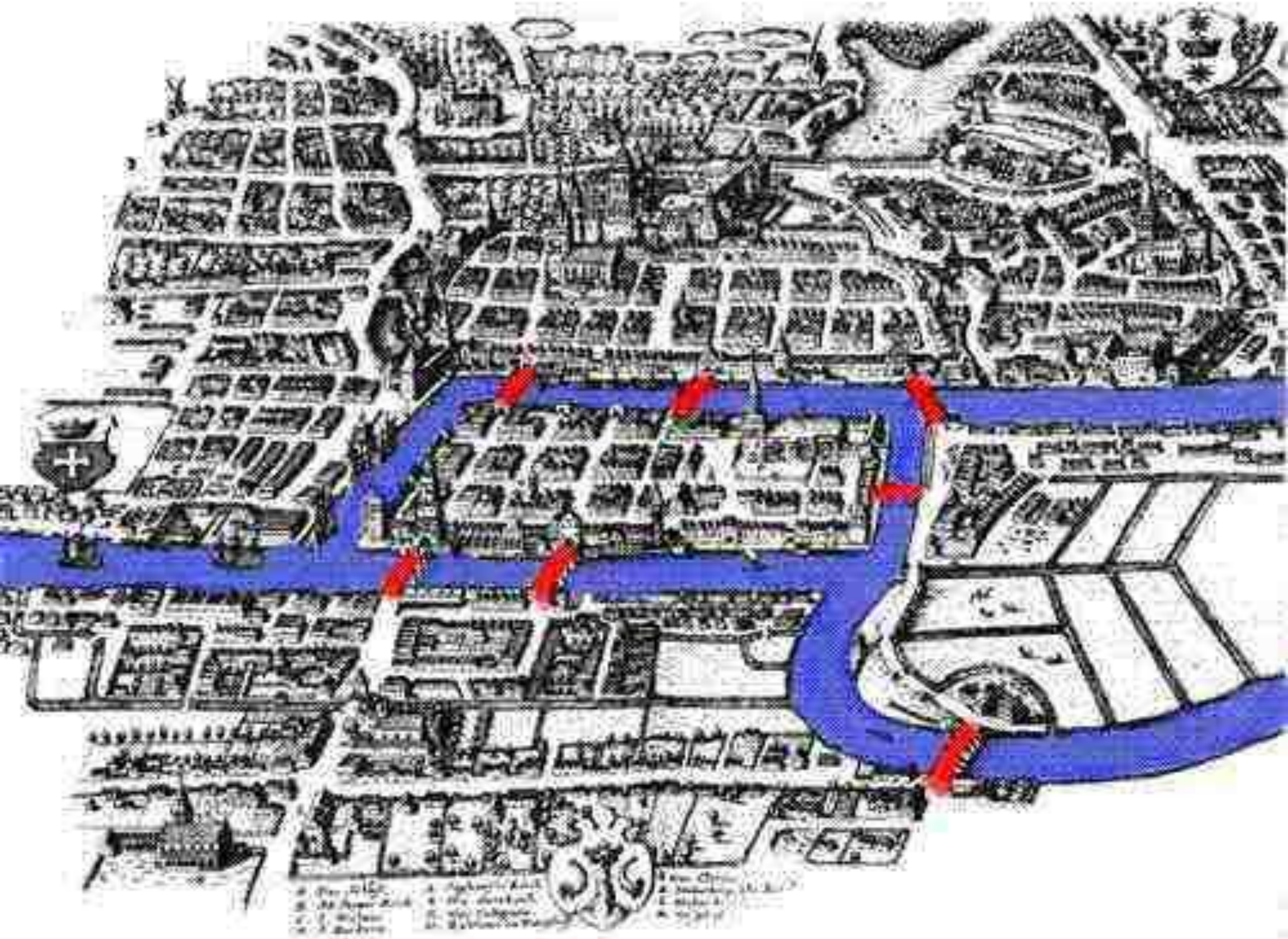
Matematika 2

dr Bojana Borovićanin

2022.

3. TEORIJA GRAFOVA



3.1 OSNOVNI POJMOVI

Grafovi

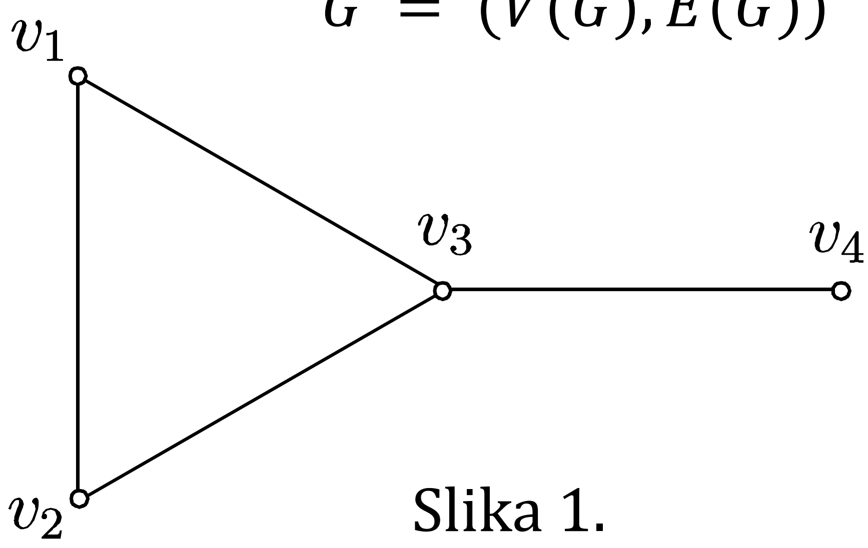
<u>Definicija 1.</u>

Graf G je uređen par $(V(G), E(G))$, gde je $V(G)$ konačan neprazan skup elemenata koji se zovu čvorovi, a $E(G)$ je konačan skup različitih neuređenih parova različitih elemenata skupa $V(G)$ koji se zovu grane.

Graf G se može geometrijski predstaviti crtežom u ravni. Čvorovi grafa se predstavljaju tačkama ravni, a grane grafa linijama koje povezuju odgovarajuće čvorove.

Grafovi

$$G = (V(G), E(G))$$



Slika 1.

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

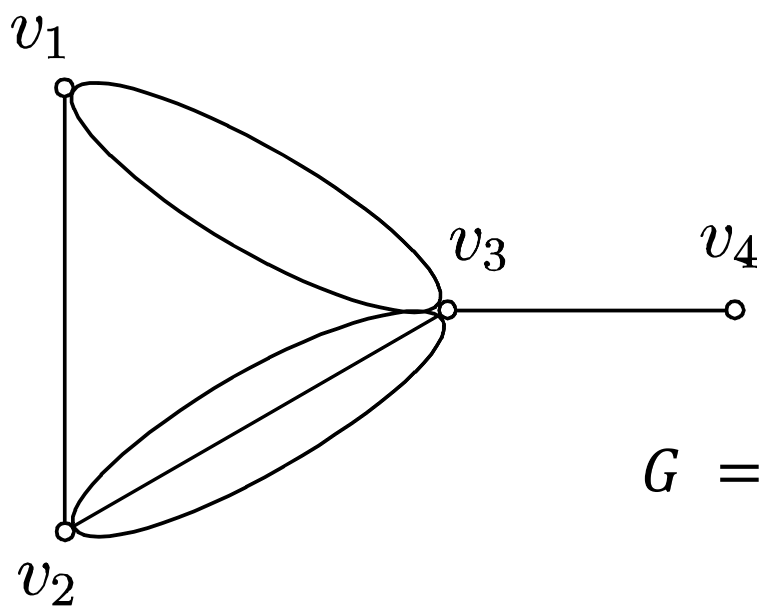
$$E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$$

Grafovi

Ako u definiciji 1 izostavimo ograničenje da grane moraju biti različite tada se odgovarajući matematički objekat zove ***multigraf*** (slika 2). Dve ili više grana koje spajaju isti par čvorova zovu se ***višestruke grane***.

Ako u definiciji 1 takođe izostavimo ograničenje da grane moraju da spajaju različite čvorove i dopustimo mogućnost postojanja ***petlji***, tada se odgovarajući matematički objekat naziva ***pseudograf*** (slika 3).

Grafovi - multigraf



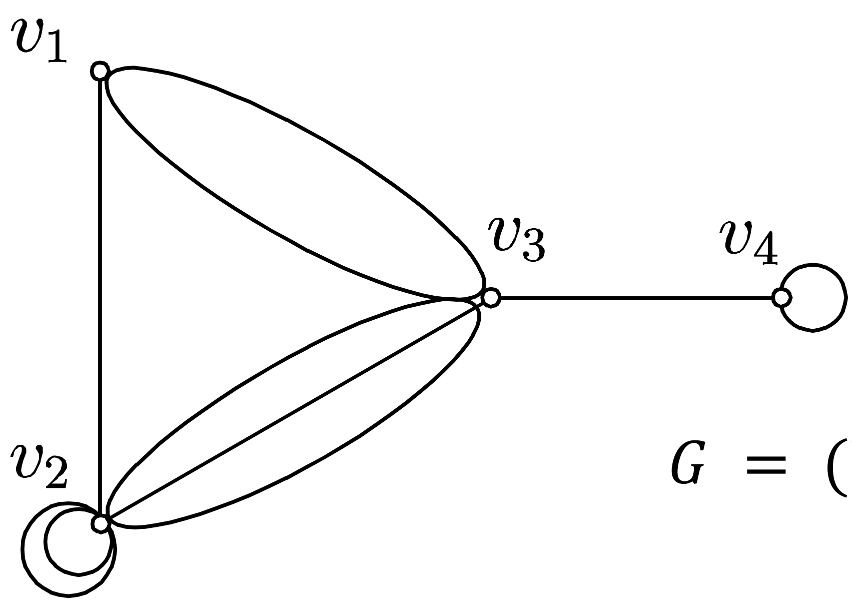
$G = (V(G), E(G))$

Slika 2.

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$

Grafovi - pseudograf



$G = (V(G), E(G))$

Slika 3.

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\},$
$\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_4\}\}$

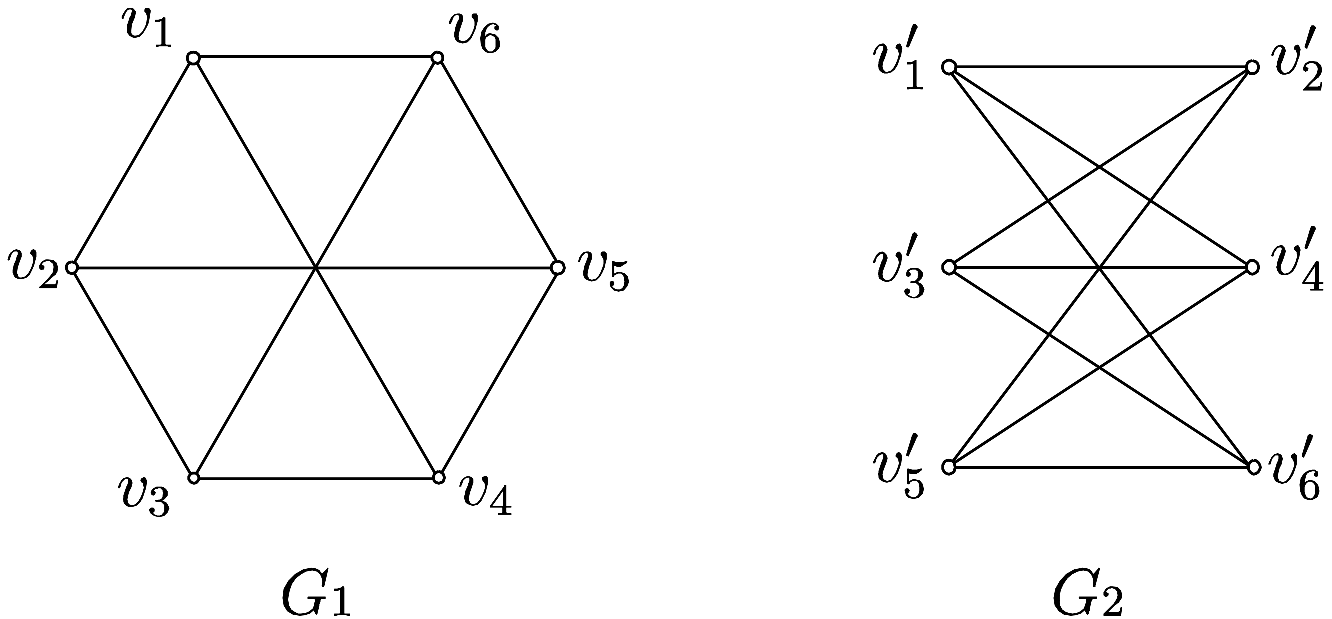
Izomorfizam grafova

Definicija 2. Dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su ***izomorfna*** (oznaka $G_1 \cong G_2$) ako postoji bijekcija $f: V_1 \to V_2$ koja održava osobinu susednosti čvorova, tj.

$$(\forall\, v, w \in V_1)(vw \in E_1 \Leftrightarrow f(v)f(w) \in E_2)\,.$$

Iz same definicije je očigledno da su izomorfni grafovi, u stvari, isti grafovi, ali različito predstavljeni odnosno nacrtani. Zbog toga je značajno pitanje kako se može prepoznati graf, tj. kako se može utvrditi da li su dva grafa izomorfna. Problem izomorfizma grafova je izuzetno težak i do danas nije poznat odgovarajući algoritam bitno različit od neposrednog proveravanja.

Izomorfizam grafova



Slika 4.

$G_1 \cong G_2$:

$$f = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_6 \\ v_1' & v_2' & \ldots & v_6' \end{pmatrix}$$

Grafovi

Stepen čvora v, u oznaci $d(v)$, jednak je broju grana koje su sa čvorom v incidentne.

Za graf G sa slike 1. je $d(v_1) = d(v_2) = 2,\ d(v_3) = 3$ i $d(v_4) = 1$.

Teorema 1. Neka je G graf sa n čvorova i m grana. Tada važi

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2m.$$

Teorema 2. (Teorema o rukovanju)

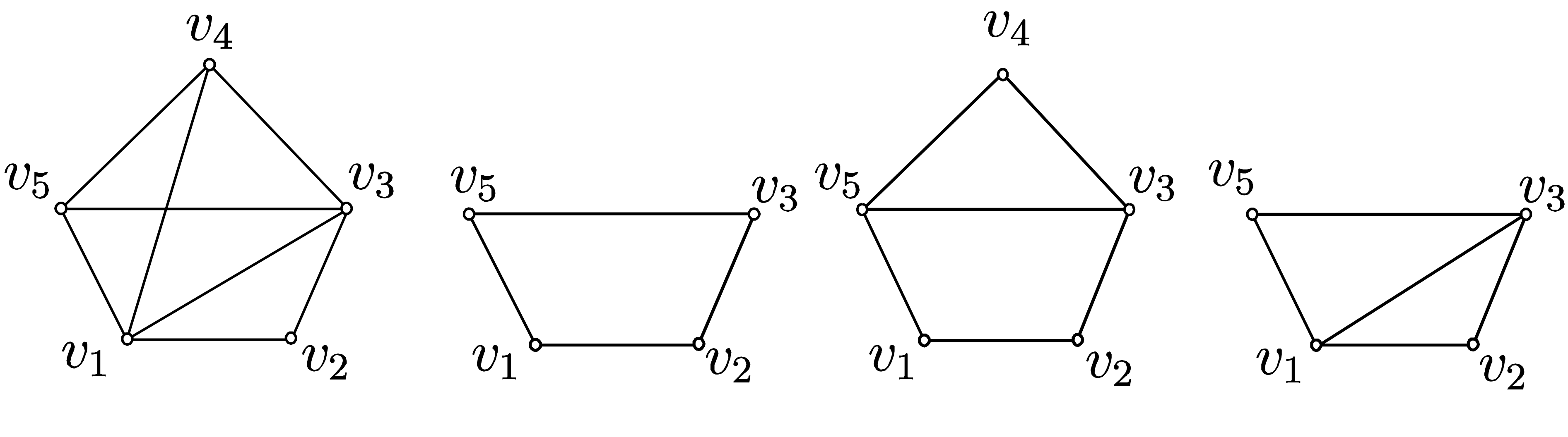
Broj čvorova neparnog stepena je u svakom grafu paran.

Podgrafovi

Definicija 3. Neka su $G = (V, E)$ i $G_1 = (V_1, E_1)$ dva grafa. Graf G_1 je ***podgraf*** grafa G, u oznaci $G_1 \subseteq G$, ako i samo ako $V_1 \subseteq V$ i $E_1 \subseteq E$. Ako je $V_1 = V$, tada se graf G_1 naziva ***razapinjući podgraf*** grafa G.

Neka je V_1 proizvoljan neprazan podskup skupa V. Za graf H, čiji je skup čvorova V_1 i u kome su dva čvora susedna ako i samo ako su susedni u grafu G, kaže se da je ***indukovan skupom*** V_1. Graf H se naziva ***indukovani podgraf*** grafa G. Graf H_2 na slici 5 je indukovani podgraf grafa G indukovan skupom čvorova $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$.

Podgrafovi

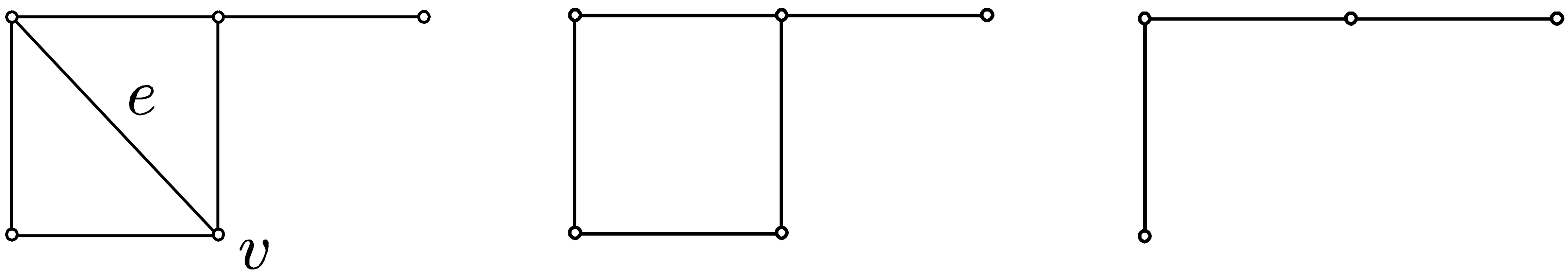


G H H_1 H_2

Slika 5.

Na slici 5 prikazani su graf G, njegov podgraf H, razapinjući podgraf H_1 i indukovani podgraf H_2.

Podgrafovi



G $\qquad$ $G - e$ $\qquad$ $G - v$

Slika 6.

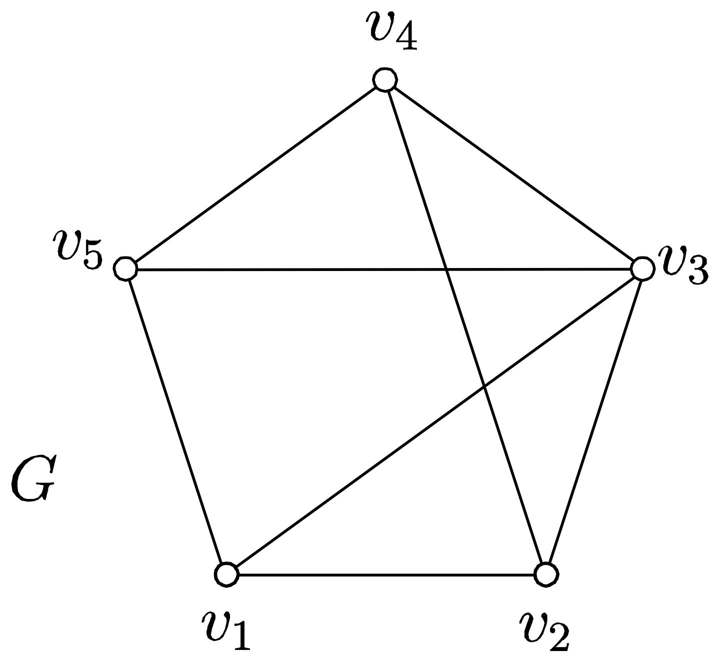
Putevi i konture

Niz grana oblika $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{r-1}v_r$ grafa G ili skraćeno $W = v_0\ v_1\ v_2\ \dots\ v_{r-1}\ v_r$ zove se ***šetnja*** dužine r u grafu G. čvor v_0 zove se početni, a čvor v_r završni čvor šetnje.

Ako su sve grane šetnje $v_0 v_1\ \dots\ v_r$ različite ona se zove ***staza*** dužine r. Ako su svi čvorovi šetnje (a samim tim i sve grane) različiti, tada se šetnja zove ***put*** (ili otvoreni put) dužine r.

Ako su v i w čvorovi grafa G, dužina najkraćeg puta između njih zove se ***rastojanje*** između čvorova v i w i označava se sa $d(v, w)$. Najveće rastojanje između dva čvora u grafu G zove se ***dijametar*** grafa G i označava se sa $d(G)$.

Putevi i konture

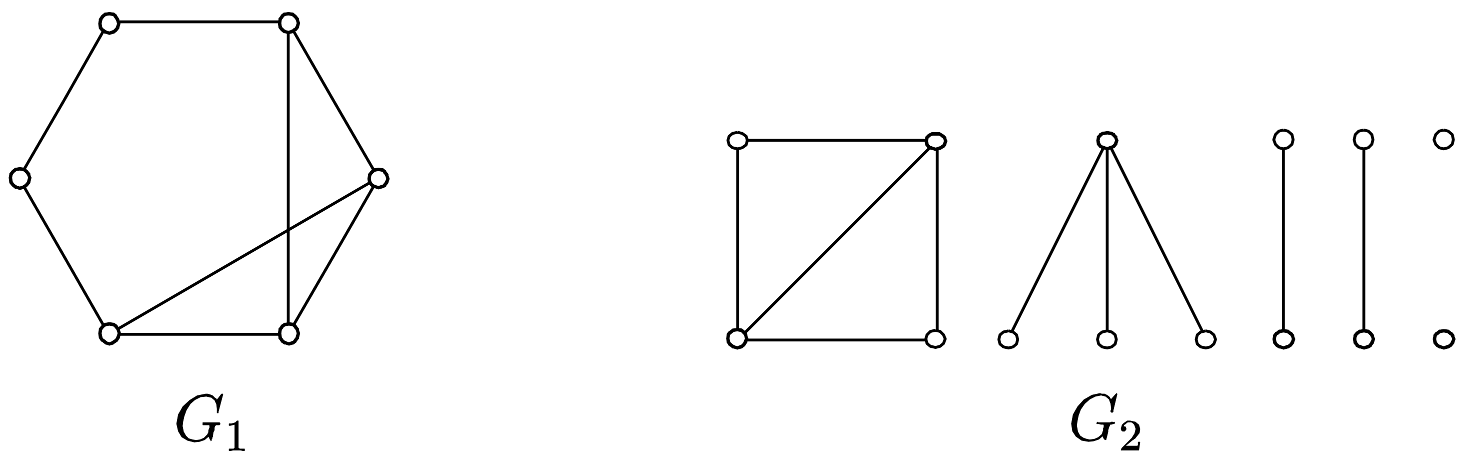


Slika 7.

U grafu G na slici 7 $v_1\ v_3\ v_4\ v_3\ v_1$ je jedna ***zatvorena šetnja*** dužine 4, a $v_1\ v_2\ v_3 v_1$ kontura dužine 3.

Povezanost grafa

<u>**Definicija 4.**</u> Graf G je ***povezan*** ako se svaka dva njegova čvora mogu povezati putem. Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je ***nepovezan***.



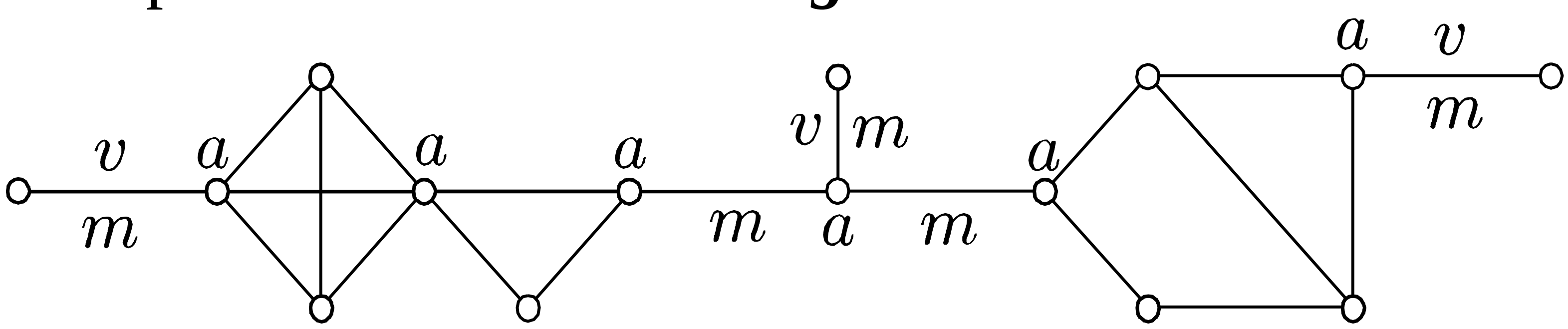
Slika 8.

Graf G_1 je povezan, a graf G_2 nepovezan. Graf G_2 ima šest komponenti povezanosti.

Povezanost grafa

Definicija 5. ***Artikulacioni čvor*** grafa je čvor čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenata grafa.

Definicija 6. ***Most*** grafa je grana čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenata grafa. Grana koja je incidentna sa čvorom stepena 1 naziva se ***viseća grana***.



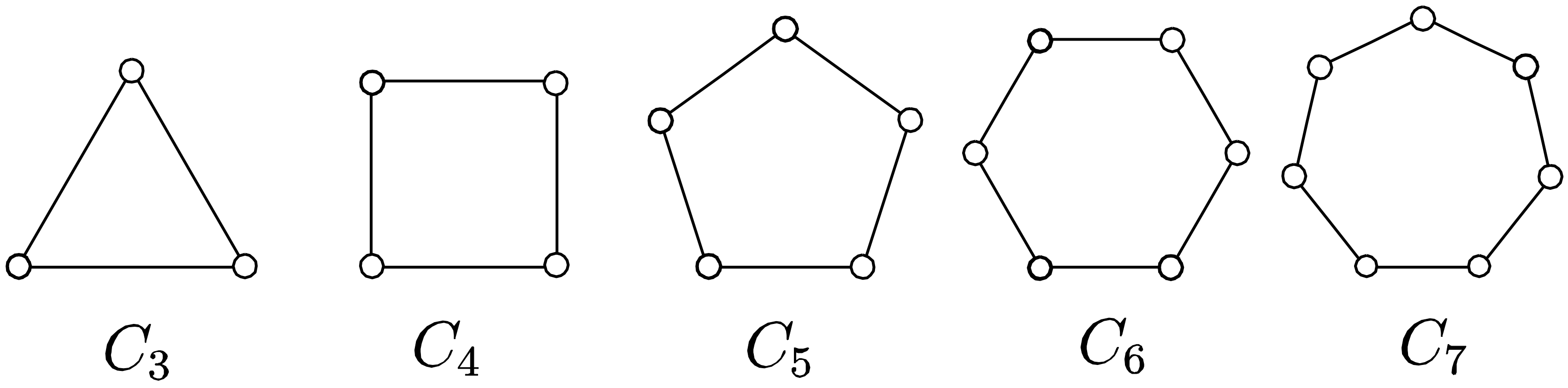
Slika 9.

Za graf na slici 9 označeni su sa a, m, v redom artikulacioni čvorovi, mostovi i viseće grane.

Specijalni grafovi

Ako su svi čvorovi grafa G stepena r, tada se G zove regularan graf stepena r.

Posebno su interesantni regularni grafovi stepena dva. Oni se nazivaju ***konture***. Oznaka za konturu sa n čvorova je C_n. Na slici 10 prikazane su konture C_3, C_4, C_5, C_6 i C_7.

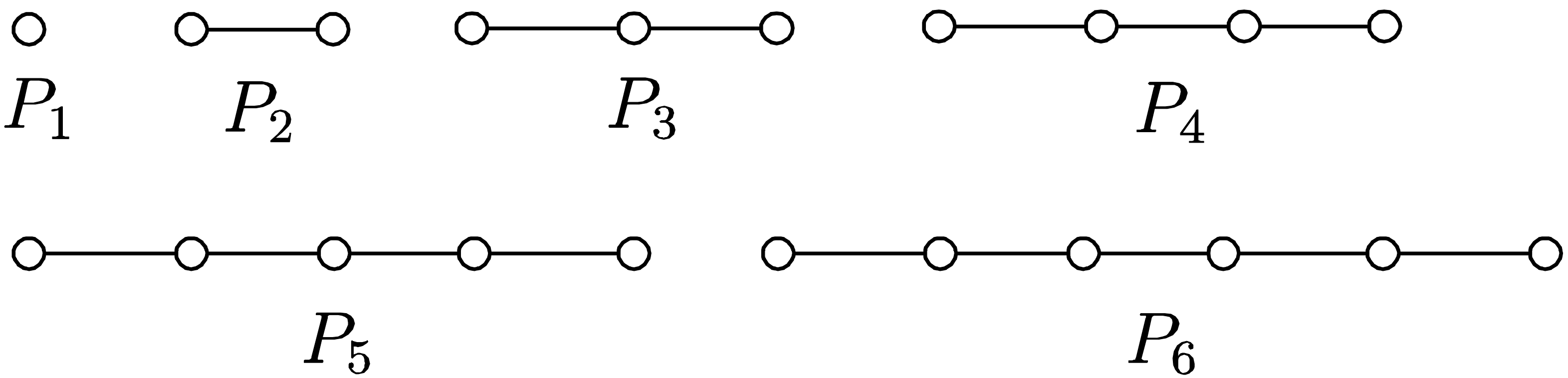


Slika 10.

Specijalni grafovi

Graf koji ne sadrži nijednu konturu kao podgraf naziva se ***šuma***. Ako je graf, uz to, povezan, on se naziva ***stablo***.

Stablo u kojem nijedan čvor nema stepen veći od dva naziva se ***put***. Put sa n čvorova obeležava se sa P_n. Na slici 11 prikazano je prvih šest puteva.



Slika 11.

Specijalni grafovi

Kompletan graf sa n čvorova, u oznaci **Kn**, je graf u kome su svaka dva čvora susedna.

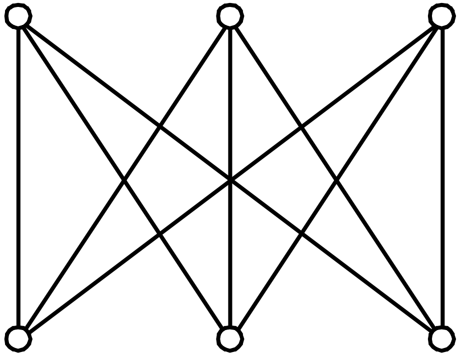
To je regularan graf stepena n-1, čiji je broj grana jednak $\binom{n}{2}$.

Zadatak. Nacrtati kompletne grafove sa 3, 4 i 5 čvorova.

Specijalni grafovi

Bipartitan graf je graf čiji se skup čvorova moze razbiti na dva disjunktna skupa (partitivni skupovi) na takav način da svaka grana spaja čvor prvog skupa sa čvorom drugog skupa. ***Kompletan bipartitan graf*** je bipartitan graf kod koga je svaki čvor prvog skupa susedan sa svakim čvorom drugog skupa. Ako partitivni skupovi sadrže r i s čvorova, respektivno, tada se kompletan bipartitan graf označava sa $K_{r,s}$.

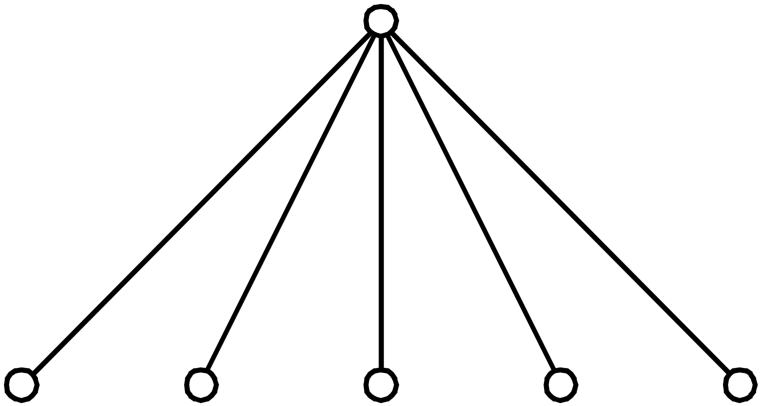
$K_{3,3}$



Slika 12.

Specijalni grafovi

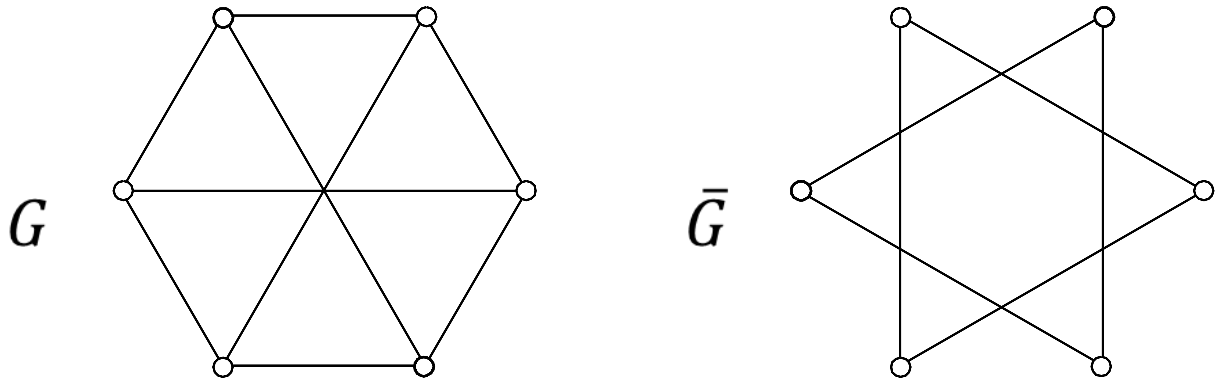
Kompletan bipartitan graf oblika $K_{1,s}$ zove se ***zvezda***. Na slici 13 prikazana je zvezda $K_{1,5}$.



Slika 13.

Specijalni grafovi

Definicija 7. Komplement $\bar{G}$ grafa G je je graf koji ima iste čvorove kao graf G, pri čemu su dva čvora susedna u $\bar{G}$ ako i samo ako ti čvorovi nisu susedni u G.

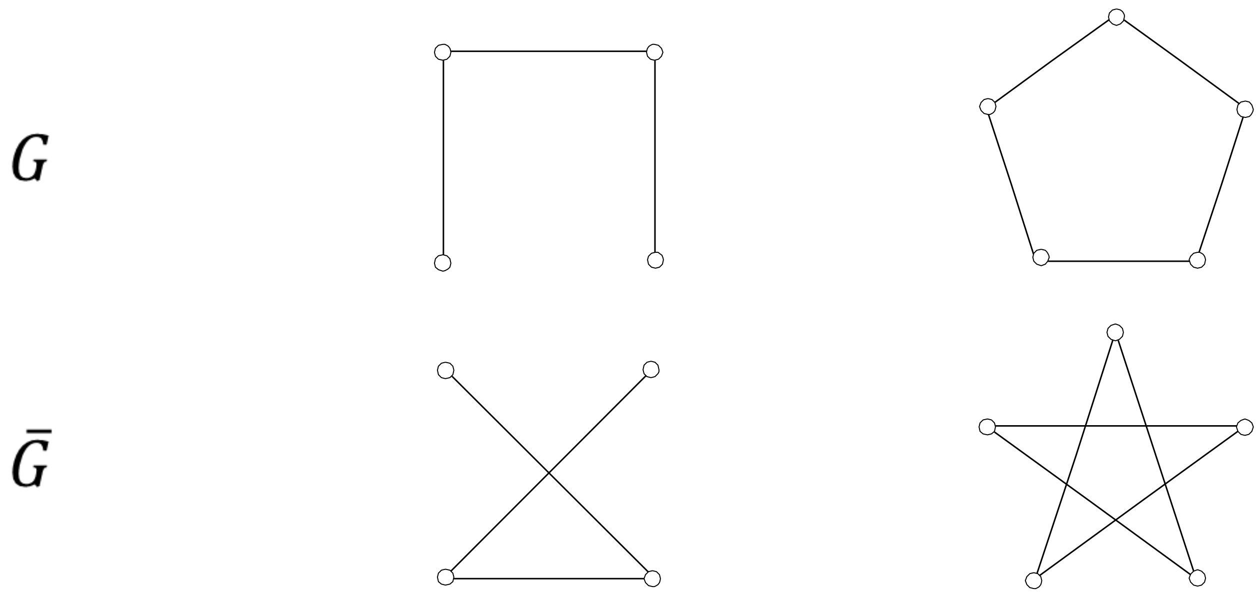


Slika 14.

Teorema 3. Ako je G nepovezan graf, njegov komplement $\bar{G}$ je povezan (tj. bar jedan od grafova G i $\bar{G}$ je povezan graf).

Specijalni grafovi

Graf G je ***samokomplementaran*** ako i samo ako je izomorfan svom komplementu $\bar{G}$.



Slika 14.

<u>**Teorema 4.**</u> Samokomplementaran graf G ima $4r$ ili $4r+1$ čvorova, pri čemu je r prirodan broj.

HVALA NA PAŽNJI!