MATEMATIKA 2

dr Bojana Borovićanin

2022.

PRIMENE BINARNIH STABALA

Primene binarnih stabala

Uređena binarna stabla imaju veliku primenu u računarstvu.

Ovde ćemo razmotriti tri ovakve primene:

- u kodiranju podataka,
- u prikazivanju algebarskih formula,
- u organizaciji skupa uređenih podataka u računaru.

STABLA KODIRANJA

Stabla kodiranja

Sva slova, kao i drugi simboli, u računaru se čuvaju u vidu niski bitova odnosno niski jedinica i nula.

- Neka A predstavlja skup svih simbola koje želimo da sačuvamo. Skup A uvek možemo da sačuvamo u obliku binarnih niski, neke fiksne dužine n, sastavljenih od nula i jedinica.

- Takav način skladištenja ima veliku prednost, u slučaju da je potrebno da se niske "dekodiraju" u simbole skupa A. Tada, prvih n bitova obrazuje prvi simbol skupa A, narednih n bitova obrazuju drugi simbol itd.

Stabla kodiranja

- Poželjno je da možemo izvršiti neku vrstu sažimanja podataka, tj. da za njihovo čuvanje upotrebimo manje prostora.
- Način za to je da niskama koje koristimo za čuvanje podataka promenimo dužinu, tako da kraće niske koristimo za simbole koji se češće koriste, odnosno duže za simbole koji se ređe koriste.
- Međutim, prilikom čuvanja podataka u obliku niski bitova koje imaju različite dužine, javlja se problem kako utvrditi gde se jedna niska završava, a druga počinje.
  - Na primer, ako je slovo a kodirano sa 10, b sa 101, e sa 11, m sa 1011 i n sa 110, da li će niska 1011110 predstavljati reč bea (101|11|10) ili mn (1011|110)?

Stabla kodiranja

- Da bi se obezbedilo jednoznačno dekodiranje pri kodiranju simbola binarnim kodovima različitih dučina, **dovoljno je da se svaki od ovih kodova ne sadrži ni u jednom drugom kodu kao njegova početna podniska**. Skup kodova koji zadovoljava ovaj uslov zove se *prefiksni kod*.

- Na primer, neka niske $111, 1011, 1001, 110, 01$ predstavljaju slova a, e, i, o i u, respektivno, u azbuci od pet slova.
  - Posmatrajmo nisku $110011 \ldots$ Ako pročitamo prve tri cifre ove niske (110) znamo da one predstavljaju slovo o pošto nijedno drugo slovo ne počinje sa ove tri cifre. Na sličan način, ako za sledeće tri cifre (011), znamo da 01 predstavlja slovo u, a 1 početak narednog slova.

Stabla kodiranja

- Neka je T proizvoljno uređeno binarno stablo. Ako neka njegova grana vodi od roditelja do levog deteta njoj će odgovarati bit 0, a ako vodi od roditelja do desnog deteta njoj će odgovarati bit 1.

- Kako svakom listu odgovara jedinstven put od korena stabla do lista, to svakom listu možemo da pridružimo nisku bitova koji odgovaraju granama na putu od korena do tog lista. Ta niska bitova naziva se *kod putanje do lista*.

- Sada se svakom listu može dodeliti neki simbol koji se može kodirati pomoću koda putanje do tog lista. Takvo jedno stablo se zove *stablo kodiranja*.

Stabla kodiranja

Skup svih kodova putanje do lista u proizvoljnom uređenom binarnom stablu predstavlja *prefiksni kod*, jer se put od korena do jednog lista ne može sadržati u putu od korena do nekog drugog lista.

Zadatak. U datom korenskom stablu listovima su pridruženi simboli a, b, c, d, e, f. Za svaki od tih simbola odrediti njegov kod putanje do lista, a zatim dekodirati niz bitova 00111010000.

Stabla kodiranja

Definicija. Neka su zadati simboli $s_1, s_2, \ldots, s_n$, gde se simbol s_i javlja sa frekvencijom f_i, i neka dužina binarne niske koja ga kodira iznosi l_i. Tada se težina koda definiše kao

$$w = l_1 f_1 + l_2 f_2 + \cdots + l_n f_n.$$

Ista formula važi za težinu binarnog stabla kod koga je listu koji odgovara simbolu s_i, dodeljena frekvencija f_i, a rastojanje od korena do tog lista jednako je l_i.

U nastavku će biti izložen *Hafmanov algoritam* (1952. god.). On određuje *Hafmanovo stablo* za simbole $s_1, s_2, \ldots, s_n$ kojima odgovaraju frekvencije $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Hafmanovo stablo predstavlja stablo sa minimalnom težinom. Zbog toga i odgovarajući kod, tzv. *Hafmanov kod* ima minimalnu težinu.

Hafmanov algoritam

1. Konstruisati skup stabala S od kojih se svako sastoji od jednog čvora s_i, kome je pridružena frekvencija f_i.
2. Odrediti stabla $T_1, T_2 \in S$ čijim korenima su pridružene dve najmanje frekvencije f_1 i f_2 ($f_1 \leq f_2$).
3. Obrazovati binarno stablo T kome je levo podstablo T_1, desno podstablo T_2 i korenu je pridružena frekvencija $f_1 + f_2$.
4. U skupu S zameniti stabla T_1 i T_2 novim stablom T.
5. Ponavljati korake $2 - 4$ sve dok u S ne ostane samo jedno stablo.

Hafmanov algoritam

Zadatak. Neka su data slova a, b, c, d, e, f sa odgovarajućim frekvencijama pojavljivanja.

Simbol	a	b	c	d	e	f
Frekvencija	25	15	8	12	20	6

Odrediti Hafmanovo stablo i na osnovu njega Hafmanov kod. Kodirati reč *beda* pomoću tog Hafmanovog koda.

- Treba primetiti da Hafmanov kod nije uvek jedinstven. Ukoliko se u neopadajućem nizu frekvencija pojavljuju jednake frekvencije tada se može promeniti redosled stabala kojima odgovaraju jednake frekvencije i na taj način dobiti neko drugo Hafmanovo stablo, a samim tim i drugi Hafmanov kod.

BINARNA STABLA PRETRAGE

Binarna stabla pretraživanja

- Binarna stabla predstavljaju odlično sredstvo za uređivanje podataka, tako da se bilo koji podatak može lako pronaći ili pak utvrditi da nedostaje.
- Potreban uslov je da je skup podataka potpuno uređen nekom relacijom poretka.
- Na primer, ako ovaj skup sadrži brojeve on može biti potpuno uređen relacijom $\leq$ ili $\geq$. Ako skup sadrži reči on je obično uređen prema leksikografskom poretku.
- Ovakvom skupu podataka može se pridružiti *binarno stablo*

Binarna stabla pretraživanja

<u>**Definicija.**</u> Neka je dat skup podataka $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ koji je potpuno uređen u odnosu na neku relaciju poretka ρ. Za podatak a_i kažemo da je manji od podatka a_j, tj. podatak a_j je veći od podatka a_i ako i samo ako je $a_i \rho\, a_j$.

Binarno stablo pretraživanja je uređeno binarno stablo od n čvorova u kome je svakom podatku iz A dodeljen jedan čvor, pri čemu za svaki unutrašnji čvor v važi:

1^0 svi podaci u levom podstablu čvora v su manji od podatka kome je dodeljen čvor v;

2^0 svi podaci u desnom podstablu čvora v su veći od podatka kome je dodeljen čvor v.

Algoritam ubaci element

1. Početi od korenskog čvora.
2. Ako je elemenat manji od objekta čvora, preći na levo dete.
3. Ako je elemenat veći od objekta čvora, preći na desno dete.
4. Ponoviti korake 2 i 3 dok se ne naiđe na čvor koji nije definisan.
5. Ako čvor nije definisan, definisati čvor i ubaciti element.

Algoritam traži element

1. Početi od korenskog čvora.

2. Ako je elemenat manji od objekta čvora, preći na levo dete.

3. Ako je elemenat veći od objekta čvora, preći na desno dete.

4. Ako je elemenat jednak objektu čvora, ime je pronađeno, izvršiti odgovarajuću akciju i završiti.

5. Ponoviti korake 2 i 3 dok se ne naiđe na čvor koji nije definisan.

6. Ako se stiglo do čvora koji nije definisan i ime se ne nalazi u stablu, izvršiti odgovarajuću akciju i završiti.

Algoritam obriši čvor v_0

1. Ako čvor v_0 nema dece ukloniti ga.

2. Ako čvor v_0 ima samo jedno dete, ukloniti čvor v_0 i zameniti ga njegovim detetom.

3. Ako čvor v_0 ima dvoje dece, pronaći desno dete v_1 čvora v_0, a zatim pronaći levo dete (ako postoji) čvora v_1. Nastaviti sa uzimanjem levog deteta svakog sledećeg čvora, dok se ne dođe do čvora v koji nema levo dete. Zameniti čvor v_0 sa v i neka desno dete čvora v postane levo dete roditelja čvora v. Ako levo dete čvora v_1 ne postoji, zameniti čvor v_0 čvorom v_1.

PRIKAZIVANJE ALGEBARSKIH FORMULA

Prikazivanje algebarskih formula

- Često se u računarstvu jedna algebarska formula predstavlja u obliku striktnog uređenog binarnog stabla, koje se formira po sledećim principima.
- Binarne operacije formule se prikazuju kao unutrašnji čvorovi stabla, dok njegovim listovima odgovaraju promenljive i konstante formule. Za svaki unutrašnji čvor važi da njegovo levo podstablo prikazuje levu podformulu, a njegovo desno podstablo prikazuje desnu podformulu nad kojima se vrši operacija dodeljena ovom čvoru.
- Čvorovi operacija manjeg prioriteta imaju manji nivo, a čvorovi operacija većeg prioriteta veći nivo.

Prikazivanje algebarskih formula

- Da bi stablo koje se dodeljuje algebarskoj formuli bilo striktno, potrebno je da ona sadrži samo binarne operacije.

Primer. Predstaviti algebarsku formulu

$$6 \cdot\ (a + 4) +\ (b - c) : (3 + d)$$

u obliku striktnog uređenog binarnog stabla.

- Jedna algebarska formula se može rekonstruisati na osnovu svog binarnog stabla korišćenjem nekog od algoritama za obilazak svih čvorova binarnog stabla. Postoje tri standardna načina obilaska: KLD, LKD i LDK. Slova K, L, D su skraćenice od reči *koren*, *levo* i *desno* podstablo.

HVALA NA PAŽNJI!