ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 2, 03.09.2021.

1. a) Navesti uslove koje zadovoljava struktura $(G, *)$ tako da:

i)$\boxed{2}$ $(G, *)$ je Abelova grupa,

ii)$\boxed{1}$ $(G, *)$ je beskonačna ciklična grupa.

$\boxed{2}$ b) Dokazati: U svakoj konačnoj grupi red bilo kog njenog elementa deli red grupe.

$\boxed{2}$ v) Pokazati da struktura $(\mathbb{Z}, +_4, \cdot_4)$ nije integralni domen.

$\boxed{1}$g)Preslikavanje $f : P \to S$ je homomorfizam prstena $(P, +, \cdot)$ i $(S, *, \Box)$ ako važi $\cdots$

$\boxed{1}$ d) Definisati karakteristiku polja.

$\boxed{1}$ e) Element $a \neq 0$ je levi delilac nule prstena $(P, +, \cdot)$ ako $\cdots$

2. a) $\boxed{2}$ a)Dokazati: Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

$\boxed{2}$ b) Napisati Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog delioca celih brojeva 224 i 384.

$\boxed{2}$ v) Ako je $a = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11^5$ i $b = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11^4$, odrediti $NZD(a, b)$, $NZS(a, b)$ $\tau(a)$ i $\varphi(b)$.

$\boxed{2}$ g) Odrediti ostatak pri deljenju broja 222^{333} sa 7.

3.$\boxed{2}$ a) Odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ polinomom $x - 1$.

$\boxed{2}$ b) Napisati Vietove formule za polinom $P(x) = 3x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 3x - 12$.

$\boxed{3}$ v) Dokazati: Ako je $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ polinom sa celobrojnim koeficijentima i $z = \dfrac{p}{q}$ koren polinoma P, pri čemu je $NZD(p, q) = 1$, tada $p|a_0$ i $q|a_n$.

4. $\boxed{2}$ a) Navesti Kramerova pravila za rešavanje sistema od n linearnih jednačina sa n nepoznatih (homogenog i nehomogenog).

$\boxed{1}$ b) Izračunati determinantu

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

razvijanjem po elementima treće kolone.

$\boxed{1}$ g) $\det(A \cdot A^{-1}) =$

$\boxed{1}$ d) Ako je A kvadratna matrica reda n i $k \in \mathbb{R}$ proizvoljan realni broj, tada je $\det(kA) =$

$\boxed{1}$ $\det(A^T) =$

5. $\boxed{1}$ a) Napisati definiciju baze vektorskog prostora X $(X \neq \{O\})$.

$\boxed{2}$ b) Ako su U i W potprostori vektorskog prostora V, dokazati da je i nihov zbir $U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$ takođe potprostor prostora V.

$\boxed{2}$ v) Neka su $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$ dva proizvoljna vektora prostora $\mathbb{R}^3$. Napisati kako se određuje pravac i smer vektora $A \times B$ i predstaviti vektor $A \times B$ u vidu odgovarajuće determinante.

$\boxed{1}$ g) Izraziti mešovite proizvode $[B, C, A]$ i $[C, B, A]$ preko mešovitog proizvoda $[A, B, C]$.

$\boxed{3}$ d) Dati su vektori $\overrightarrow{a} = (-2, 5, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-2, 0, 3)$ i $\overrightarrow{c} = (11, 6, -8)$. Odrediti vektor $\overrightarrow{d}$ tako da je $\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{b} = 2$ i $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{d} = \overrightarrow{c}$.

6. $\boxed{1}$ a) Ugao između pravih $l_1 = (A_1, \overrightarrow{P})$ i $l_1 = (A_2, \overrightarrow{Q})$ određuje se $\cdots$

$\boxed{1}$ v) Napisati formulu kojom se određuje rastojanje tačke $A(x_0, y_0, z_0)$ od ravni $\alpha : ax + by + cz = d$.

g) Neka su date tačke $P(4, -1, 3)$ i $Q(5, -2, -1)$ i ravan $\alpha : x + z - 5 = 0$.

$\boxed{2}$ i) Odrediti jednačinu normale iz tačke Q na ravan α.

$\boxed{1}$ ii) Napisati jednačinu prave p određene tačkama P i Q.

7. $\boxed{3}$ a) Dati definiciju stabla i komplementa grafa, a zatim nacrtati stabla P_5 i $K_{1,3}$ i odrediti njihove komplemente.

$\boxed{2}$ b) Nacrtati grafove K_4 i C_5 i odrediti hromatski broj svakog od njih;