *Хиперболички цилиндар*;

(7^0) *Елиптички конус*; (8^0) *Једнокрилни хиперболоид*;

(9^0) *Двокрилни хиперболоид*; (10^0) *Пар равни које се секу*;

(11^0) *Пар паралелних равни*; (12^0) *Пар подударних равни*;

(13^0) *Једну јединствену тачку*; (14^0) *Празан скуп тачака.*