УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

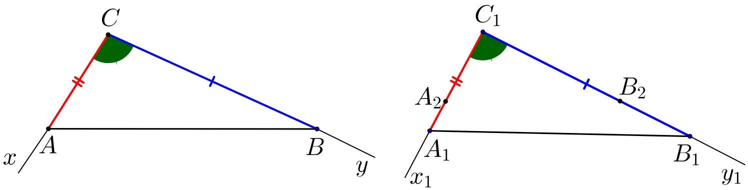
Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

5. Подударност троуглова и углови на трансверзали

Познато је да постоје четири става подударности троуглова: СУС, УСУ, ССС, ССУУ који се уводе у основној школи.

Став 1 (СУС) Два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су подударна, ако су две странице и њима захваћени угао једног троугла подударни одговарајућим страницама и углу другог троугла.



$$AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1,\ \gamma = \gamma_1 \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

слика 43. Став СУС

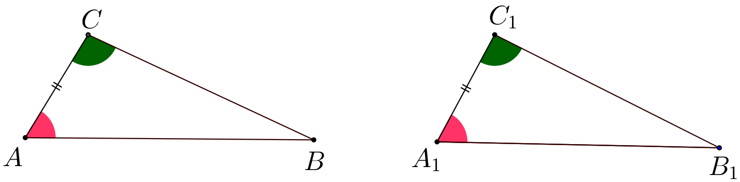
5. Подударност троуглова и углови на трансверзали

Ако су троуглови подударни на основу става СУС, тада из те подударности следи да су њихови преостали углови и страница подударни.

На слици 43, из подударности троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ следи да је

$$AB = A_1B_1, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1.$$

Став 2 (УСУ) Два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су подударна, ако су страница и два налегла угла једног троугла подударни одговарајућој страници и угловима другог троугла.



$$AC = A_1C_1,\ \alpha = \alpha_1,\ \gamma = \gamma_1 \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

Слика 44. Став УСУ

5. Подударност троуглова и углови на трансверзали

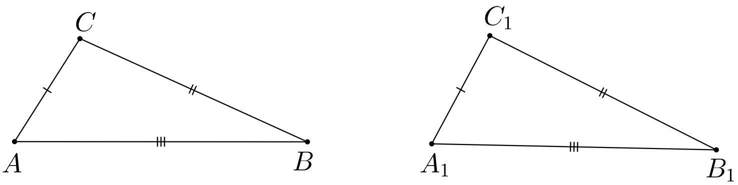
Ако су троуглови подударни на основу става УСУ, тада из те подударности следи да су њихове преостале странице и угао подударни.

На слици 44, из подударности троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ следи да је

$$AB = A_1B_1, \quad BC = B_1C_1, \quad \beta = \beta_1.$$

5. Подударност троуглова и углови на трансверзали

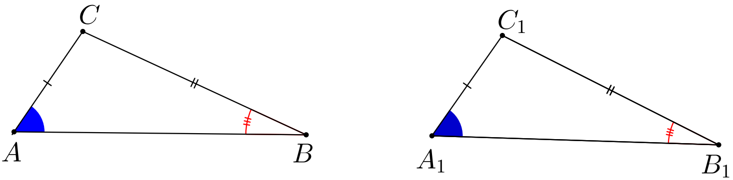
Став 3 (ССС) Два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су подударна, ако су све странице једног троугла подударне одговарајућим страницама другог троугла.



Слика 45. Став ССС

Ако су троуглови подударни на основу става ССС, тада из те подударности следи да су углови наспрам подударних страница подударни, тј $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$.

Став 4 (ССУУ) Два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су подударна, ако су две странице и угао наспрам једне од њих једног троугла подударни одговарајућим страницама и углу другог троугла, а углови наспрам других двеју подударних страница оба оштри, прави или тупи (исте врсте).



$AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\alpha = \alpha_1$, β, β_1 исте врсте $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$

Слика 46. Став ССУУ

5. Подударност троуглова и углови на трансверзали

Ако су троуглови подударни на основу става ССУУ, тада из те подударности следи да су њихове преостале странице и углови подударни.

На слици 46, из подударности троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ следи да је

$$AB = A_1B_1, \quad \gamma = \gamma_1, \quad \beta = \beta_1.$$

Став ССУУ се увек може применити на правоугле троуглове који имају подударне хипотенузе и по једну катету, јер су углови наспрам хипотенузе подударни, а углови наспрам подударних катета исте врсте, јер су оштри.

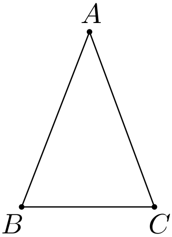
5. Подударност троуглова и углови на трансверзали

Помоћу ставова ССУУ и УСУ може се доказати следећа теорема.

Теорема 2.23. Наспрам подударних страница у троуглу $\triangle ABC$ налазе се подударни углови и обрнуто.

Доказ теореме 2.23 за вежбу.

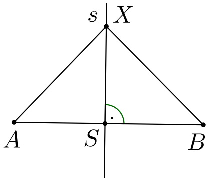
Дефиниција 2.1. Троугао који има две подударне странице назива се једнакокраки троугао.



Следећа два примера илуструју примену ставова подударности троуглова и уједно дају важну особину симетрале дужи и симетрале угла.

Пример 1. Тачка X припада симетрали дужи AB ако и само ако је $AX \cong BX$.

Доказ. Претпоставимо да тачка X припада симетрали дужи AB. Нека је S средиште дужи AB, $S \neq X$.



Тада је $AS \cong SB$, $XS \cong XS$ и $\sphericalangle ASX = \sphericalangle XSB = 90^\circ$.

Одавде на основу става СУС следи да је $\triangle ASX \cong \triangle XSB$. Отуда је $AX \cong XB$.

Обратно, претпоставимо да је $AX \cong XB$.

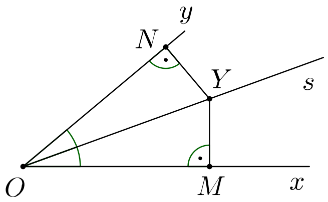
На основу Теореме 2.23 наспрам подударних страница у троуглу налазе се подударни углови, па је $\sphericalangle XAB \cong ABX$.

Нека је S средиште дужи AB. На основу релација $AX \cong XB$, $\sphericalangle XAB \cong ABX$ и $AS \cong SB$, применом става СУС следи да је $\triangle ASX \cong \triangle SBX$.

Одавде је $\sphericalangle ASX \cong \sphericalangle XSB$. Како су ови углови напоредни (тј. њихов збир је 180°, следи да су прави. Права XS је нормална у тачки S на дуж AB, па представља симетралу дужи AB. Дакле, тачка X припада симетрали XS дужи AB. $\square$

Пример 2. Тачка Y припада симетрали угла $\sphericalangle xOy$ ако и само ако је подједнако удаљена од кракова тог угла.

Доказ. Претпоставимо да тачка Y припада симетрали s угла $\sphericalangle xOy$.



Слика 53. Бисектриса Os

Нека су M и N подножја нормала из тачке Y на крацима Ox и Oy редом (слика 53).

Тада је на основу става УСУ троугао $\triangle OMY$ подударан троуглу $\triangle OYN$, јер је $OY \cong OY$, $\sphericalangle NOY \cong YOM$ и $\sphericalangle OYN \cong \sphericalangle OYM$.

Одавде следи да је $MY \cong NY$, што значи да се тачка Y налази на подударним растојањима до кракова угла $\sphericalangle xOy$.

Обрнуто, претпоставимо да је тачка Y подједнако удаљена од кракова угла $\sphericalangle xOy$.

Ако су MY и NY нормална одстојања тачке Y до кракова Ox и Oy редом, тада је по претпоставци $MY \cong NY$.

Како је $OY \cong OY$, $MY \cong NY$ и углови наспрам хипотенузе OY су прави, помоћу става ССУУ следи да је $\triangle OMY \cong \triangle OYN$.

Одавде добијамо да је $\sphericalangle MOY \cong \sphericalangle YON$. Према томе, права OY је симетрала угла $\sphericalangle xOy$. $\square$

5. Подударност троуглова и углови трансверзали

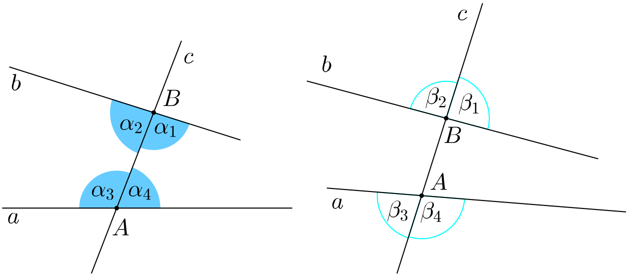
Права која сече две произвољне праве у еуклидској равни назива се трансверзала.

Углови који настају у пресеку трансверзале и других двеју правих називају се углови на трансверзали или трансверзални углови.

Углови на трансверзали се деле на: супротне, сагласне и наизменичне.

Да бисмо дефинисали те углове, најпре ћемо углове на трансверзали поделити на спољашње и унутрашње.

Дефиниција 3.1. Унутрашњи угао на трансверзали која сече праве a и b у тачкама A и B је угао чији крак садржи дуж AB. Спољашњи угао на трансверзали која сече праве a и b у тачкама A и B је угао чији крак не садржи дуж AB.

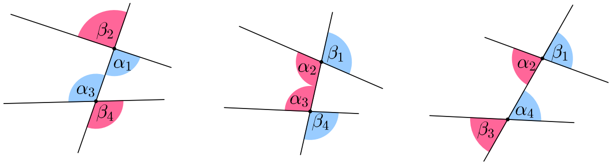


Слика 63. Унутрашњи углови $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, α_4
и спољашњи углови $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$

Дефиниција 3.2. Два спољашња или два унутрашња угла са различитих страна трансверзале (који нису напоредни) називају се наизменични углови.

Дефиниција 3.3. Два спољашња или два унутрашња угла са исте стране трансверзале називају се супротни углови.

Дефиниција 3.4. Један спољашњи и један унутрашњи угао који се налазе са исте стране трансверзале (који нису напоредни) називају се сагласни углови.



Слика 64. Наизменични, супротни и сагласни углови

5. Подударност троуглова и углови на трансверзали

На слици 64, наизменични углови су парови углова: α_1, α_3 и β_2, β_4;

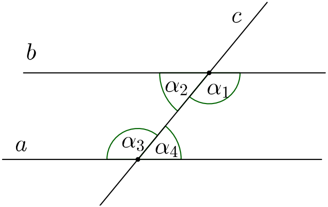
супротни углови су парови углова: α_2, α_3 и β_1, β_4;

сагласни углови су парови углова: β_1, α_4 и α_2, β_3.

5. Подударност троуглова и углови на трансверзали

Ако је c трансверзала паралелних правих, тада наизменични, сагласни и супротни углови имају паралелне краке. За такве углове, важе следеће теореме.

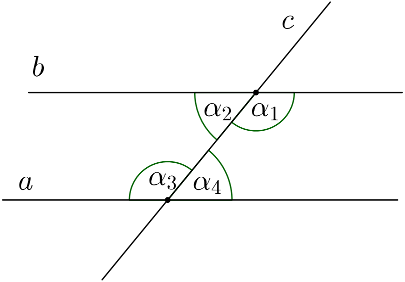
Теорема 3.1. Праве a и b у еуклидској равни су паралелне ако и само ако су супротни углови на њиховој трансверзали суплементни.



$$a||b \iff \alpha_1 + \alpha_4 = 180^\circ.$$

$$a||b \iff \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ.$$

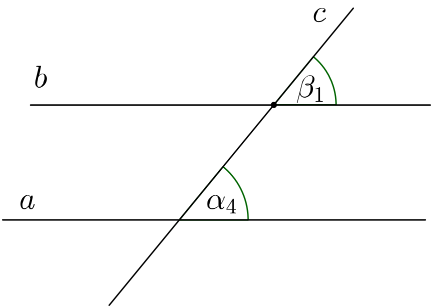
Теорема 3.2. Праве a и b у еуклидској равни су паралелне ако и само ако су наизменични углови на њиховој трансверзали једнаки.



$$a || b \iff \alpha_2 = \alpha_4$$

$$a || b \iff \alpha_1 = \alpha_3$$

Теорема 3.3. Праве a и b у еуклидској равни су паралелне ако и само ако су сагласни углови на њиховој трансверзали једнаки.

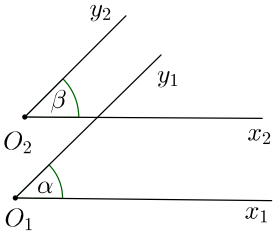


$$a \| b \iff \beta_1 = \alpha_4$$

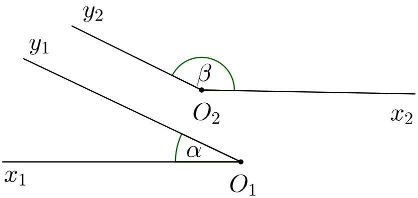
Теорема 3.4. Ако су α и β углови са паралелним крацима у равни $\mathbb{E}^2$, тада су они:

(а) подударни, ако су оба оштри, прави или тупи;

(б) суплементни, ако је један оштар, а други туп.



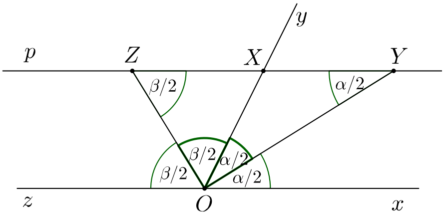
Слика 71. Подударни углови α и β са паралелним крацима



Слика 72. Суплементни углови α и β са паралелним крацима

Пример 3. Дати су напоредни углови $\alpha = \sphericalangle xOy$ и $\beta = \sphericalangle yOz$. Из произвољне тачке X на њиховом заједничком краку Oy повучена је права p паралелна краку Ox. Ако права p сече симетрале углова α и β у тачкама Y и Z редом, доказати да је X средиште дужи YZ.

Решење. Нека су $\alpha = \sphericalangle xOy$ и $\beta = \sphericalangle yOz$ напоредни углови. Означимо са p праву кроз тачку X паралелну краку Ox, која сече симетрале углова α и β у тачкама Y и Z редом.



Пошто су OY и OZ симетрале углова α и β, имамо да је

$$\sphericalangle xOY = YOX = \frac{\alpha}{2}, \tag{1}$$

$$\sphericalangle zOZ = \sphericalangle ZOX = \frac{\beta}{2}. \tag{2}$$

Углови $\sphericalangle zOZ$ и $\sphericalangle OZX$ су наизменични углови на трансверзали OZ паралелних правих p и Ox. Такође су углови $\sphericalangle XYO$ и $\sphericalangle YOx$ наизменични углови на трансверзали OY паралелних правих p и Ox.

Зато је на основу Теореме 3.2

$$\sphericalangle zOZ = \sphericalangle OZX, \qquad \sphericalangle OYX \cong \sphericalangle xOY. \tag{3}$$

Помоћу релација (1), (2) и (3), добијамо да је

$$\sphericalangle XOZ = \sphericalangle OZX, \qquad \sphericalangle XOY \cong \sphericalangle OYX.$$

Троугао $\triangle OXZ$ има два једнака угла $\sphericalangle XOZ = \sphericalangle OZX$, па је $OX = XZ$.

Аналогно, троугао $\triangle OYZ$ има два једнака угла $\sphericalangle XOY = \sphericalangle OYX$, одакле је $OX = XY$.

Користећи једнакости $OX = XZ$ и $OX = XY$, добијамо да је $XZ = XY$, што значи да је X средиште дужи YZ. $\square$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дате су две концентричне кружнице са заједничким центром O. Ако је AB пречник кружнице мањег полупречника, а PQ пречник кружнице већег полупречника који не садржи тачке A и B, доказати да је $AP \cong BQ$ и $AQ \cong BP$.

2. Дат је оштар угао $\sphericalangle aOb$. На краку Oa дате су тачке A_1 и A_2, а на краку Ob тачке B_1 и B_2 такве да је $OA_1 \cong OB_1$ и $OA_2 \cong OB_2$. Доказати да је $A_2B_1 \cong B_2A_1$.

3. Доказати да су два правоугла троугла подударна, ако су катете једног троугла подударне катетама другог троугла.

4. Тачке P и Q се налазе са разних страна праве p и подједнако су удаљене од те праве. Доказати да је пресек праве p и дужи PQ средиште дужи PQ.

5. ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

5. Дате су две концентричне кружнице $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$. Ако је AB пречник кружнице $k_1(O, r_1)$ и PQ пречник кружнице $k_2(O, r_2)$, доказати да је $AP || BQ$.

6. Из тачке M на бисектриси угла $\sphericalangle xOy$ повучене су праве $p || Oy$ и $q || Ox$. Ако је $p \cap Ox = \{P\}$ и $q \cap Oy = \{Q\}$, доказати да четвороугао $OPMQ$ има све странице подударне.

7. Дат је троугао $\triangle ABC$. На правој AB дата је тачка M таква да је $BM \cong BC$ и $\mathcal{B}(A, B, M)$. Доказати да је права CM паралелна симетрали угла β.

8. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом AB. На правама AC и BC изабране су произвољне тачке D и E, тако да је $\mathcal{B}(C, A, D)$ и $\mathcal{B}(C, E, B)$ и важи $AD \cong BE$. Доказати да основица AB полови дуж DE.