MATEMATIKA 2

dr Bojana Borovićanin

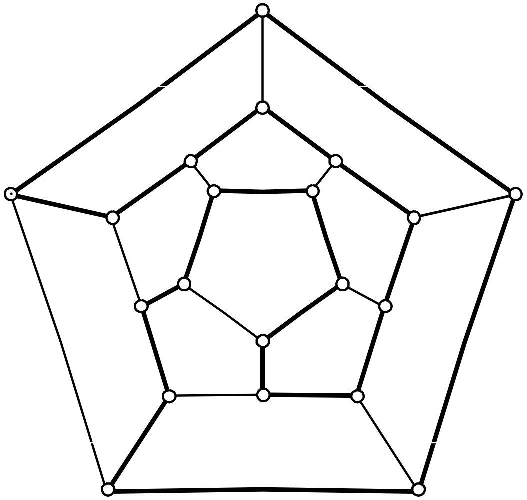
2022.

Hamiltonovi grafovi

- Slično Ojlerovim, Hamiltonovi grafovi imaju svoju predistoriju.
- Godine 1857. poznati irski matematičar Hamilton (Ser William Rowan Hamilton) lansirao je sledeću igru na dodekaedru.
- Dodekaedar je jedan od pet pravilnih poliedara. Ima 12 strana, 20 temena i 30 ivica. Sve strane su pravilni petouglovi i u svakom temenu stiču se po tri strane.
- Hamilton je temena dodekaedra obeležio imenima 20 svetskih metropola i postavio zadatak da se nađe "put oko sveta". Pod tim je podrazumevao putanju ivicama dodekaedra koja kroz svako teme (metropolu) prolazi tačno jedanput i počinje i završava se u istom temenu.

Hamiltonovi grafovi

- Radi bolje preglednosti umesto samog dodekaedra bolje je posmatrati njegovu stereografsku projekciju.



- Tada se Hamiltonov "put oko sveta" svodi na **konturu koja prolazi kroz sve čvorove tako dobijenog grafa tačno jedanput** (na slici je punim linijama prikazana jedna takva kontura).

Hamiltonovi grafovi

Definicija. ***Hamiltonov put*** je put koji kroz sve čvorove grafa prolazi tačno jedanput. Put koji počinje i završava se u istom čvoru a kroz sve ostale čvorove grafa prolazi tačno jedanput naziva se ***zatvoren Hamiltonov put*** ili ***Hamiltonova kontura***. Graf koji poseduje Hamiltonovu konturu kao pokrivajući podgraf naziva se ***Hamiltonov graf***.

I pre Hamiltona rešavani su slični problemi. Jedan od najpoznatijih je *problem konjičkog skoka* (konj ili skakač kao šahovska figura). Ovaj problem glasi: „Da li je moguće skakačem obići sva polja šahovske table tako da se svako polje obiđe tačno jedanput?“ Ili drugim rečima: „Da li u grafu pridruženom skakaču postoji Hamiltonov put?“

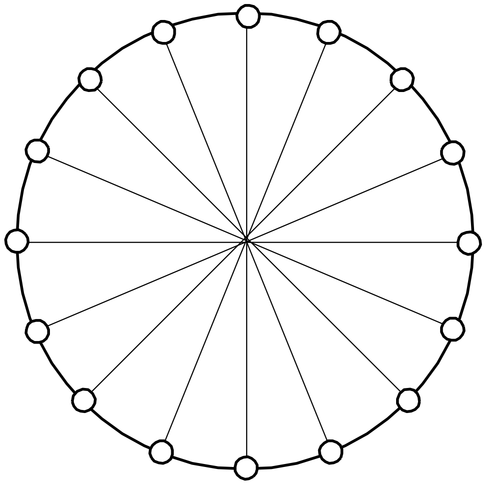
Hamiltonovi grafovi

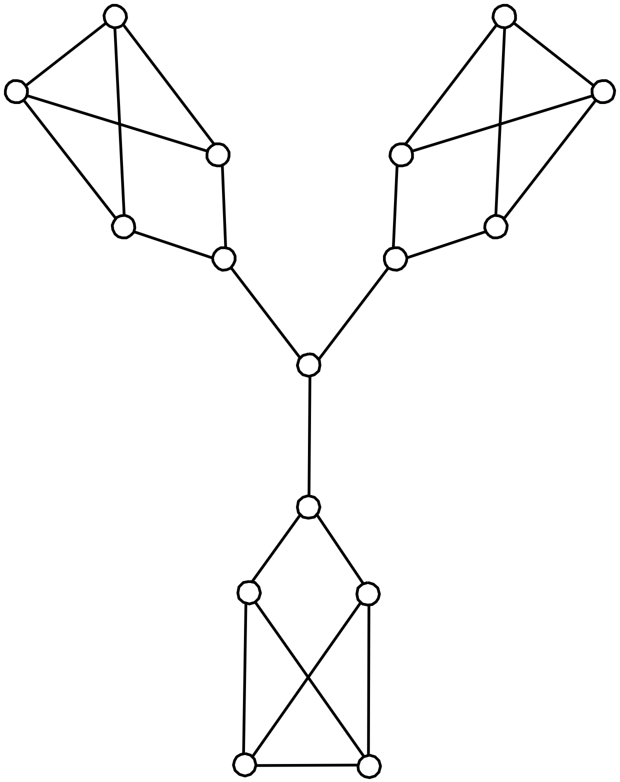
- O problemu konjičkog skoka postoji obimna literatura. Dokazano je da problem konjičkog skoka ima rešenje na svim pravougaonim šahovskim tablama dimenzije $m \times n$ $(m \geq 3, n \geq 3)$, izuzev slučajeva 3×3, 3×5, 3×6 i 4×4.

- Pitanje egzistencije i nalaženja Hamiltonovog puta je daleko teži problem od analognog problema za Ojlerove staze. Dok egzistencija Ojlerove staze zavisi samo od stepena čvorova, kod Hamiltonovih puteva to ne mora biti slučaj.

- Na sledećoj slici data su dva grafa sa po 16 čvorova, od kojih oba imaju iste stepene čvorova (svi čvorovi imaju stepen 3). Međutim prvi od njih poseduje Hamiltonov put, a drugi ne.

Hamiltonovi grafovi





Hamiltonovi grafovi

Teorema. Neka je G graf sa n čvorova, i v i w dva nesusedna čvora u G, takva da je $d(v) + d(w) \geq n$. Tada je graf G Hamiltonov ako i samo ako je graf $G + vw$ Hamiltonov.

Teorema. (Oreova teorema). Neka je G graf sa n $(n \geq 3)$ čvorova, takav da za svaka dva nesusedna čvora v i w važi $d(v) + d(w) \geq n$ .Tada je G Hamiltonov graf.

Teorema. (Dirakova teorema). Ako je G graf sa n $(n \geq 3)$ čvorova, takav da je $d(v) \geq \frac{1}{2}n$ za svaki čvor $v \in V(G)$, tada je G Hamiltonov graf.

Problem trgovačkog putnika

Problem. Neka je dato n gradova koje treba da obiđe trgovački putnik tako da troškovi puta budu minimalni. Postoje dve varijante ovog problema. U prvoj varijanti putnik mora da se vrati u grad iz koga je pošao (središte preduzeća), a u drugoj varijanti početni i završni grad puta trgovačkog putnika su različiti.

Problem trgovačkog putnika razmatra se na potpunom težinskom grafu G sa čvorovima $1,2,\dots,n$ i težinskom matricom $D=(d_{ij})$. Put trgovačkog putnika u grafu G može se interpretirati kao Hamiltonov put. Na taj način se problem trgovačkog putnika može formulisati na sledeći način.

Problem. Odrediti najkraći Hamiltonov put u potpunom težinskom grafu G

Problem trgovačkog putnika

- Hamiltonov put u potpunom grafu sa n čvorova definiše jednu permutaciju skupa {1,2,…,n} i obrnuto, permutacija određuje Hamiltonov put.
- Problem trgovačkog putnika se zbog toga može rešiti generisanjem svih permutacija skupa {1,2,…,n}, izračunavanjem dužina svih Hamiltonovih puteva i odabirom najkraćeg puta.
- Međutim, ovakav algoritam je neefikasan, jer je broj permutacija n! veoma veliki i problem postaje nerešiv i za veoma brze računare.

Problem trgovačkog putnika

Za rešavanje problema trgovačkog putnika koristi se ***algoritam grananja i ograničavanja***. Postoje razne varijante ovog algoritma od kojih navodimo jednu.

- Neka je H skup svih Hamiltonovih puteva u težinskom grafu G i neka je S skup svih razapinjućih stabala u G. Pošto put predstavlja stablo, važi relacija $H \subseteq S$.
- Problem minimalnog razapinjućeg stabla se stoga naziva *relaksacioni problem* za problem trgovačkog putnika.
- Problem trgovačkog putnika svešćemo na rešavanje više problema nalaženja minimalnog razapinjućeg stabla.

Problem trgovačkog putnika

- Nađe se minimalno razapinjuće stablo u grafu G. Ako je ovo stablo put, to je Hamiltonov put i ujedno rešenje problema trgovačkog putnika.

- Ako dobijeno stablo nije put, ono sadrži bar jedan čvor v stepena d ($d \geq 3$). Neka su $e_1, e_2, \dots, e_d$ grane koje se stiču u čvoru v. Sa sigurnošću možemo tvrditi da bar jedna od grana $e_1, e_2, \dots, e_d$ ne pripada optimalnom rešenju problema trgovačkog putnika.

- Stavimo $w(e_i) = \infty$ i ponovo rešimo problem minimalnog razapinjućeg stabla($i = 1,2, \dots, d$). Na ovaj način mi smo početni problem razgranali na d potproblema.

Problem trgovačkog putnika

- U svakom od tih potproblema težina jedne od grana $e_1, e_2, \dots, e_d$ jednaka je ∞ i ona se neće naći u rešenju problema minimalnog razapinjućeg stabla.

- Na svakom od potproblema ponavljamo opisanu proceduru i na taj način dobijamo strukturu potproblema oblika stabla (grananje). U nekim situacijama pojaviće se međusobno jednaki potproblemi, pa ih ne treba tretirati dvaput.

- Kad tad se u nekom od potproblema pojavi put kao rešenje relasakcionog zadatka. Zapamti se dužina ovog puta i tretiraju dalji potproblemi.

Problem trgovačkog putnika

- Ako je dužina minimalnog razapinjućeg stabla u nekom od potproblema veća od dužine ranije nađenog Hamiltonovog puta, taj problem se više ne razgranava.

- Ako se u nekom potproblemu dobije Hamiltonov put manje dužine od ranije nađenog Hamiltonovog puta, pamti se novi put a raniji zaboravlja.

- Kad se iscrpe svi potproblemi, Hamiltonov put koji je zapamćen predstavlja rešenje trgovačkog putnika.

HVALA NA PAŽNJI!