Formalni jezici, automati i jezički procesori
Formalni jezici i jezički procesori
Teorija automata i programski prevodioci

školska 2021/2022

Uvod u teoriju izračunljivosti

školska 2021/2022

Odlučivost i izračunljivost

- Odlučivi problemi su oni za čije rešavanja postoje algoritmi, odnosno programi za apstraktne mašine, neodlučivi su oni kod kojih to nije slučaj

- Praktično izračunljivi problemi su oni kod kojih je dužina rada odgovarajućih programa limitirana nekim stepenom dužine ulaznih podataka
- Ostali odlučivi problemi se smatraju praktično neizračunljivim – izračunljiivi samo u principu
    - Ne preporučuje se konstrukcija opštih algoritama za rešavanja, već pronalaženje efikasnih rešavača za potprobleme

Tjuringove mašine

Теорема

Za datu determinističku Tjuringovu mašinu M sa k-traka i vremenskom granicom složenosti $f(n)$ može se konstruisati deterministička Tjuringova mašina M' sa jednom trakom koja simulira rad mašine M i ima vremensku granicu složenosti $O(f(n)^2)$.

Теорема

Za datu nedeterminističku Tjuringovu mašinu M sa k-traka i vremenskom granicom složenosti $f(n)$ može se konstruisati deterministička Tjuringova mašina M' sa jednom trakom koja simulira rad mašine M i ima vremensku granicu složenosti $O(c^{f(n)})$, za $c > 1$ koje zavisi od mašine M.

Definicija problema

Дефиниција

Problem L za koji se ispituje složenost je podskup skupa svih reči nekog alfabeta. Komplement problema L u oznaci $\overline{L}$ na nekom alfabetu je skup svih reči na tom alfabetu koje nisu u L.

Neka je dat alfabet A i neka je L problem.
Tjuringova mašina prihvata ulazni podatak, tj. reč, x ako postoji izračunavanje u kome se, polazeći od reči x upisane na ulaznoj traci u početnom stanju q_0, dolazi do završnog stanje q_{da}, a odbacuje x ako uvek dolazi do završnog stanje q_{ne}.

Ako Tjuringova mašina M prihvata sve reči x jezika koje pripadaju problemu L, a odbacuje svaku reč koja nije u problemu L, kaže se da M odlučuje problem L.

Definicija problema

Ako Tjuringova mašina M za ulazni podatak x u izračunavanju dolazi do stanja q_z, onda je sadržaj poslednje trake rezultat rada mašine i označava se sa $M(x)$.

Sa $L(x)$ ćemo označavati primerak problema L za ulazni podatak x, odnosno pitanje da li je $x \in L$.

O notacija

Дефиниција

Neka su f i g aritmetičke funkcije. Tada je funkcija f u velikom O od g (u oznaci $f(x) = O(g(x))$) ako postoje brojevi c i n takvi da za svaki $x > n$ važi $f(x) \leqslant c \cdot g(x)$. Ako takvi brojevi ne postoje, onda je $f(x) \neq O(g(x))$.

- funkcija f je reda funkcije g ili
- funkcija g je asimptotska gornja granica funkcije f

O notacija

Дефиниција

Funkcija f raste brže od funkcije g ako $f(x) \neq O(g(x))$. Funkcije f i g rastu istom brzinom, u oznaci $f(x) = \theta(g(x))$, ako važi $f(x) = O(g(x))$ i $g(x) = O(f(x))$.

Primer.

- Funkcije n^4 i $1345 \cdot n^4 + 2045 \cdot n^3 - 7n + 5$ rastu istom brzinom
- Funkcija $0.0001 \cdot n^5$ raste brže od funkcije $1345 \cdot n^4 + 2045 \cdot n^3 - 7n + 5$

Vremenska složenost

Дефиниција

Vreme izvršavanja izračunavanja Tjuringove mašine M koja kao ulaz dobija podatak x jednako je dužini niza konfiguracija koje predstavljaju to izračunavanje.

Neka je f unarna aritmetička funkcija

- Tjuringova mašina M radi u vremenu $f(n)$, ako je za bilo koji ulazni podatak x vreme izvršavanja izračunavanja mašine najviše $f(|x|)$.
- Za nedeterminističku Tjuringovu mašinu M se kaže da radi u vremenu $f(n)$, ako je za bilo koji ulazni podatak x vreme izvršavanja bilo kog izračunavanja mašine najviše $f(|x|)$.
- Funkcija f je vremenska granica složenosti za M.

Klasa TIME

- TIME($f(n)$) je skup problema za koje postoje determinističke Tjuringove mašine koje ih odlučuju, a za koje je vremenska granica složenosti $f(n)$.
- NTIME($f(n)$) se definiše analogno, u odnosu na nedeterminističke Tjuringove mašine.

Prostorna složenost

Дефиниција

Prostor izvršavanja izračunavanja Tjuringove mašine M sa ulazom i izlazom koja kao ulaz dobija podatak x jednak je broju različitih ćelija traka, sem prve - ulazne i poslednje - izlazne trake, nad kojima se tokom izračunavanja nađu glave traka.

Neka je f unarna aritmetička funkcija

- Tjuringova mašina M radi u prostoru $f(n)$, ako je za bilo koji ulazni podatak x prostor izvršavanja izračunavanja mašine najviše $f(|x|)$.
- Za nedeterminističku Tjuringovu mašinu M se kaže da radi u prostoru $f(n)$, ako je za bilo koji ulazni podatak x prostor izvršavanja bilo kog izračunavanja mašine najviše $f(|x|)$.
- Funkcija f je prostorna granica složenosti za M.

Klasa SPACE

- SPACE$(f(n))$ je skup problema za koje postoje determinističke Tjuringove mašine koje ih odlučuju, a za koje je prostorna granica složenosti $f(n)$.
- Skup problema NSPACE$(f(n))$ se definiše analogno, u odnosu na nedeterminističke Tjuringove mašine.

Дефиниција

Klasa složenosti je skup problema sa zajedničkom vremenskom ili prostornom granicom.

Дефиниција

Neka je C neka klasa složenosti, njen komplement, u oznaci $co-C$ je skup problema oblika $\{\overline{L} : L \in C\}$.

Klasa SPACE

Primer.

- Neka je M mašina sa ulazom i izlazom koja sadrži četiri trake i ispituje da li je ulazna reč palindrom.
- Prva traka sadrži ulaznu reč (samo čitanje). Druga traka sadrži binarni zapis indeksa i – redni broj ciklusa rada, treća binarni zapis indeksa j, dok je četvrta traka prazna.
- Na početku rada i se postavlja na 1. Ciklus počinje postavljanjem j na 1 i glave prve trake nad najlevlju ćeliju ulazne reči.
  - Ako je $j < i$, uvećava se j za 1 i pomera glava prve trake nadesno.
  - Ako je $j = i$ pamti se simbol prve trake koji se trenutno čita i ponovo postavlja j na 1.
- Zatim se pronalazi i-ti znak ulazne reči brojano sa desne strane i upoređuje sa zapamćenim simbolom.
- Postupak se prekida kada su upoređeni znaci različiti – prelazak u stanje q_{ne}, odnosno kada je i-ti znak ulazne reči blanko znak – prelazak u stanje q_{da}.
- Prostor izvršavanja je u $O(log_2 n)$ koliko je potrebno za binarno predstavljanje indeksa i i j.

Klasa SPACE

Primer.

- Neka je M mašina sa ulazom i izlazom koja sadrži četiri trake i ispituje da li je ulazna reč palindrom.
- Prva traka sadrži ulaznu reč (samo čitanje). Druga traka sadrži binarni zapis indeksa i – redni broj ciklusa rada, treća binarni zapis indeksa j, dok je četvrta traka prazna.
- Na početku rada i se postavlja na 1. Ciklus počinje postavljanjem j na 1 i glave prve trake nad najlevlju ćeliju ulazne reči.
  - Ako je $j < i$, uvećava se j za 1 i pomera glava prve trake nadesno.
  - Ako je $j = i$ pamti se simbol prve trake koji se trenutno čita i ponovo postavlja j na 1.
- Zatim se pronalazi i-ti znak ulazne reči brojano sa desne strane i upoređuje sa zapamćenim simbolom.
- Postupak se prekida kada su upoređeni znaci različiti – prelazak u stanje q_{ne}, odnosno kada je i-ti znak ulazne reči blanko znak – prelazak u stanje q_{da}.
- Prostor izvršavanja je u $O(log_2 n)$ koliko je potrebno za binarno predstavljanje indeksa i i j.

Klasa SPACE

Primer.

- Neka je M mašina sa ulazom i izlazom koja sadrži četiri trake i ispituje da li je ulazna reč palindrom.
- Prva traka sadrži ulaznu reč (samo čitanje). Druga traka sadrži binarni zapis indeksa i – redni broj ciklusa rada, treća binarni zapis indeksa j, dok je četvrta traka prazna.
- Na početku rada i se postavlja na 1. Ciklus počinje postavljanjem j na 1 i glave prve trake nad najlevlju ćeliju ulazne reči.
  - Ako je $j < i$, uvećava se j za 1 i pomera glava prve trake nadesno.
  - Ako je $j = i$ pamti se simbol prve trake koji se trenutno čita i ponovo postavlja j na 1.
- Zatim se pronalazi i-ti znak ulazne reči brojano sa desne strane i upoređuje sa zapamćenim simbolom.
- Postupak se prekida kada su upoređeni znaci različiti – prelazak u stanje q_{ne}, odnosno kada je i-ti znak ulazne reči blanko znak – prelazak u stanje q_{da}.
- Prostor izvršavanja je u $O(log_2 n)$ koliko je potrebno za binarno predstavljanje indeksa i i j.

Klasa SPACE

Primer.

- Neka je M mašina sa ulazom i izlazom koja sadrži četiri trake i ispituje da li je ulazna reč palindrom.
- Prva traka sadrži ulaznu reč (samo čitanje). Druga traka sadrži binarni zapis indeksa i – redni broj ciklusa rada, treća binarni zapis indeksa j, dok je četvrta traka prazna.
- Na početku rada i se postavlja na 1. Ciklus počinje postavljanjem j na 1 i glave prve trake nad najlevlju ćeliju ulazne reči.
  - Ako je $j < i$, uvećava se j za 1 i pomera glava prve trake nadesno.
  - Ako je $j = i$ pamti se simbol prve trake koji se trenutno čita i ponovo postavlja j na 1.
- Zatim se pronalazi i-ti znak ulazne reči brojano sa desne strane i upoređuje sa zapamćenim simbolom.
- Postupak se prekida kada su upoređeni znaci različiti – prelazak u stanje q_{ne}, odnosno kada je i-ti znak ulazne reči blanko znak – prelazak u stanje q_{da}.
- Prostor izvršavanja je u $O(log_2 n)$ koliko je potrebno za binarno predstavljanje indeksa i i j.

Klasa SPACE

Primer.

- Neka je M mašina sa ulazom i izlazom koja sadrži četiri trake i ispituje da li je ulazna reč palindrom.
- Prva traka sadrži ulaznu reč (samo čitanje). Druga traka sadrži binarni zapis indeksa i – redni broj ciklusa rada, treća binarni zapis indeksa j, dok je četvrta traka prazna.
- Na početku rada i se postavlja na 1. Ciklus počinje postavljanjem j na 1 i glave prve trake nad najlevlju ćeliju ulazne reči.
  - Ako je $j < i$, uvećava se j za 1 i pomera glava prve trake nadesno.
  - Ako je $j = i$ pamti se simbol prve trake koji se trenutno čita i ponovo postavlja j na 1.
- Zatim se pronalazi i-ti znak ulazne reči brojano sa desne strane i upoređuje sa zapamćenim simbolom.
- Postupak se prekida kada su upoređeni znaci različiti – prelazak u stanje q_{ne}, odnosno kada je i-ti znak ulazne reči blanko znak – prelazak u stanje q_{da}.
- Prostor izvršavanja je u $O(log_2 n)$ koliko je potrebno za binarno predstavljanje indeksa i i j.

Važne klase složenosti

- $L = SPACE(O(log_2 n))$
- $NL = NSPACE(O(log_2 n))$
- $P = \cup_i TIME(n^i)$
- $NP = \cup_i NTIME(n^i)$
- $PSPACE = \cup_i SPACE(n^i)$
- $NPSPACE = \cup_i NSPACE(n^i)$
- $EXP = \cup_i TIME(2^{n^i})$
- $NEXP = \cup_i NTIME(2^{n^i|})$
- $EXPSPACE = \cup_i SPACE(2^{n^i})$

Primeri problema

- P
  - NZD
  - Odlučivi problemi linearnog programiranja
- NP
  - SAT
  - Hamiltonov put
  - Bojenje grafa
- EXP
  - Generisanje poteza - šah ili Go
  - Da li će Tjuringova mašina stati nakon određenog broja koraka

Odnosi klasa složenosti

Теорема

- $TIME(f(n)) \subset NTIME(f(n))$,
- $NTIME(f(n)) \subset TIME(2^{O(f(n))})$,
- $SPACE(f(n)) \subset NSPACE(f(n))$,
- $NTIME(f(n)) \subset SPACE(f(n))$,
- $NSPACE(f(n)) \subset TIME(2^{O(f(n))})$,
- $NSPACE(f(n)) \subset SPACE(O(f(n) \cdot f(n)))$, $za\ f(n) \geqslant log_2 n$,
- $PSPACE = NPSPACE$,
- $\ldots$

Otvorena pitanja

- Da li je $P = NP$?
- Da li je $P = PSPACE$?
- Da li je $L = NL$?
- Da li je $EXP = NEXP$?