MATEMATIKA 2

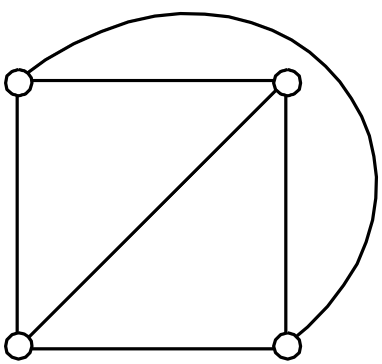
dr Bojana Borovićanin

2022.

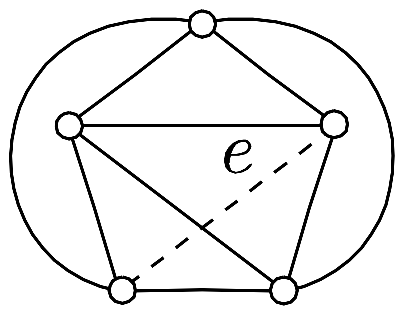
Bojenje grafova

<u>Definicija.</u> Planarni grafovi su oni grafovi koji se mogu nacrtati u ravni tako da im se grane ne seku.

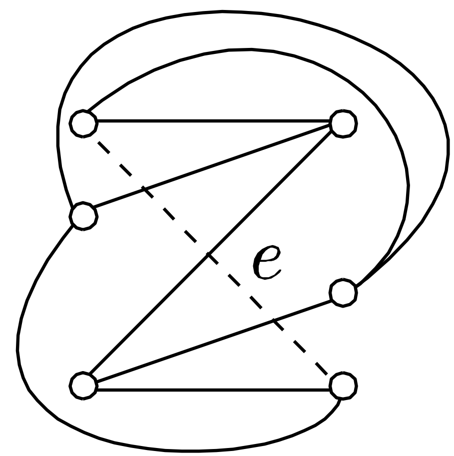
- Grafovi $K_4, K_5 - e$ i $K_{3,3} - e$ su primeri planarnih grafova.



K_4



$K_5 - e$



$K_{3,3} - e$

Bojenje grafova

Definicija. Graf se ***boji*** na taj način što se svakom čvoru pridružuje neka boja, tj. svaki čvor se boji jednom bojom. Graf je ***pravilno obojen*** ako su svaka dva susedna čvora obojena različitim bojama.

Pravilno bojenje grafa G u kojem je upotrebljeno k boja zove se, jednostavno, k-bojenje.

Definicija. ***Hromatski broj*** $\chi(G)$ grafa G jednak je najmanjem broju boja potrebnih da se graf pravilno oboji. Ako je $\chi(G) = k$, kažemo da je graf G ***k-hromatski***, a ako je $\chi(G) \leq k$, kažemo da je graf G ***k-obojiv***.

Bojenje grafova

Na primer:

- kompletan graf K_n je n-hromatski,
- put P_n $(n \geq 2)$ je 2-hromatski,
- kontura C_n je 2-hromatski ili 3-hromatski graf u zavisnosti od toga da li je n paran ili neparan broj.

Ako je G bipartitan graf, tada je G 2-obojiv graf. Ako graf G ne sadrži nijednu granu, tj. ako se sastoji samo od izolovanih čvorova, sve čvorove možemo obojiti istom bojom i njegov hromatski broj jednak je 1.

Bojenje grafova

Teorema. Ako je H podgraf grafa G, tada je $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Teorema. Ako je G graf sa komponentama $G_1, G_2, \ldots, G_s$ $(s \geq 1)$, tada je $\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq s} \chi(G_i)$.

- Ako graf G sadrži, kao podgraf, kompletan graf sa k čvorova, tada je $\chi(G) \geq k$.
- U skupu kompletnih podgrafova grafa G postoje oni koji imaju najviše čvorova. Takvi kompletni podgrafovi nazivaju se ***klike grafa***.
- Za graf G definiše se veličina $K(G)$ koja je jednaka broju čvorova proizvoljne klike grafa. Očigledno je $\chi(G) \geq K(G)$.

Bojenje grafova

Neke ocene hromatskog broja grafa možemo dobiti posmatranjem stepena čvorova grafa $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Neka je $\Delta(G)$ maksimalan stepen grafa G.

Teorema. Za hromatski broj $\chi(G)$ povezanog grafa G važi $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Teorema. Ako je G povezan graf koji nije ni neparna kontura, ni kompletan graf, tada je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Veza između hromatskog broja grafa i njegove strukture veoma je komplikovana. Ona je poznata jedino za bihromatske grafove.

Teorema. Neprazan graf je ***bihromatski*** ako i samo ako ne sadrži (kao podgraf) nijednu konturu sa neparnim brojem čvorova.

Problem četiri boje

Godine 1879. Keli (A. Cayley) je članovima londonskog geografskog društva postavio čuveni problem četiri boje.

- Problem četiri boje sastoji se u tome da se dokaže **da se svaka geografska karta može obojiti sa četiri boje**, tako da je svaka država obojena jednom bojom i da susedne države budu obojene različitim bojama.

- Pod susednim državama se podrazumevaju države koje imaju zajedničku graničnu liniju, ali ne i one koje imaju jednu ili više izolovanih zajedničkih tačaka.

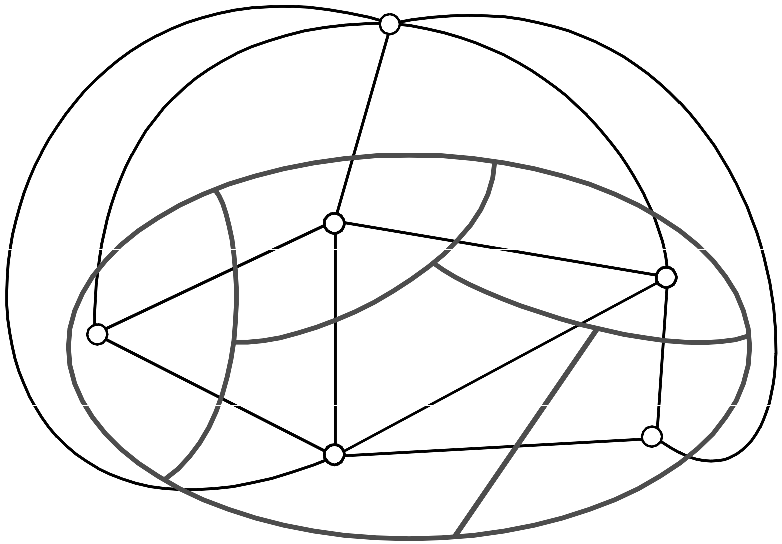
Problem četiri boje

- Podrazumeva se da se problem odnosi ne samo na stvarne geografske karte već na sve karte koje se mogu zamisliti. Pri tome se zahteva da se celokupna teritorija jedne države sastoji od jednog dela, tj. ne dozvoljava se da se jedna država sastoji od više odvojenih delova.

- Problem četiri boje može se prevesti na jezik teorije grafova. Svakoj geografskoj karti moze pridružiti jedan graf.

- Čvorovi pridruženog grafa su proizvoljno izabrani po jedan u svakoj državi, a čvorove susednih država spajaju grane. Beskonačna oblast u ravni takođe se smatra državom.

Problem četiri boje



- Na ovaj način pridruženi graf geografskoj karti je planaran, jer se može nacrtati tako da mu se grane ne seku.
- Problem ekvivalentan problemu četiri boje glasi: „Dokazati da je svaki planaran graf 4-obojiv”.

Problem četiri boje

- Prvi ozbiljan pokušaj da se reši problem četiri boje napravio je Kempe (A.B.Kempe). On je 1880. godine objavio "dokaz" problema četiri boje.

- Desetak godina kasnije, tačnije 1890. godine Hivud (P.J.Heawood) otkrio grešku i tako oborio Kempov dokaz.

- Međutim ni sam Hivud nije uspeo da reši problem. Dokazao je samo da se svaka geografska karta može obojiti sa 5 boja. Tada je problem četiri boje ponovo oživeo i postao izazov za matematčki svet.

Problem četiri boje

- Od tada je prošlo puno vremena da bi tek 1976. godine američkim matematičarima Apelu i Hejkenu (K.Appel i W.Haken) uz pomoć računara pošlo za rukom da dođu do dugo očekivanog dokaza.

- Njihov dokaz je veoma dug i komplikovan i oslanja se na rezultate niza matematičara koji su objavljivani ranijih decenija.

- Oni su uz pomoć računara obradili oko 2000 različitih relevantnih konfiguracija i za to utrošili oko 1200 časova računarskog vremena.

HVALA NA PAŽNJI!