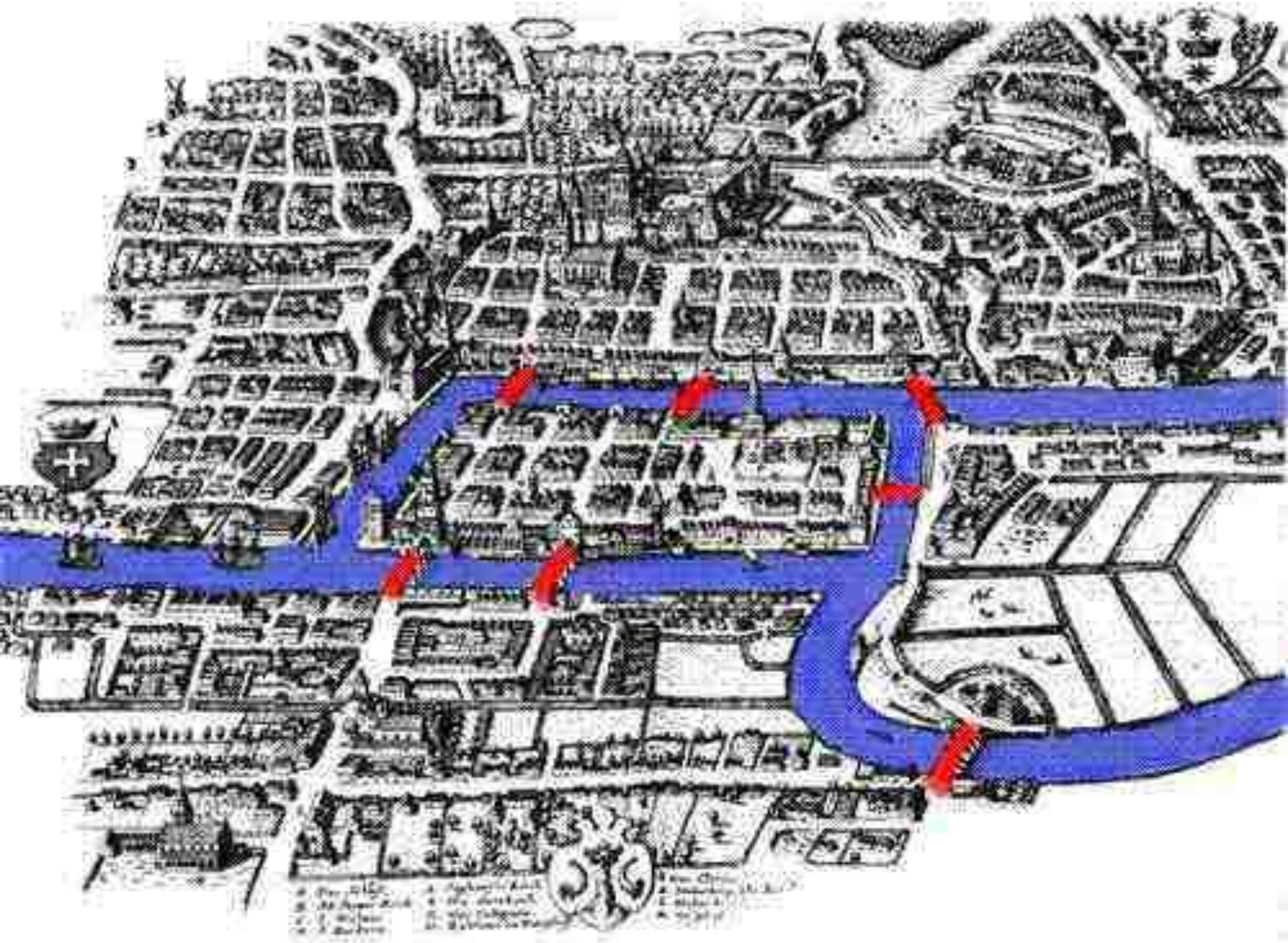
MATEMATIKA 2

dr Bojana Borovićanin

2022.

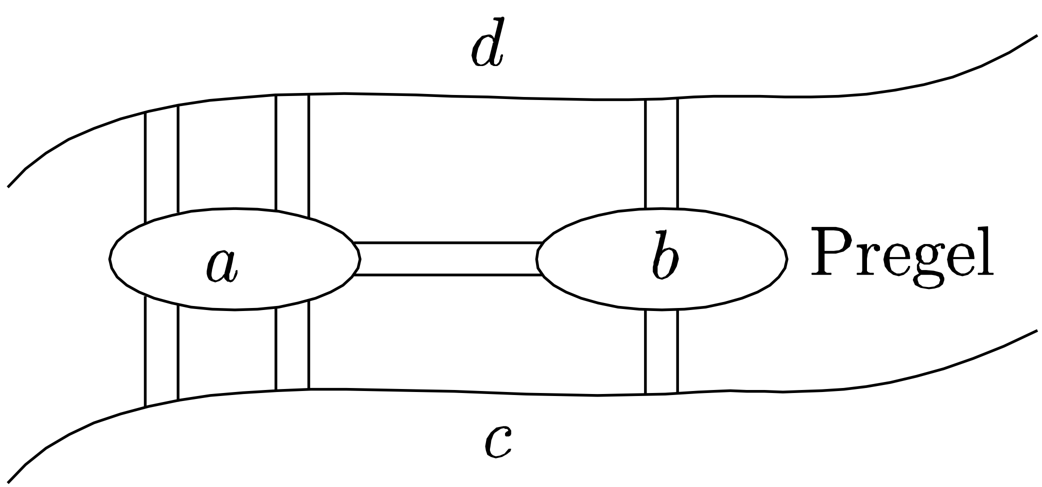
3.3 OJLEROVI GRAFOVI



Ojlerovi grafovi

- Leonard Ojler - problem mostova grada Keningsberg

Problem Kroz centar nekadašnjeg pruskog grada Keningsberga, danas Kalinjingrada, protiče reka Pregel. Na reci su dva ostrva povezana međusobno i sa obalama reke sa sedam mostova.

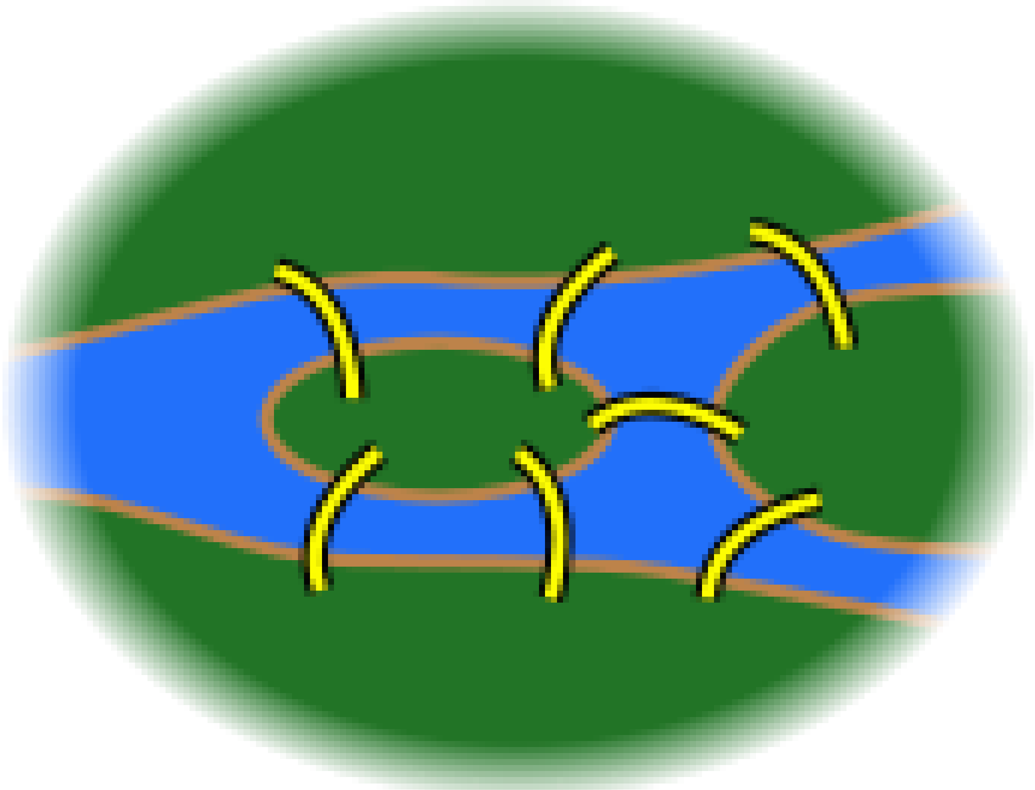


Stanovnici Keningsberga zabavljali su se pokušavajući da obiđu sedam mostova, a da pri tome svaki od njih pređu tačno jedanput.

Ojlerovi grafovi

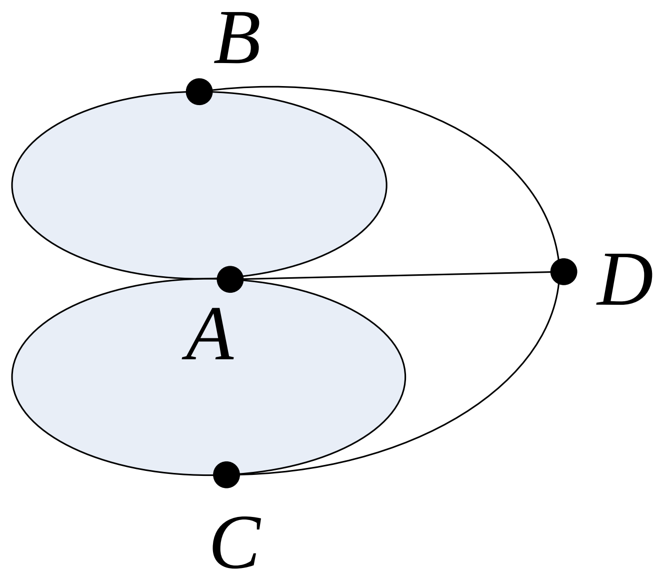
Leonhard Euler: Pitanje je bilo da li je moguće početi šetnju iz bilo koje tačke u gradu i vratiti se u polaznu tačku, prelazeći pri tome svaki most tačno jednom?

Ojlerovo rešenje ovog problema smatra se prvim rezultatom, a samim tim i početkom teorije grafova.



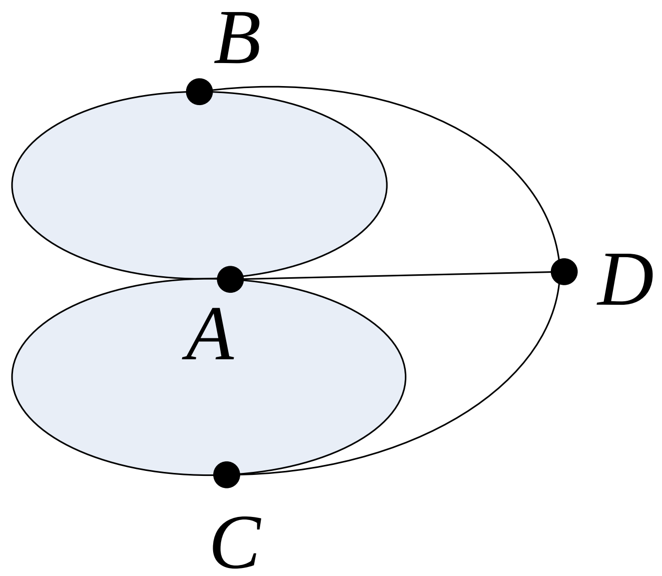
Ojlerovi grafovi

- Ojler je problem rešio tako što je svakoj obali i ostrvima pridružio čvorove, a mostovi su bili grane između njih. Tako je dobio jedan multigraf.



Ojlerovi grafovi

- Ojler je problem rešio tako što je svakoj obali i ostrvima pridružio čvorove, a mostovi su bili grane između njih. Tako je dobio jedan multigraf.



Problem Da li postoji zatvorena šetnja (staza) u datom grafu koja sadrži svaku granu tačno jednom?

Ojlerovi grafovi

- Ojler je dokazao da je takav prelazak nemoguć, uz napomenu da se razmatranje može proširiti da prozvoljan raspored ostrva i mostova.

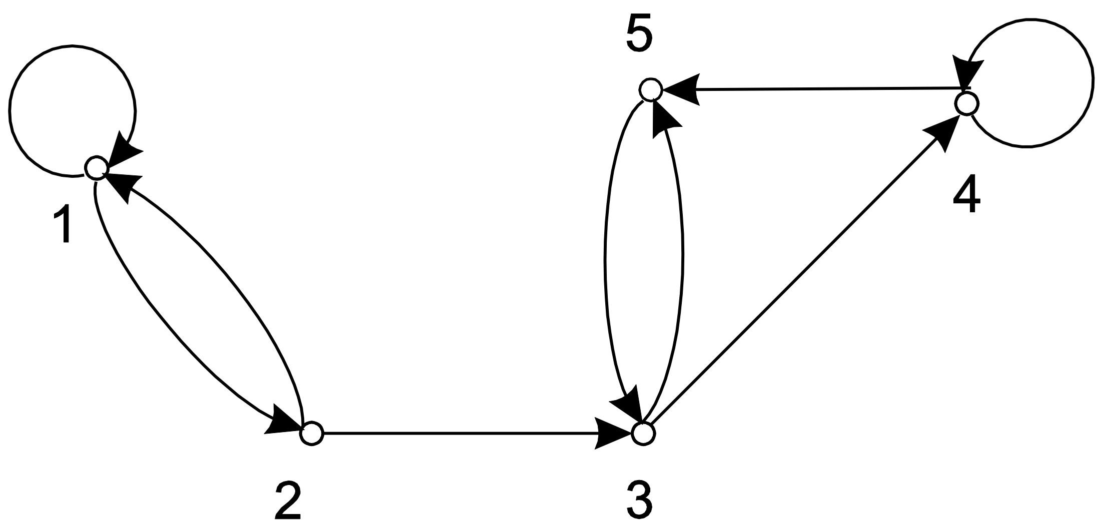
- U njegovu čast čitava jedna klasa grafova dobila je ime Ojlerovi grafovi.

Definicija 2. Ojlerova staza je staza koja tačno jedanput prolazi kroz svaku granu grafa. Ona može da bude otvorena (Ojlerov put) ili zatvorena (Ojlerova kontura). Graf koji poseduje Ojlerovu konturu zove se ***Ojlerov graf***.

Graf koji poseduje Ojlerov put zove se ***Poluojlerov graf***.

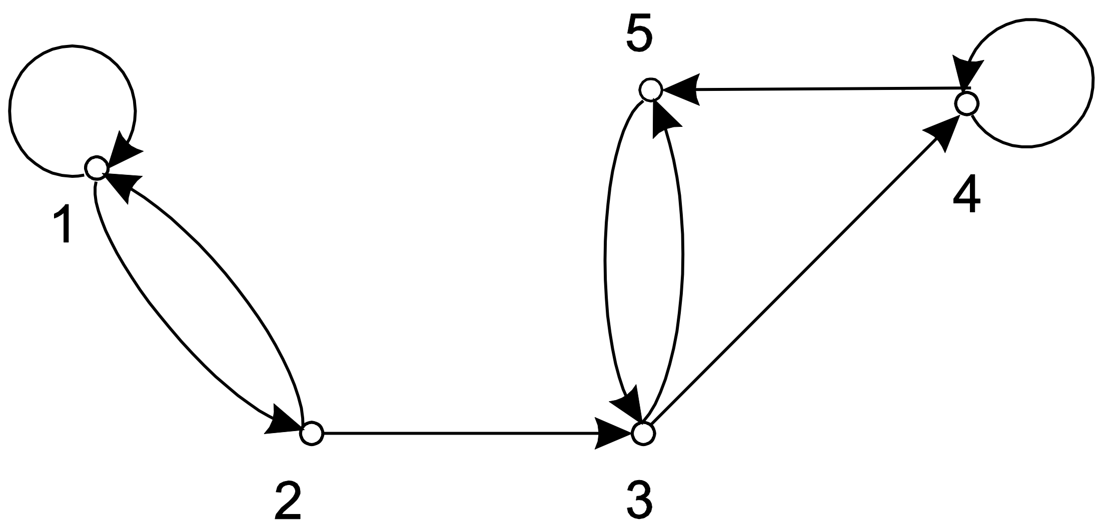
Ojlerovi grafovi

Zadatak 3. Ispitati da li dati orijentisani graf sadrži Ojlerov put i Ojlerovu konturu.



Ojlerovi grafovi

Zadatak 3. Ispitati da li dati orijentisani graf sadrži Ojlerov put i Ojlerovu konturu.

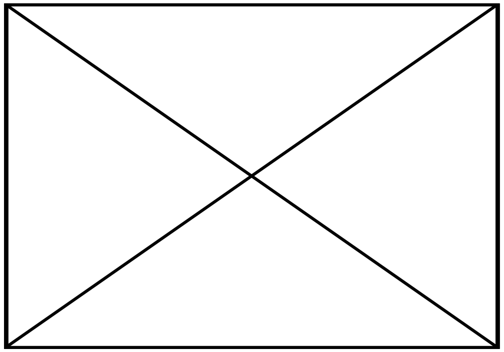


Ojlerov put: $2 - 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 3 - 4 - 4 - 5.$

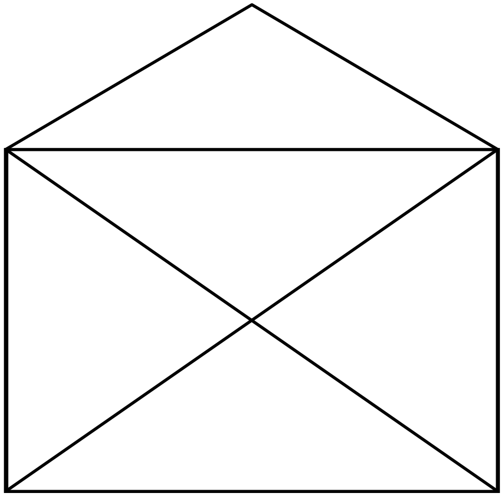
Ojlerovi grafovi

Zadatak 4. Da li se može jednim potezom, bez podizanja olovke sa papira i bez prelaska preko već nacrtanih linija nacrtati prikazana figura?

1)



2)



Ojlerovi grafovi

Teorema. Povezan neorijentisan (multi)graf bez petlji je Ojlerov ako i samo ako su svi njegovi čvorovi parnog stepena.

Teorema. Povezan neorijentisan (multi)graf bez petlji je Poluojlerov ako i samo ako sadrži 0 ili 2 čvora neparnog stepena.

Zadatak 4.

1) NE

2) DA

Poluojlerov graf

Ojlerovi grafovi

<u>Zadatak 5.</u> Pomoću date matrice susedstva $A(G)$ ispitati da li prost graf G sadrži Ojlerovu konturu.

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0\\1&1&0&1&1&0\\1&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

Ojlerovi grafovi

Procedure *Flerijev algoritam(G)*

$v \coloneqq v_0$ // proizvoljan čvor v_0 iz G se bira za prvi čvor konture

$H \coloneqq G$

while $E(H) \neq \emptyset$ // neka je do sad izabran put $W = e_1 e_2 \dots e_i$ koji se završava u čvoru v

begin

izabrati $e_{i+1} \in E(H)$ tako da važe uslovi:

1) e_{i+1} je incidentna sa v u grafu H, tj. $e_{i+1} = \{u, v\}$

2) e_{i+1} nije most u H (izuzev ako nema drugog izbora)

$H \coloneqq H - e_{i+1}$ // iz H se izbacuje e_{i+1}

$W \coloneqq W \cup e_{i+1}$ // u put W se dodaje e_{i+1}

$v \coloneqq u$ // ovo je novi završni čvor puta W

end

end procedure.

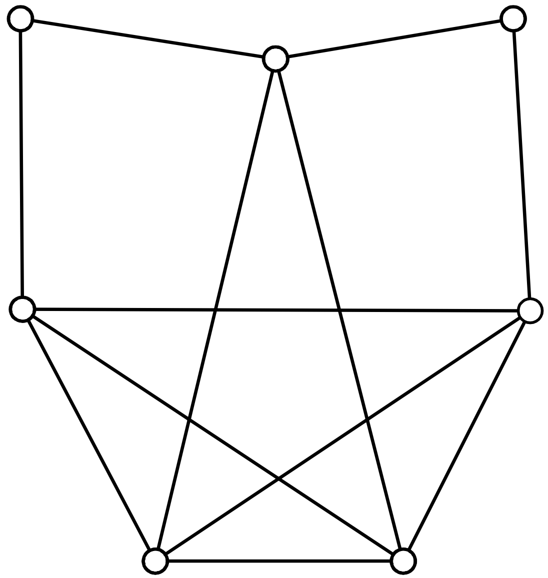
Ojlerovi grafovi

- Polazeći od proizvoljnog čvora v_0, algoritam u svakoj iteraciji trenutno formiranom putu W dodaje novu granu e_{i+1} koja se na njega nadovezuje.

- Ova grana se bira tako da ne bude most, sve dok je to moguće.

- Ulaz za ovaj algoritam je Ojlerov graf G, a izlaz je niz grana W koji predstavlja Ojlerovu konturu tog grafa.

<u>Primer</u>

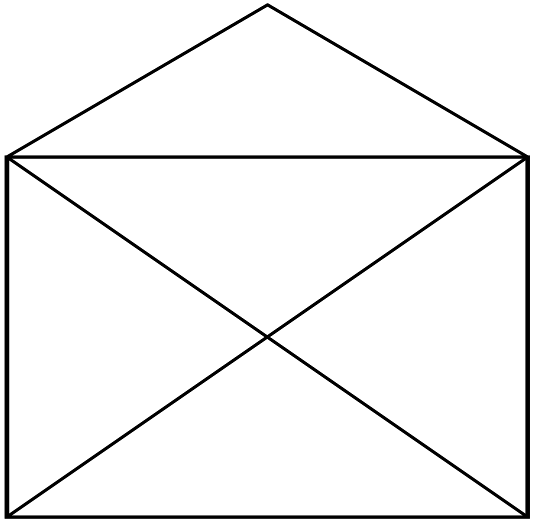


Ojlerovi grafovi

- Algoritam se može modifikovati tako da traži Ojlerov put u grafu.

- Jedina izmena u algoritmu je to da početni čvor mora biti neki čvor neparnog stepena.

<u>Primer</u>



Ojlerovi grafovi - primena

- Organizatori velikih izložbi moraju (ako hoće da posetioci vide sve eksponate i da prelaze što manji put) da odrede jedan Ojlerov put (ako postoji) u grafu određenom izložbenim prostorom i stazama kroz njega.

- Problem kineskog poštara(M. Kuan 1962.): Poštar treba da obiđe svoj reon i raznese sva pisma. On polazi iz pošte, kroz svaku ulicu svog reona treba da prođe bar jedanput i da se na kraju vrati u poštu. Cilj je odrediti takav put poštara koji je minimalne dužine.
  - Problemu se može pridružiti graf u kome čvorovi odgovaraju raskrsnicama, a grane delovima ulica koji povezuju susedne raskrsnice. Ako je graf Ojlerov, tada je rešenje Problema kineskog poštara jedna Ojlerova kontura, a u ostalim slučajevima optimalno rešenje ovog problema će prolaziti više puta kroz neke grane.

HVALA NA PAŽNJI!

Oktobar 2016.