УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

3. Основне врсте изометрија

Изометрије еуклидске равни се могу поделити на индиректне и директне.

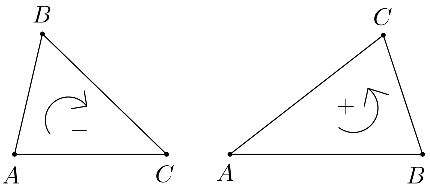
Изометрија је индиректна, ако мења оријентацију равни, односно директна, ако не мења оријентацију равни.

Оријентација равни је одређена оријентацијом датог оријентисаног троугла.

Дефиниција 1. Троугао $\triangle ABC$ је оријентисан, ако његова темена A, B и C чине уређену тројку (A, B, C). То значи да је A његово прво, B друго, а C треће теме.

Постоје две могуће оријентације троугла - позитивна и негативна.

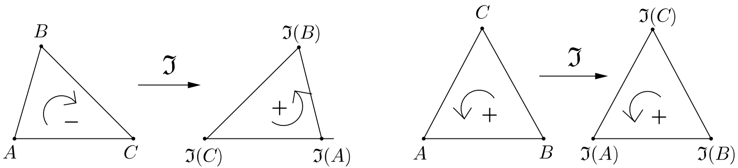
Дефиниција 2. Оријентисани троугао $\triangle ABC$ је негативно оријентисан, ако су његова темена означена у смеру казаљки на сату. У противном, он је позитивно оријентисан (слика 24).



Слика 24. Оријентисани троуглови

3. Основне врсте изометрија

$\boxed{\textbf{Дефиниција 3.}}$ Изометрија еуклидске равни $\mathfrak{I}$ je директна, ако су оријентисани троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle \mathfrak{I}(A)\mathfrak{I}(B)\mathfrak{I}(C)$ исте оријентације (оба позитивно или оба негативно оријентисана). Ако су оријентисани троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle \mathfrak{I}(A)\mathfrak{I}(B)\mathfrak{I}(C)$ супротне оријентације (један je позитивно, а други негативно оријентисан), изометрија je индиректна.



Слика 25. Индиректне и директне изометрије

3. Основне врсте изометрија

Постоји пет изометрија у еуклидској равни. То су:

(а) симетрија у односу на праву p (осна симетрија), у ознаци $\mathcal{S}_p$;

(б) ротација око тачке O за угао ω (централна ротација), у ознаци $\mathcal{R}_{O,\omega}$;

(в) симетрија у односу на тачку O (централна симетрија), у ознаци $\mathcal{S}_O$;

(г) транслација за вектор $\overrightarrow{v}$, у ознаци $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$;

(д) клизајућа симетрија за вектор $\overrightarrow{v}$, у ознаци $G_{\overrightarrow{v}}$.

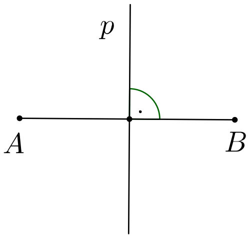
3. Основне врсте изометрија

Пре него што опишемо сваку од наведених пет изометрија, уводимо појам инваријантне (фиксне) тачке произвољне изометрије. То су тачке које при изометрији не мењају свој положај.

Дефиниција 4. Тачка P је инваријантна (фиксна) тачка изометрије $\mathfrak{I}$, ако је $\mathfrak{I}(P) = P$.

Није тешко закључити да су све тачке коинцијенције $\mathcal{E}$ фиксне тачке, јер је по дефиницији коинциденције $\mathcal{E}(A) = A$ за сваку тачку A у равни.

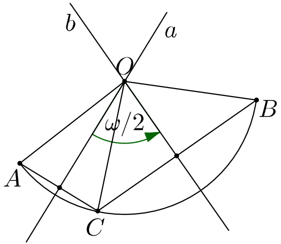
(a) Осна симетрија $\mathcal{S}_p$ пресликава тачку A у тачку B, тако да се тачке A и B налазе на једнаким нормалним растојањима до праве p. Све тачке на правој p су инваријантне, тј. пресликавају се у исте тачке. Осна симетрија је индиректна изометрија, јер мења оријентацију равни, што се може проверити пресликавањем оријентисаног троугла.



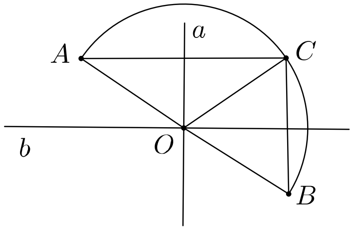
Слика 26. Осна симетрија

3. Основне врсте изометрија

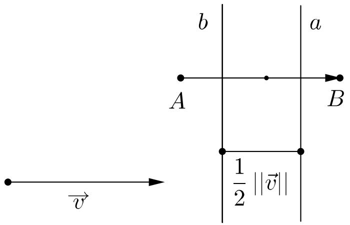
(б) Ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ око тачке O за угао ω пресликава тачку A у тачку B, тако да је угао $\sphericalangle AOB = \omega$. Она је по дефиницији композиција (производ) $S_b \circ S_a$ две осне симетрије S_b и S_a, чије се осе секу у тачки O и образују оријентисани угао $\sphericalangle(a,b) = \dfrac{\omega}{2}$. Једина инваријантна тачка ротације $R_{O,\omega}$ је њен центар O. Она је директна изометрија, јер не мења оријентацију равни.



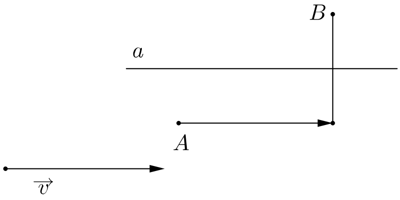
(в) Симетрија $\mathcal{S}_O$ у односу на тачку O пресликава тачку A у тачку B, тако да се тачке A и B налазе на једнаким растојањима до тачке O. Она је по дефиницији производ две осне симетрије S_a и S_b, чије су осе нормалне и секу се у тачки O. Другим речима, $\mathcal{S}_O = \mathcal{R}_{O,180^\circ}$. Једина инваријантна тачка централне симетрије S_O је њен центар O. Она је директна изометрија, јер не мења оријентацију равни.



(г) Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$ за вектор $\overrightarrow{v}$ пресликава тачку A у тачку B, тако да је вектор $\overrightarrow{AB}$ једнак вектору $\overrightarrow{v}$ (оба вектора имају исту дужину, правац и смер). Она је композиција две осне симетрије S_a и S_b чије су осе паралелне и нормалне на правац вектора $\overrightarrow{v}$, при чему је растојање између њих једнако половини дужине тог вектора. Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$ нема инваријантних тачака ако је $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Она представља директну изометрију, јер не мења оријентацију равни.



(д) Клизајућа симетрија $G_{\overrightarrow{v}}$ за вектор $\overrightarrow{v}$ пресликава тачку A у тачку B, тако да се тачка A најпре транслира за вектор $\overrightarrow{v}$, а затим се та тачка симетрично преслика у односу на праву a. Она је композиција $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$ осне симетрије S_a и транслације, чији је вектор паралелан правој a. Клизајућа симетрија нема инваријантних тачака. Она је индиректна изометрија, јер мења оријентацију равни.



Слика 30. Клизајућа симетрија

3. Основне врсте изометрија

На основу наведених примера, можемо да закључимо да важе следеће особине.

Теорема 2.14. Свака изометрија еуклидске равни се може представити као композиција највише три осне симетрије.

Теорема 2.15. Свака директна изометрија равни представља коинциденцију, ротацију или транслацију. Свака индиректна изометрија равни представља осну симетрију или клизајућу симетрију.

Теорема 2.16. Ако је дуж AB подударна дужи A_1B_1 у равни, тада постоје тачно две изометрије те равни такве да је $\mathfrak{I}(A) = A_1$ и $\mathfrak{I}(B) = B_1$, од којих је једна директна, а друга индиректна.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Испитати која је то директна, а која индиректна изометрија у Теореми 2.16, којом се дуж AB пресликава на подударну дуж A_1B_1.

2. Одредити врсту изометрије еуклидске равни која представља композицију:

(а) две транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$ и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{w}}$, при чему су вектори тих транслација колинеарни (паралелни);

(б) две ротације $\mathcal{R}_{O,\omega}$ и $\mathcal{R}_{O,\varphi}$, које имају заједничко средиште O;

(в) две централне симетрије $\mathcal{S}_A$ и $\mathcal{S}_B$.

ЗА ВЕЖБУ

3. Која изометрија еуклидске равни је инверзна следећим изометријама:

(а) $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{v}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{w}}$;

(б) $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{R}_{O,\varphi}$;

4. Испитати да ли постоји изометрија еуклидске равни таква да је $\mathfrak{I}^2 = \mathcal{E}$.