MATEMATIKA 2

dr Bojana Borovićanin

2022.

3.4 STABLA

Stabla

Definicija 1.

Povezan graf koji ne sadrži konture kao podgrafove naziva se ***stablo.*** Nepovezan graf koji ne sadrži konture kao podgrafove naziva se ***šuma***.

Stabla i šume su specijalna vrsta grafova sa vrlo interesantnim osobinama i od posebnog su interesa u računarstvu i elektrotehnici.

Očigledno, komponente povezanosti šume su stabla. Uobičajena oznaka za stablo je T. Stablo je ***netrivijalno*** ako ima više od jednog čvora.

Stabla

Teorema 1. Neka je G graf sa n čvorova. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.

1^0 Graf G je povezan graf koji ne sadrži nijednu konturu.

2^0 Graf G je povezan graf sa $m = n - 1$ grana.

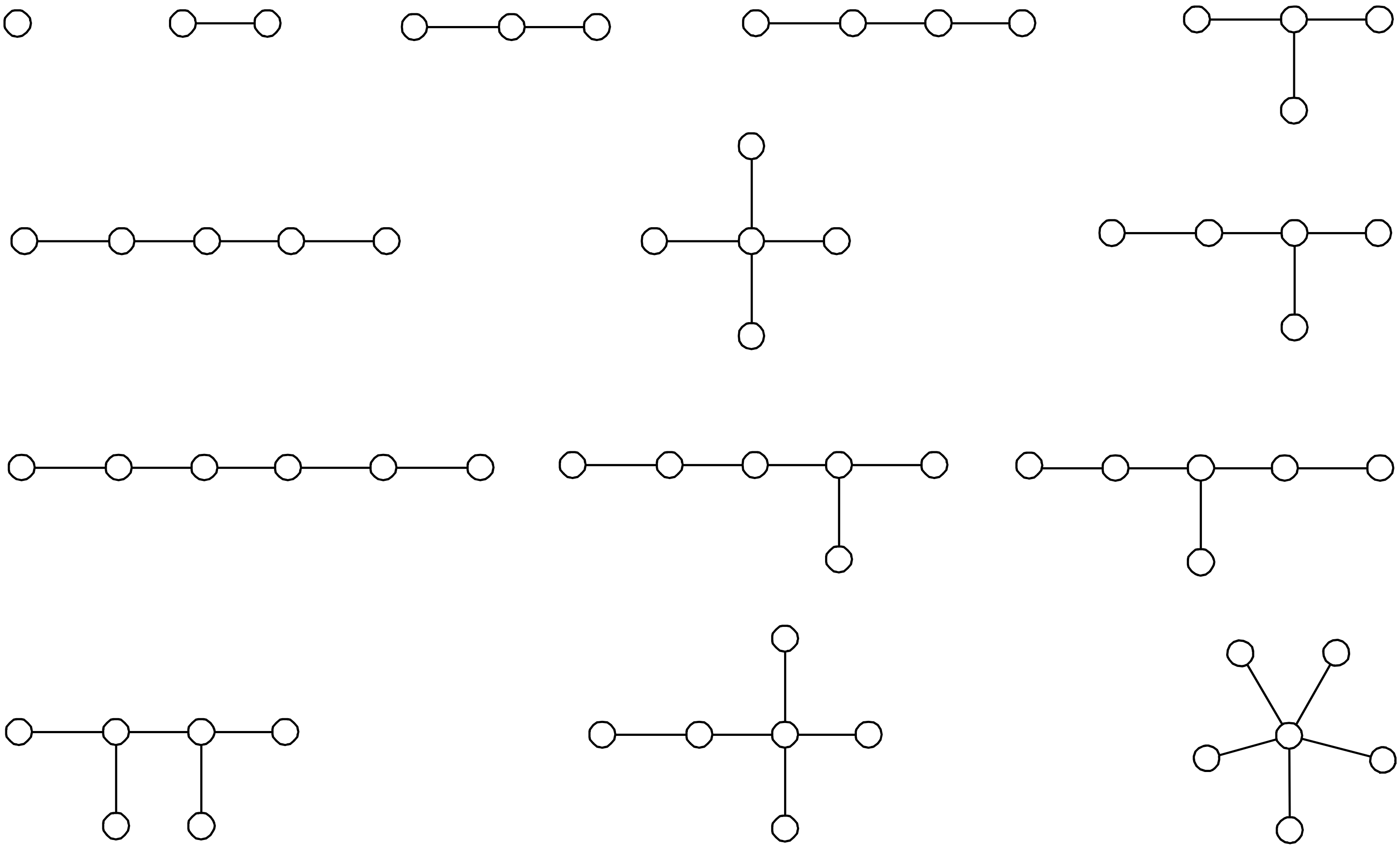
3^0 Graf G je graf bez kontura koji ima $m = n - 1$ grana.

4^0 Graf G je ***minimalan povezan*** graf, tj. graf G je povezan, ali udaljavanjem bilo koje grane postaje nepovezan graf.

5^0 Graf G je ***maksimalan graf koji ne sadrži konture***, tj. graf G ne sadrži konture, ali se dodavanjem nove grane između bilo koja dva čvora formira tačno jedna kontura u G.

6^0 Svaka dva čvora grafa G su povezana tačno jednim putem.

Stabla



Stabla

Teorema 2.

1^0 Stablo sadrži bar dva čvora stepena 1.

2^0 Ako je u čvor stepena 1 stabla T, tada je graf $T - u$ takođe stablo.

Teorema 3. Svaki povezan graf sadrži pokrivajući (razapinjući) podgraf oblika stabla.

Posledica. Svaki povezan graf sa n čvorova poseduje najmanje $n-1$ grana. Graf sa n čvorova i sa manje od $n-1$ grana je nepovezan.

Korenska stabla

Korenska stabla nalaze vrlo važne primene u računarskim naukama, na primer, u organizaciji baza podataka, u kodiranju i dekodiranju nizova karaktera, u teorijskom računarstvu za prikazivanje matematičkih formula itd. Korenska stabla nalaze primenu i u botanici, kao i u genealogiji (na primer za prikazivanje rodbinskih odnosa u vidu porodičnih stabala).

Definicija 2. ***Korensko stablo*** je uređen par $RT = (T, r)$, gde je T stablo, a r jedan njegov čvor, koji se naziva ***koren*** stabla.

Od jednog istog stabla možemo dobiti više različitih korenskih stabala.

Korenska stabla

Definicija 3. Nivo čvora v korenskog stabla $RT = (T, r)$ je jednak dužini puta u stablu T od korena r do čvora v. Najveći nivo čvora u RT naziva se visina korenskog stabla RT.

- Nivo čvora v se označava sa $n(v)$, a visina korenskog stabla sa h.
- Kako je put od korena do svakog čvora jedinstven, to je nivo svakog čvora jednoznačno određen.
- U geometrijskoj interpretaciji korenskog stabla svi njegovi čvorovi koji imaju isti nivo nalaze se na istoj visini, pri čemu se čvorovi različitih nivoa predstavljaju odozgo nadole, počev od nultog nivoa.

Korenska stabla

Pošto korenska stabla nalaze primenu za formiranje porodičnih stabala, uobičajena terminologija korenskih stabala oslanja se na nazive odgovarajućih rodbinskih odnosa.

Definicija 4. Neka je $RT = (T, r)$ korensko stablo sa skupom čvorova V.

- Ako su čvorovi $u, v \in V$ susedni i čvor u ima manji nivo od čvora v, tj. $n(u) = n(v) - 1$, tada je čvor u ***roditelj*** čvora v, a čvor v je ***dete*** čvora u.

- Svaki čvor iz V koji nema decu naziva se ***list*** (ili terminalni odnosno završni čvor).

Korenska stabla

- Svaki čvor iz V koji nije list zove se ***unutrašnji čvor*** stabla RT.
- ***Preci*** čvora $u \in V$ (koji nije koren), su svi čvorovi različiti od u koji pripadaju putu u T od korena r do čvora u.
- ***Potomci*** čvora $u \in V$ koji nije list su svi čvorovi iz V koji imaju čvor u kao pretka.

Definicija 5. **Podstablo** sa korenom $v \in V$ korenskog stabla RT je podgraf stabla T indukovan čvorom $v \in V$ i svim njegovim potomcima.

Korenska stabla

Definicija 6. Korensko stablo se naziva ***t-arno stablo*** ako i samo ako svaki njegov unutrašnji čvor ima najviše t dece. Za $t = 2$ t −arno stablo se naziva ***binarno stablo***.

Striktno t-arno stablo je t-arno stablo čiji svaki unutrašnji čvor ima tačno t dece.

Potpuno t-arno stablo je striktno t-arno stablo kod koga svi listovi imaju isti nivo.

Definicija 7. Balansirano korensko stablo je korensko stablo u kome se nivoi bilo koja dva njegova lista razlikuju najviše za 1.

Korenska stabla

Definicija 8. Uređeno binarno stablo B je binarno stablo u kome se kod svakog unutrašnjeg čvora jedno njegovo dete smatra za ***levo***, a drugo za ***desno.*** U slučaju da čvor ima samo jedno dete i ono je ili levo ili desno dete.

Levo podstablo unutrašnjeg čvora v uređenog binarnog stabla B je podstablo stabla B sa korenom u levom detetu čvora v.

Desno podstablo unutrašnjeg čvora v uređenog binarnog stabla B je podstablo stabla B sa korenom u desnom detetu čvora v.

Zadatak Odrediti koliko ima uređenih binarnih stabala sa tri čvora (označena sa v_1, v_2 i v_3) kod kojih je čvor v_1 koren, čvor v_2 njegovo dete, a čvor v_3 dete čvora v_2.

Stabla i pretrage grafova

- U mnogim grafovskim algoritmima zahteva se obilazak (ili pretraga) pre svega čvorova (ali i grana) grafa po nekom utvrđenom principu.

- Na primer, polazeći od proizvoljnog čvora, mogu se prvo obići njegovi susedi, zatim susedi tih suseda itd. dok se ne obiđu svi čvorove grafa. U jednom takvom procesu, stalno će se jedan deo čvorova obići, a u narednom koraku se vrši izbor sledećeg kandidata za obilazak.

- Moguće je uvesti neka pravila kojima se reguliše prioritet u izboru potencijalnih kandidata za naredni korak u obilasku.

Stabla i pretrage grafova

- U tom kontekstu postoje dve vrste pretraga grafa:
  - pretragu u dubinu,
  - pretragu u širinu.

I jednom i drugom pretragom istovremeno se konstruiše razapinjuće stablo grafa koje se naziva ***stablo pretrage u dubinu*** odnosno ***stablo pretrage u širinu***.

Algoritam pretrage u dubinu

Skup grana stabla je GRANE STABLA, a skup povratnih grana POVRATNE GRANE. Na početku svi čvorovi obeleženi su oznakom n (nov), a kada se upotrebe oznakom u (upotrebljen).

1. Označiti svaki od čvorova grafa G simbolom n (nov).
2. Izabrati proizvoljan čvor v_0 grafa G i postaviti ga za koren stabla.
3. Promeniti oznaku čvora v_0 iz n u u (upotrebljen) i neka je $v = v_0$.
4. Ako postoji čvor w susedan čvoru v koji nije izabran preći na korak 5. Ako su svi čvorovi susedni čvoru v već izabrani preći na korak 6.

Algoritam pretrage u dubinu

5. Ako čvor w ima oznaku n, dodati granu (v, w) skupu GRANE STABLA, promeniti oznaku čvora w u u, neka je $v = w$, i ponoviti korak 4. Ako čvor w ima oznaku u i ako w nije roditelj čvora v, dodati granu (v, w) skupu POVRATNE GRANE i ponoviti korak 4.

6. Ako je $v \neq v_0$, neka je $v = roditelj(v)$ i ponoviti korak 4.

   Ako je $v = v_0$ završiti postupak.

Primetimo da, dok god bilo koji čvor v ima susedan i neiskorišćen čvor w, produžava se put od čvora v ka w. Kada se više ne može dalje, prelazi se na korak 6 i vraća na roditelja čvora v.

Algoritam pretrage u širinu

Neka V i E označavaju skup čvorova i skup grana grafa G, a V^T i E^T skup čvorova i skup grana stabla pretrage T. Kada se čvor v doda stablu, $n(v)$ će označavati nivo na kome je čvor dodat.

1. Izabrati proizvoljan čvor v_0 grafa G. Neka $v_0 \in V^T$ i $n(v_0) = 0$.

2. Za svaki čvor $v \in V \setminus V^T$, takav da je čvor v susedan čvoru v_0, neka $v \in V^T, (v_0, v) \in E^T$ i $n(v) = 1$.

3. Neka je $i = 1$.

4. Izabrati $v_j \in V^T$, tako da je $n(v_j) = i$.

Algoritam pretrage u širinu

5. Izabrati $v \in V \setminus V^T$. Ako je čvor susedan čvoru v_j, neka je $v \in V^T, (v_j, v) \in E^T$ i $n(v) = i + 1$.

6. Ponavljati korak 5 dok de ne ispitaju sve elementi skupa $V \setminus V^T$. (Primetimo da se skup $V \setminus V^T$ stalno menja.)

7. Ponavljati korake $4, 5$ i 6 dok se ne izaberu svi čvorovi v_j za koje je $n(v_j) = i$.

8. Neka je $i = i + 1$.

9. Ponavljati korake $4 - 8$ sve dok ne bude $V = V^T$.

HVALA NA PAŽNJI!