MATEMATIKA 2

dr Bojana Borovićanin

2022.

3.2 GRAFOVI I MATRICE

Grafovi i matrice

Grafu G sa skupom čvorova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i skupom grana $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ mogu se na prirodan način pridružiti sledeće matrice.

Matrica incidencije grafa G je $n \times m$ matrica $B(G) = (b_{ij})$, gde je

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{čvor } v_i \text{ incidentan sa granom } e_j \\ 0, & \text{u suprotnom slučaju.} \end{cases}$$

Matrica incidencije čvorova i grana digrafa G je $n \times m$ matrica $B(G) = (b_{ij})$, gde je

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{grana } e_j \text{ izlazi iz čvora } v_i \\ 0, & \text{grana } e_j \text{ i čvor } v_i \text{ nisu susedni} \\ -1, & \text{grana } e_j \text{ ulazi u čvor } v_i. \end{cases}$$

Grafovi i matrice

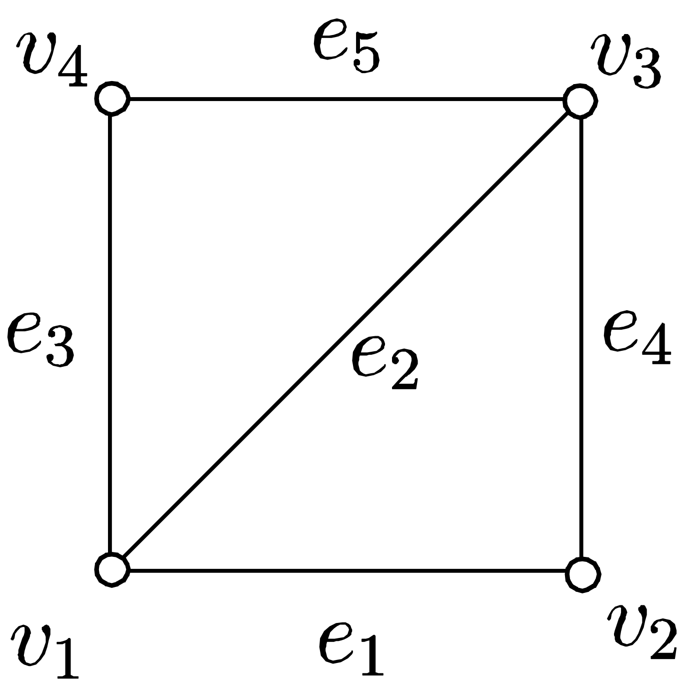
Matrica susedstva (di)grafa G je $n \times n$ matrica $A(G) = (a_{ij})$, gde je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako su čvorovi } v_i \text{ i } v_j \text{ susedni} \\ 0, & \text{u suprotnom slučaju.} \end{cases}$$

Teorema Neka je $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrica susedstva proizvoljnog (di)grafa G čiji su čvorovi $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Element a_{ij}^k iz i-te vrste i j-te kolone matrice A^k jednak je broju različitih v_i - v_j šetnji dužine k u grafu G.

Grafovi i matrice

Primer



G

$$B(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

Grafu G (orijentisanom ili neorijentisanom) sa skupom čvorova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i skupom grana $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ može se pridružiti i matrica rastojanja.

Matrica rastojanja grafa G je $n \times n$ matrica $D(G) = (d_{ij})$, gde je

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j), & \text{ako su čvorovi } v_i \text{ i } v_j \text{ povezani putem} \\ \infty, & \text{u suprotnom slučaju,} \end{cases}$$

pri čemu je $d(v_i, v_j)$ rastojanje između čvorova v_i i v_j.

Smatra se da je svaki čvor povezan sa samim sobom putem dužine 0, pa je $d_{ii} = 0$ za svaki čvor v_i grafa G.

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

Grafu G (orijentisanom ili neorijentisanom) sa skupom čvorova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i skupom grana $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ može se pridružiti i matrica rastojanja.

Matrica rastojanja grafa G je $n \times n$ matrica $D(G) = (d_{ij})$, gde je

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j), & \text{ako su čvorovi } v_i \text{ i } v_j \text{ povezani putem} \\ \infty, & \text{u suprotnom slučaju,} \end{cases}$$

pri čemu je $d(v_i, v_j)$ rastojanje između čvorova v_i i v_j.

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

Grafu G (orijentisanom ili neorijentisanom) sa skupom čvorova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i skupom grana $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ može se pridružiti i matrica rastojanja.

Matrica rastojanja grafa G je $n \times n$ matrica $D(G) = (d_{ij})$, gde je

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j), & \text{ako su čvorovi } v_i \text{ i } v_j \text{ povezani putem} \\ \infty, & \text{u suprotnom slučaju,} \end{cases}$$

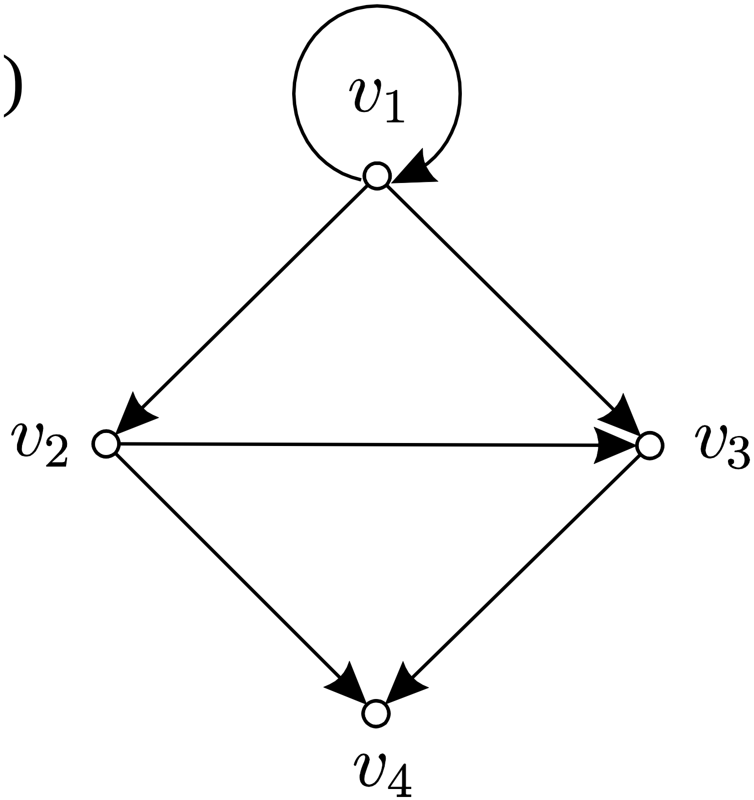
pri čemu je $d(v_i, v_j)$ rastojanje između čvorova v_i i v_j.

Ako su v i w čvorovi grafa G, dužina najkraćeg puta između njih zove se ***rastojanje*** između čvorova v i w i označava se sa $d(v, w)$.

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

Primer

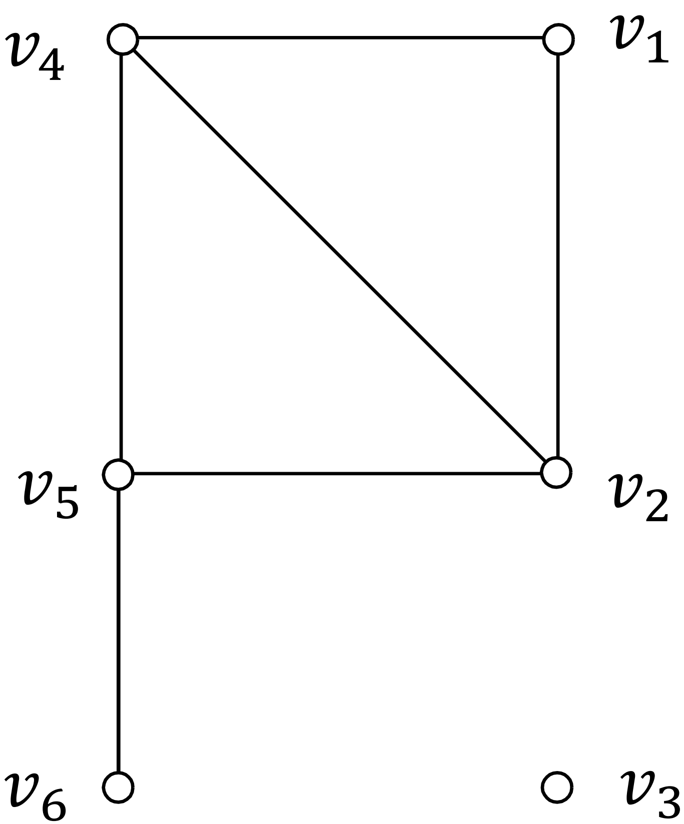
1)



G_0

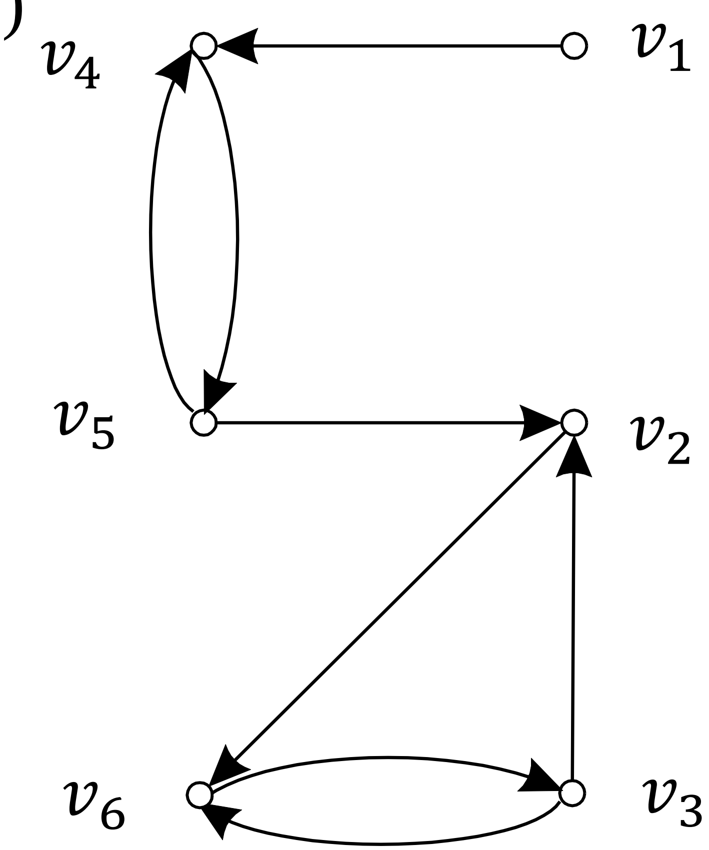
Grafovi i matrice – matrica rastojanja

2)



G_1

3)



G_2

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

2)

$$D(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & \infty & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & \infty & \boxed{1} & \boxed{1} & 2 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \infty & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 2 & \boxed{1} & \infty & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 3 & 2 & \infty & 2 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}$$

3)

$$D(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & \boxed{1} & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & \boxed{1} \\ \infty & \boxed{1} & 0 & \infty & \infty & \boxed{1} \\ \infty & 2 & 4 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ \infty & \boxed{1} & 3 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ \infty & 2 & \boxed{1} & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

Zadatak 1. Za grafove G_1 i G_2 iz prethodnog primera, na osnovu matrica rastojanja, odrediti matrice susedstva.

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

Zadatak 1. Za grafove G_1 i G_2 iz prethodnog primera, na osnovu matrica rastojanja, odrediti matrice susedstva.

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

Zadatak 2. Za graf G_0 iz prethodnog primera odrediti matricu susedstva A, kao i matrice A^2 i A^3. Na osnovu dobijenih matrica odrediti matricu rastojanja grafa G_0.

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

<u>Zadatak 2.</u> Za graf G_0 iz prethodnog primera odrediti matricu susedstva A, kao i matrice A^2 i A^3. Na osnovu dobijenih matrica odrediti matricu rastojanja grafa G_0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafovi i matrice – matrica rastojanja

Zadatak 2. Za graf G_0 iz prethodnog primera odrediti matricu susedstva A, kao i matrice A^2 i A^3. Na osnovu dobijenih matrica odrediti matricu rastojanja grafa G_0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ \infty & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

HVALA NA PAŽNJI!